L'ENSEIGNEMENT

MATHÉMATIQUE

GENÈVE
IMPRIMERIE W. KÜNDIG & FILS

Math.
E

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

MÉTHODOLOGIE ET ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT
PHILOSOPHIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES
CHRONIQUE SCIENTIFIQUE — MÉLANGES — BIBLIOGRAPHIE.

REVUE INTERNATIONALE

PARAISSANT TOUS LES DEUX MOIS

DIRIGÉE PAR

C.-A. LAISANT
Docteur ès sciences,
Examinateur d'admission à l'Ecole polytechnique de Paris.

H. FEHR
Docteur ès sciences,
Professeur à l'Université de Genève et au Gymnase.

AVEC LA COLLABORATION DE

A. BUHL
Docteur ès sciences
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

SEPTIÈME ANNÉE

1905

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS

GENÈVE
GEORG & Cie, ÉDITEURS
10, CORRATERIE, 10

1905

PETER GUTHRIE TAIT

par John S. Mackay, M. A., LL. D.

Peter Guthrie Tait naquit dans la petite ville de Dalkeith, près d'Edimbourg, le 28 avril 1831. Au mois d'octobre 1841, il entrait comme élève de première (c'est-à-dire de la classe la moins avancée) à *Academy* d'Edimbourg. Il y resta six ans, et les archives scolaires attestent qu'il fut un brillant élève ; que, dans les cours d'humanités, il remporta toujours les premiers prix, et que dans l'étude des mathématiques il surpassa non seulement les élèves de sa classe, mais encore ceux des classes supérieures. Parmi ces derniers se trouvait James Clerk Maxwell, avec qui Tait se lia d'une amitié qui devait durer jusqu'à la mort de Maxwell. Les deux jeunes gens, quoique ne suivant pas les mêmes cours, avaient les mêmes goûts scientifiques, et prirent de bonne heure l'habitude d'échanger des notes sur les mathématiques. Quelques-unes de ces notes, dont la famille Tait a bien voulu se dessaisir, sont restées à l'école, et il est intéressant de comparer la belle et claire écriture de Tait avec le griffonage de son illustre condisciple [1].

A cette époque, le cycle des études de *Academy* comprenait sept années ; mais à la fin de sa sixième année Tait quitta *Academy*, et se fit inscrire comme étudiant de l'Université d'Edimbourg pour la session de 1847-48 pendant laquelle il suivit les conférences de Kelland (Mathématiques) et de Forbes (Physique). Ses aptitudes mathématiques étaient telles qu'après avoir passé quelques semaines dans la première, ou classe initiale, il fut envoyé par Kelland en seconde, et peu après en troisième, la classe finale. Tait regretta plus tard cette promotion si rapide.

---

[1] Plusieurs traits caractéristiques et amusants de la classe de Tait et de ses professeurs, notamment du professeur de mathématiques, Dr Gloag, ont été notées par le Colonel Fergusson dans un volume intitulé « *The Cumming Club.* «

En 1848 Tait entra au St-Peter's College, Cambridge, où il fit la connaissance de W. J. Steele son plus redoutable compétiteur pour les suprêmes honneurs académiques. En 1852 Tait obtint les titres de *Senior Wrangler* et *First Smith's Prizemann*, et Steele arrivait immédiatement après lui. Aussitôt après, les deux amis se mirent à écrire un livre sur le sujet *Dynamics of a Particle;* mais une mort prématurée priva Tait de son collaborateur avant que l'ouvrage n'eût fait grand progrès. Le livre parut en 1856. Il a eu une vingtaine d'éditions, et quoique enrichi par maintes investigations nouvelles, et de nombreuses additions, toutes de la main de Tait, il porte encore sur son titre les noms des deux amis.

Après avoir pris ses grades, Tait remplit pendant deux ans les fonctions de maître de conférences au St-Peter's College, et en 1854 il fut nommé professeur de mathématiques au Queen's College, Belfast. De cette époque date sa liaison avec le docteur Andrews le chimiste, « dans le laboratoire duquel », dit Tait, « j'ai appris pour la première fois à bien manier les appareils scientifiques. Ses sages avis me firent sentir l'importance suprême de la précision, et surtout celle de l'honnêteté scientifique. »

En 1853 fut édité le volume de *Lectures on Quaternions* par Sir W. R. Hamilton, et bientôt après Tait enthousiasmé se lançait avec ardeur dans l'étude de ce nouveau sujet. Il publia dans le *Messenger of Mathematics* et le *Quarterly Journal* quelques mémoires dans lesquels il faisait l'application des idées de Hamilton à la Physique mathématique. Quelque douze ans plus tard Tait fit paraître son *Elementary Treatise on Quaternions* dont il avait longtemps retardé la publication, pour ne pas devancer Hamilton qui travaillait à son chef-d'œuvre *Elements of Quaternions*.

En 1860 quand J. D. Forbes, dont le nom est si connu, grâce à sa théorie des glaciers, fut promu « Principal » de l'Université de St-Andrews, ses élèves Tait et Clerk Maxwell posèrent tous deux leur candidature à sa chaire. Le choix tomba sur Tait, on peut ajouter heureusement, car si Maxwell savait instruire l'élite des étudiants, Tait, lui, était aussi habile avec les intelligences ordinaires qu'avec les esprits

supérieurs. L'homme était digne de la chaire, et la chaire convenait admirablement à l'homme. Sa nouvelle situation lui permit de répandre ses doctrines parmi la jeunesse studieuse de différents pays, de lui inspirer son enthousiasme pour les sciences exactes, et de lui donner l'exemple d'un chercheur qui sans relâche poursuit la vérité. « La plus grande partie de mon temps », a-t-il dit, « a été affectée à l'enseignement et aux travaux indispensables qui s'y rattachent. » Il consacra les loisirs qui lui restaient à des recherches mathématiques et expérimentales, et aux affaires de la Société Royale d'Edimbourg.

Il s'était lié, avant sa nomination à la chaire de l'Université, avec le professeur WILLIAM THOMSON de Glascow (aujourd'hui lord Kelvin). Les deux savants prirent la résolution d'écrire ensemble un *Treatise on Natural Philosophy* en quatre tomes. Le premier tome (le seul qui ait paru) vit le jour en 1867, et produisit une révolution dans le mode d'envisager le sujet. Comme ouvrage classique il a la même importance pour la Physique moderne que les *Principia* de Newton pour l'Astronomie. On lui a donné le sobriquet de *T and T'* (Thomson et Tait), la notation prolongée T″ servant, chez les amis de Tait, à désigner le professeur Tyndall. Le récit suivant de la marche et de la fin de leur collaboration est donné par LORD KELVIN, dans sa notice nécrologique sur Tait, lue devant la Société Royale d'Edimbourg.

« La composition de la première partie de T et T' fut traitée en manière de divertissement perpétuel pour tout ce qui concerne les détails ennuyeux (échange de brouillons, « copie », changements typographiques), aussi bien que la correction finale des épreuves. Elle fut égayée par un échange de visites entre Greenhill Gardens, Drummond Place, ou George Square [demeures de Tait], et Largs, Arran, ou l'ancien ou encore le nouveau collège de Glascow [demeures de Thomson].

« En 1878 nous arrivâmes à la fin de notre Division II sur la Dynamique Abstraite. Selon notre programme initial nous aurions dû passer aux propriétés de la matière, à la chaleur, à la lumière, à l'électricité, et au magnétisme ; mais, au lieu

de suivre ce programme, nous convînmes d'étudier, à l'avenir, chacun de notre côté, librement, des sujets variés, sans nous astreindre à fournir simultanément le plus de matière possible, et sans avoir en vue un traité complet. Aussi notre livre, une fois terminé, ne fit-il que jeter les bases de l'édifice que nous nous étions d'abord proposé de construire. »

En 1860 Tait fut élu membre de la Société royale d'Edimbourg, en 1864 il fut associé au professeur J. H. Balfour comme secrétaire, en 1879 il devint secrétaire général, le fonctionaire le plus important et le plus influent de l'association. Dès son élection il avait commencé ses contributions aux *Transactions* et *Proceedings* et ces contributions furent continuées chaque année jusqu'à la fin de sa laborieuse existence. Pour reconnaître la valeur de ses mémoires, la Société lui a décerné deux fois (1869, 1874) la médaille Keith, et en 1900 le prix « Gunning Victoria Jubilee ». La Société royale de Londres, bien qu'il ne fût pas un de ses membres, lui présentait en 1886 une de ses médailles royales. La plupart de ces mémoires et d'autres insérés dans le *Messenger of Mathematics*, le *Quarterly Journal of Mathematics*, le *Philosophical Magazine*, les *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* ont été réimprimés à l'université de Cambridge dans deux grands volumes in-quarto.

Il serait difficile de classer des mémoires si nombreux (il y en a plus de cent trente), si variés, et de les ranger par ordre d'importance. Il suffira d'attirer l'attention sur les mémoires relatifs aux Quaternions, aux principes de la théorie cinétique des gaz, aux observations de température faites par l'expédition du *Challenger*, et à la théorie des nœuds, le développement le plus intéressant et le plus beau qui ait été fait jusqu'ici de la *Geometria Situs*. Ceux qui désirent savoir ce que Tait entendait par les termes *knottiness*, *knotfulness*, et *beknottedness* (termes d'une nomenclature nouvelle imposées par un sujet nouveau), devront consulter ses mémoires, car ces mots sont intraduisibles en français.

Il serait injuste de passer sous silence les autres contributions fournies par Tait à la littérature scientifique du dix-

neuvième siècle, car elles sont nombreuses, variées et importantes. On peut citer ses articles dans la *North British Review* (1864-6), *Sketch of Thermodynamics* (1868), *Introduction to Quaternions* en collaboration avec le professeur Kelland (1873), l'appréciation de l'œuvre scientifique de son prédécesseur J. D. Forbes (1873), *Recent Advances in Physical Science* (1876), *Light* (1884), *Heat* (1884), *Properties of Matter* (1885), *Thermodynamics* (1888), *Dynamics* (1895), *Newton's Laws of Motion* (1899).

En collaboration avec Balfour Stewart il fit paraître en 1875 un livre intitulé « *The Unseen Universe* ». Le but principal de cette œuvre extraordinaire, que le public ne paraît pas avoir bien comprise, était de montrer les limites de la science humaine, et de réfuter cette assertion que la science est incompatible avec la religion. Un autre volume « *Paradoxical Philosophy* » qui le suivit, et qui fut dû à Tait seul, ne semble pas avoir eu le même retentissement.

Tait avait des opinions très arrêtées sur beaucoup de sujets, et quoiqu'il soit vrai qu'il n'en fit jamais parade, il est également vrai qu'il ne prit jamais la peine de les cacher. Sa franchise l'entraîna une ou deux fois dans des controverses, comme celle qu'il eut avec le professeur Tyndall sur l'établissement de l'équivalent mécanique de la chaleur. Les détails de ces discussions seraient déplacés ici, mais ceux qui s'intéressent à ces polémiques scientifiques sont renvoyés aux tomes du *Philosophical Magazine* et de *Nature*.

Les récréations physiques des savants sont aussi intéressantes pour leurs confrères qu'elles le sont pour le grand public. La seule récréation de ce genre était pour Tait le jeu de « golf ». A notre époque presque tout le monde, depuis le premier ministre de l'Etat jusqu'au plus humble gamin, sait jouer au « golf » ; mais bien rares sont ceux qui ont étudié ce jeu scientifiquement. C'est Tait qui a inauguré cette étude, et tout ce que nous savons de la science (par opposition à l'art) du « golf » vient de lui. Un de ses fils, le très regretté Freddie, qui fut tué dans la guerre sud-africaine, était un des meilleurs « golfeurs » qui aient jamais existé, et il aida son père dans les expériences entreprises

pour déterminer la vitesse initiale d'une balle habilement frappée.

Quoique robuste et « fort » dans toute l'acception du mot, Tait ressentit, un an ou deux avant sa mort, les effets du travail incessant et ardu auquel il s'était livré sans mesure. Il n'en garda pas moins, presque jusqu'à son dernier jour, la force de s'acquitter de ses fonctions professorales. Il est mort le 4 juillet 1901 dans la maison de son élève et ami sir John Murray.

Il avait épousé en 1857 Miss Margaret Porter, jeune fille issue d'une famille très distinguée, et qui lui survit. Il a laissé trois fils et deux filles.

Plusieurs tributs ont été payés à la mémoire de Tait par ses amis et ses élèves. Parmi les uns il faut citer les notices de Lord Kelvin, des professeurs Chrystal et Flint, et de M. J. D. Hamilton Dickson ; parmi les autres les notices des professeurs Knott, Macfarlane, Macgregor et du docteur G. A. Gibson. Tous ces écrits sont des témoignages éloquents de l'affection, de l'estime, et de la vénération que le caractère ouvert, loyal et courageux de Tait n'a jamais manqué d'inspirer.

En 1879, dans sa notice nécrologique sur Clerk Maxwell Tait s'exprime ainsi :

« L'Ecosse a bien raison d'être fière de la pléiade de grands hommes de science qu'elle compte parmi ses fils récemment décédés ; mais même dans la compagnie de Brewster, de Forbes, de Graham, de Rowan Hamilton, de Rankine et d'Archibald Smith, elle décernera une place au premier rang à James Clerk Maxwell. »

Le nom de Peter Guthrie Tait sera aussi, croyons-nous, enregistré dans cette illustre compagnie, et restera toujours associé à celui de son condisciple de l'Academy d'Edimbourg.

John S. Mackay (Edimbourg).

SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES EN ITALIE [1]

. . . .

Les traditions géométriques de l'Italie sont euclidiennes : dès que les ténèbres du moyen âge furent dissipées, des éditions, des traductions, des commentaires des *Eléments d'Euclide* commencèrent à paraître et elles se succédèrent sans cesse en portant les signatures de personnalités éminentes, telles que Tartaglia, Commandino, Viviani, Borelli, Grandi, Sacheri, Fagnano, Flauti. Cette brillante série est une preuve du culte sans bornes que l'Italie, pendant bien des siècles, paya au grand Alexandrin. Toutefois, lorsqu'elle devint enfin libre, et put jouir d'un bout à l'autre d'un gouvernement national, elle conservait encore dans son organisation scolaire des traces déplorables et évidentes de son séculaire servage. Dans l'ancien Piémont, par exemple, certainement à cause de l'influence française, on préférait la méthode demi-arithmétique de Legendre aux rigoureux procédés géométriques d'Euclide ; tandis que dans les provinces qui venaient de secouer le joug autrichien se trouvaient répandus des manuels écrits uniquement dans un but commercial ; ils étaient si peu satisfaisants que Cremona, devenu professeur dans un gymnase de la Lombardie, n'en voulut adopter aucun comme livre de texte et salua, comme signal d'une amélioration et point de départ de nouveaux progrès, la traduction d'un ouvrage, aujourd'hui presque oublié ; je veux parler du *Traité de géométrie de* Amiot. Chargé en 1867 par son Gouvernement de tracer les lignes générales d'une réforme de l'enseignement géométrique dans les écoles classiques italiennes, Cremona n'hésita pas un seul instant à proposer comme remède le retour pur et simple aux *Elé-*

[1] Extrait d'une communication présentée au 3me Congrès international des mathématiciens à Heidelberg, le 9 août 1904.

ments d'Euclide. Si cette mesure, que le gouvernement s'empressa d'adopter, peut paraître aujourd'hui un peu trop draconienne, lorsqu'on tient compte du but qu'elle se proposait (et qu'elle atteignit en effet), c'est-à-dire d'extirper de nos écoles les mauvaises habitudes introduites par certains livres, elle doit être considérée comme un des actes du grand mathématicien qui le signalent à la reconnaissance éternelle de ses concitoyens. Il est juste d'ajouter que dans sa courageuse entreprise il eut comme alliés deux autres grands savants, Brioschi et Betti, dont l'excellente édition d'Euclide rendit non seulement possible, mais relativement aisée, la réforme proposée par Cremona.

Le retour à la source pure de la géométrie grecque, ayant comme résultat immédiat des préjudices matériels, provoqua une opposition vive, mais qui ne pouvait durer longtemps et par bonheur, finit bientôt par s'éteindre. Toutefois les grands mathématiciens qui introduisirent les *Eléments d'Euclide* dans les écoles italiennes ne niaient pas que ce livre, après vingt-deux siècles, n'eût pas besoin de retouches; aussi le Gouvernement italien ouvrit-il un concours pour un traité inédit de Géométrie élémentaire, et un peu plus tard adoucit la disposition que nous avons citée tout à l'heure, en se bornant à demander que l'enseignement classique fût fait d'après la *méthode*, mais non sur le *texte* même d'Euclide. Voilà une décision qu'on ne saurait trop louer; c'est elle, en effet, qui permit l'adoption dans nos écoles de bons traités, par exemple de ceux de Sannia et d'Ovidio et de Faifofer; c'est elle qui invita en quelque sorte les géomètres à chercher si les théories exposées par le grand maître se prêtaient à des améliorations didactiques et scientifiques, et donna l'essor à des recherches qui conduisirent à des résultats d'une importance considérable; tels sont ceux, ayant trait à la théorie de l'équivalence des polygones et des polyèdres, qui parvinrent à corriger un défaut existant dans les *Eléments* d'Euclide, que Legendre lui-même ne parvint pas à supprimer.

Ce régime de liberté toujours croissante, si conforme au

naturel du peuple italien, encouragea des savants de premier ordre, vivant en dehors des écoles moyennes, à porter leur attention du côté des éléments de la géométrie.

Le premier des géomètres, qui entrèrent dans cette voie, est notre regretté De Paolis, qui, par un excellent manuel, tout à fait original, non seulement rendit populaire dans nos écoles l'idée d'abattre l'ancienne séparation de la Géométrie en Géométrie plane et en Géométrie de l'espace, mais, par de nombreux exemples, prouva l'utilité théorique de cette innovation.

Non moins radicale est la réforme que proposa plus tard M. Veronese, en poursuivant le cours des idées qui caractérisent ses remarquables recherches de Géométrie à plusieurs dimensions ; bornons-nous à signaler ses efforts couronnés de succès, pour déterminer le rôle de l'idée de *mouvement* dans les démonstrations géométriques et la conclusion à laquelle il parvint, qu'il est scientifiquement possible et utile, au point de vue pédagogique, de bannir tout à fait ce concept. L'importance de l'action de M. Veronese a été accrue par les nombreuses discussions soulevées par ses propositions.

Moins révolutionnaires ont été les derniers de ceux des savants italiens qui s'occupèrent de Géométrie élémentaire ; en effet, MM. Enriques et Amaldi, en se rattachant de nouveau à la tradition euclidienne, se proposèrent, dans un livre récent, de refaire les *Eléments* d'Euclide, en les exposant sous une forme adaptée à l'état actuel de la science et aux besoins de nos écoles. La question des postulats fondamentaux de la Géométrie et la théorie de l'équivalence attirèrent leur attention d'une manière tout à fait spéciale, dans le but de satisfaire à la fois aux exigences de l'enseignement et à celles de la science d'aujourd'hui.

De nature bien différente est enfin l'essai d'introduire la logique mathématique dans l'enseignement élémentaire de la Géométrie et aussi de l'Algèbre ; cet essai doit être cité, car il se base sur une méthode qui compte en Italie des adhérents nombreux et habiles ; mais, ceux-là même qui considèrent favorablement le Calcul logique dans ses appli-

cations à l'analyse microscopique des idées fondamentales des mathématiques, ne croient pas en général qu'il soit destiné à nous fournir la solution définitive du problème de l'enseignement élémentaire.

Ayant eu l'occasion de citer des travaux didactiques ayant trait au calcul, il ne m'est pas permis de passer sous silence des maîtres tels que MM. Arzela, Capelli et Pincherle qui, par des ouvrages, qui eurent un grand succès, ont affranchi leur pays de la nécessité de recourir à l'étranger pour avoir des bons manuels d'arithmétique et d'algèbre.

Les élèves des savants que nous venons de nommer, dès qu'ils occupèrent une chaire dans l'enseignement moyen, se proposèrent, par des efforts qui les honorent, de mettre à l'épreuve ces nouveaux procédés didactiques ; par cela ils réussirent à les rendre plus parfaits dans les détails et plus adaptés à l'intelligence des jeunes gens. En conséquence l'ancien type de nos écoles subit une modification radicale ; car les jeunes professeurs, essayant avec un enthousiasme communicatif les méthodes nouvelles, ramenèrent de la vie et de la lumière dans les mornes salles où auparavant quelque vieux maître, tout en bâillant, exposait l'ancienne démonstration du théorème de Pythagore, en présence d'un auditoire sommeillant. Le grand public, en général enclin à se méfier des nouveautés, suit avec crainte ce changement, appuyé en cela par les maîtres de l'« ancien régime », qui considèrent tout ce mouvement par le même œil que certains anciens médecins jugent les nouveaux procédés curatifs ; mais ceux qui ont foi dans le progrès indéfini du savoir ne peuvent que saluer avec joie ces changements que fait la méthode d'enseignement de la Géométrie, tout en procédant toujours sur la route indestructible frayée par Euclide.

La Société *Mathésis*, fondée il y a quelques années en vue de grouper ceux qui enseignent les sciences exactes dans les écoles moyennes, met en lumière d'une manière éclatante toute cette vie dont sont animés nos professeurs de mathématiques : son noble programme a été résumé en d'ex-

cellents termes par un de ses présidents en écrivant que son but est de *tourner les progrès de la science à l'avantage de l'école.* En attirant l'attention des savants sur des thèmes déterminés, en dirigeant les discussions relatives, en fixant des réunions partielles et des congrès généraux, *Mathésis* tient allumé ce feu sacré qui nous paraît nécessaire pour que les professeurs des écoles moyennes soient dignes de la haute fonction que la société leur a confié : si elle a soin de maintenir le contact continuel de ses sociétaires avec les membres du corps universitaire, elle contribuera à développer de plus en plus cet échange d'idées entre les professeurs de tous les degrés, qui nous semble indispensable, si l'on veut assurer cette continuité dans l'enseignement de la même branche du savoir, qui paraît nécessaire à tous ceux qui se rappellent que *natura abhorret a saltus.*

Parmi les questions qu'on a discutées au sein de *Mathésis*, il y en a deux qui par leur importance méritent que nous en disions quelques mots.

La première a été soulevée par la publication du Traité de Géométrie de De Paolis et consiste dans la recherche des avantages que peut tirer l'enseignement si l'on détruit l'ancienne séparation élevée par Euclide entre la Géométrie du plan et celle de l'espace. Dès 1825 Gergonne observait « qu'il est raisonnablement permis de se demander si notre manière de diviser la Géométrie en Géométrie plane et Géométrie de l'espace, est aussi naturelle et aussi exactement conforme à l'essence des choses, que vingt siècles d'habitude ont pu nous le persuader ; » c'est la même idée que soutint, une quinzaine d'années après, un obscur géomètre français, de Mahistre, dont M. Laisant a récemment opéré l'exhumation[1].

La 2e édition de l'ouvrage de de Mahistre parut dans la même année (1844) où fut publié le *Lehrgebäude der niedern Geometrie* de Carl Anton Bretschneider, dans lequel la fusion entrevue par Gergonne est effectuée ; car au lieu de l'ancienne division de la géométrie, on trouve celle en géométrie de

[1] *L'Enseignement mathématique.* T. III. 1901. p. 98 et suiv.

position, géométrie de la forme, géométrie de la mesure. Si nous ne nous trompons pas, BRETSCHNEIDER en Allemagne, pas plus que GERGONNE en France, ne trouva des imitateurs, quoique SCHLÖMILCH ait franchement proclamé que « la prééminence de la planimétrie est une erreur, le ton devant être donné par la stéréométrie ». Quant à l'Italie, il est bien remarquable que dans les programmes officiels pour nos Instituts techniques, publiés en octobre 1871, on lit les lignes suivantes, dues sans doute à BRIOSCHI : « Se servir de l'espace à trois dimensions, même dans les questions de géométrie plane, est un des artifices d'investigation géométrique, que même les anciens ont connu, et qui contribue à donner bientôt aux élèves l'habitude de voir par les yeux de l'esprit les figures géométriques de l'espace idéal. » Et peu après CREMONA ajoutait dans un ouvrage célèbre : « Les considérations stéréométriques donnent bien souvent le moyen de rendre facile et intuitif ce qui en géométrie plane serait compliqué et de démonstration difficile : d'ailleurs elles aiguisent l'intelligence et aident le développement de cette imagination géométrique qui est une qualité essentielle de l'ingénieur pour qu'il puisse concevoir les figures de l'espace même sans l'aide d'un dessin ou d'un modèle [1]. » Presque au même instant où le grand maître italien écrivit ces lignes, un éminent géomètre français, M. MÉRAY, en s'inspirant aux idées de GERGONNE, effectuait la fusion des deux géométries par ses excellents *Nouveaux éléments*, publiés à Paris en 1873. Mais il semble qu'à ce moment-là ses idées ne furent guère goûtées par ses compatriotes, ni à l'étranger ; en tout cas elles n'étaient pas connues par DE PAOLIS lorsqu'il conçut le plan de ses *Elementi di geometria* (Torino 1884). C'est par la publication de ce livre (bientôt suivi par celle d'un traité analogue de MM. LAZZERI e BASSANI) que commencèrent en Italie les longues discussions entre *fusionnistes* et *séparatistes* ; et il est digne d'être noté que l'écho de ces débats, étant arrivé jusqu'à Dijon, par l'organe de celui qui a l'honneur de vous parler, M. MÉRAY fut encouragé à reve-

[1] *Elementi di geometria projettiva* (Torino, 1873). Avant-propos.

nir sur ses anciennes méthodes et à les perfectionner : un brillant succès, constaté par des documents officiels, a couronné ces nouveaux efforts! — On s'est plu à me peindre comme un fusionniste ardent ; c'est une exagération : aimant en général toute nouveauté, j'ai considéré avec une vive sympathie l'apparition d'une méthode nouvelle pour considérer l'ensemble des vérités géométriques. D'ailleurs, lorsqu'un procédé a été imaginé par des penseurs distingués de nationalités et d'époques différentes, et lorsqu'il s'est montré capable d'applications très vastes et très variées [1], il me semble qu'il ne mérite pas d'être relégué parmi des produits artificiels destinés à mourir, même si ses résultats n'autorisaient pas encore à trancher la question en sa faveur. Cela étant, il est naturel que j'exprime le vœu que la question de la fusion de la planimétrie et de la stéréométrie soit étudiée d'une manière large et complète, en essayant de la résoudre en se servant tout aussi bien de considérations théoriques et des résultats des expériences qu'on a déjà fait [2] et qu'on est en train de faire.

L'autre des questions traitées au sein de l'Association *Mathesis*, auxquelles je fis allusion un peu plus haut, est la recherche des moyens pour augmenter le profit de l'enseignement des éléments des mathématiques. Or, cet enseignement donne-t-il en général des résultats moindres que les autres enseignements parallèles, scientifiques ou littéraires ? Je ne saurais l'affirmer. Toutefois je trouve belle et digne de considération la question que je viens de signaler, car le maître doit s'efforcer d'accroître l'efficacité de son enseignement, quel que soit le degré qu'il a déjà atteint. On ne peut s'attendre à obtenir une solution définitive et complète de la question énoncée ; les observations générales qui suivent ne sont destinées qu'à l'éclaircir un peu. Je vais commencer par une remarque faite par HERMITE, presque à

[1] On peut par exemple l'appliquer aussi dans l'enseignement de la géométrie analytique, comme l'a prouvé BIOT depuis 1802.

[2] Il est bon de remarquer que les derniers programmes italiens ont été rédigés de manière qu'ils peuvent servir aux fusionnistes aussi bien qu'aux séparatistes.

la veille de sa mort; voilà comment s'exprimait ce grand maître :

« BACON DE VERULAM a dit que l'admiration est le principe du savoir; sa pensée qui est juste en général, l'est surtout à l'égard de notre science, et je m'en autoriserai pour exprimer le désir qu'on fasse pour les étudiants, la part la plus large aux choses simples et belles qu'à l'extrême rigueur, aujourd'hui en honneur, mais bien peu attrayante, souvent même fatigante sans grand profit pour le commençant qui n'en peut comprendre l'intérêt [1]. »

Une idée tout à fait analogue à celle de Bacon était émise par un philosophe italien, BOVIO, en disant que « le but de l'enseignement moyen est celui d'apprendre, non la science, mais l'amour de la science ». Or les mathématiques peuvent se considérer sous un double aspect; c'est-à-dire on peut les admirer comme un modèle le plus parfait d'édifice scientifique, d'une solidité si parfaite que, même le siècle de la critique, n'a su en secouer les bases; ou bien comme fournissant des moyens de recherches si sûrs et puissants que toutes les autres sciences y eurent recours dès qu'elles abandonnèrent leur état d'enfance. Or si c'est une prérogative de quelques esprits d'élite d'aimer dès leur jeunesse les sciences exactes pour leurs qualités *théoriques*, toute personne intelligente ne peut rester froide en présence des belles applications, dont elles sont susceptibles; en conséquence il ne sera pas assez recommandé aux professeurs de mathématiques de traduire, sous une forme concrète, les questions théoriques [2] et d'insérer au milieu de l'exposition des doctrines le plus souvent qu'ils peuvent des applications pratiques, variées et intéressantes. C'est d'ailleurs une idée que j'ai trouvée déjà appliqué dans un excellent traité de géométrie, publié en Allemagne : je parle de celui de MM. HENRICI et TREUTLEIN, où, comme application de la trigonométrie, on

[1] *Archiv d. Math. und Phys.*, 3e Reihe, I. Bd.

[2] Par exemple le problème « trouver la hauteur d'une pyramide triangulaire en connaissant les angles faits avec le plan ABC de la base par les arêtes latérales VA, VB, VC » peut s'énoncer : « calculer la hauteur d'un aérostat V en connaissant ses angles d'élévation lorsqu'on l'observe depuis trois points ABC dont les distances éventuelles sont connues ». Et la question de « trouver l'intersection d'une surface avec un cône circulaire » est identique au fond avec celle de « déterminer l'ombre portée par un disque sur une surface donnée ».

trouve des éléments de la triangulation du Grand-Duché de Baden !

Le nom de M. Treutlein, que je viens de prononcer, me donne l'occasion de déclarer que je me range aussi de son côté lorsqu'il recommande l'indroduction d'un élément historique dans l'exposé des théories mathématiques : « Les matières de la géométrie, a remarqué Blaise Pascal, sont si sérieuses d'elles-mêmes, qu'il est avantageux qu'il s'offre quelque occasion pour les rendre un peu divertissantes » ; or c'est l'élément historique qui fournit peut-être le moyen meilleur pour interrompre la marche un peu lourde des déductions mathématiques.

Permettez-moi, Messieurs, que j'ajoute enfin une proposition concernant particulièrement la Géométrie. Dans l'enseignement universitaire les cours de Géométrie descriptive et de Géométrie projective sont accompagnés d'exercices méthodiques de dessin, dans lesquels les étudiants effectuent les constructions et appliquent les théories exposées par le professeur : c'est un moyen précieux permettant de familiariser les élèves avec les méthodes dont les sources se trouvent dans les œuvres immortelles de Monge et de Poncelet. Or pourquoi ce système ne pourrait-il pas s'étendre aux écoles moyennes ? Deux heures d'exercices graphiques chaque semaine suffiraient aux élèves pour s'emparer de l'essence même des procédés propres de la Géométrie et par un commerce continuel avec les cercles et les triangles, ils apprendront à aimer ce qu'auparavant ils ne faisaient que redouter : qu'il me soit permis de fixer sur cette idée l'attention des savants qui me font l'honneur de m'écouter.

Comme c'est bien naturel, on a beaucoup parlé, au sein de l'Association *Mathésis*, de programmes d'enseignement, en s'occupant des écoles classiques (*Gymnasien*) aussi bien que des Ecoles et des Instituts techniques (*niedere und obere Realschulen*). C'est à propos de ces dernières que la différence des idées s'est manifestée plus vivement et n'est pas encore finie ; c'est une chose qu'on pouvait prévoir et qu'il n'est pas difficile de s'expliquer ; car l'enseignement technique n'a pas un type déterminé et fixe dans tous les pays ; en Italie il y

a des personnes qui croient bon de le forger sur le modèle des *lateinlosen Schulen* de l'Allemagne ou de l'*enseignement moderne* de la France, tandis que d'autres soutiennent l'opinion qu'il faut lui donner un caractère franchement professionnel, telle que l'aurait une école des arts et métiers. Je ne sais pas si c'est la cause ou l'effet de cette diversité d'opinions qui fit que nos instituts techniques ont effectué un voyage d'aller et retour du ministère de l'Instruction à celui de l'Agriculture et Commerce; en tout cas il me semble que ces écoles sont aujourd'hui formées par des éléments hétérogènes luttant sourdement entre eux et entre lesquels il naîtra tôt ou tard une scission définitive. Comme professeur universitaire, je m'intéresse particulièrement au programme de la section physico-mathématique, car c'est elle seule qui mène aux écoles supérieures. Or ce programme a subi beaucoup de changements et je crois qu'il en subira encore, car le but même qu'il se propose n'est pas bien déterminé : pour les mathématiques il doit s'élever au-dessus des théories tout à fait élémentaires, mais il ne doit pas atteindre les mathématiques supérieures; il doit donc comprendre les *mathématiques complémentaires*. Or quelles sont les théories que l'on doit embrasser sous ce nom ? Personne ne pourrait à présent le dire, ni le saura dire jamais. Par conséquent, suivant mon sentiment, il n'y a qu'une manière de rédiger le programme de mathématiques pour les sections physico-mathématiques des Instituts techniques : c'est de faire une liste assez nombreuse de thèmes entre lesquels le professeur pourra choisir suivant ses idées et ses goûts personnels, ou bien suivant les traditions de l'établissement auquel il appartient et suivant les aptitudes des élèves. Cette idée n'est pas nouvelle dans le fond, car elle constitue la moëlle du *Lehrplan* publié il y a trois ans pour les *Oberrealschulen* de l'Allemagne ; c'est une idée profonde et extrêmement libérale qui fait honneur aux savants qui en ont pris l'initiative et il est à souhaiter qu'elle soit appliquée d'une manière encore plus générale.....

GINO LORIA (Gênes).

L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE AUX ÉCOLES PROFESSIONNELLES ET LES MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR[1].

I. — Quels besoins ont imposé à Besançon l'enseignement des mathématiques de l'ingénieur.

J'ai créé à l'université de Besançon l'enseignement de Chronométrie; le but ici poursuivi est tout simplement la fusion, la pénétration réciproque de l'intuition ouvrière, de l'intuition technique et de l'intuition scientifique. Ce but à atteindre a été nettement entrevu par les promoteurs du nouvel enseignement, mais la réalisation même de cet enseignement n'a pas vérifié toutes les prévisions. On avait prévu des étudiants horlogers qui, pour la plupart, seraient des fils d'industriels, ou, si l'on préfère, des étudiants patrons.

Or, sauf une exception, nos étudiants horlogers ont été jusqu'ici des ouvriers. Je m'en réjouis pour l'avenir, car à côté de l'école commerciale qui ne voit le progrès que dans l'aveugle imitation de Genève, je vois naître un petit noyau d'artisans originaux, un noyau de chercheurs qui sauront renouveler l'horizon de leurs idées et faire progresser cette horlogerie technique sans laquelle l'horlogerie commerciale elle-même ne pourrait prospérer.

Le commerce est le but, c'est évident, mais s'il faut en horlogerie des capitaux, ne faisons pas fi des chercheurs et des trouveurs; l'idée, l'idée vivante est elle aussi un capital.

Je me réjouis donc d'avoir des élèves ouvriers.

Des étudiants ouvriers : ce simple fait a eu plusieurs conséquences imprévues, je ne retiendrai ici que celles qui peuvent intéresser la section de pédagogie de ce Congrès. Par

[1] Communication faite par M. *J. Andrade* au 3me Congrès international des mathématiciens à Heidelberg le 10 août 1904.

suite d'une entente incomplète avec l'école d'Horlogerie, nos auditeurs ouvriers nous arrivent jusqu'ici après leur sortie de l'école professionnelle ; et cependant, ils nous arrivent ignorant des connaissances mathématiques les plus élémentaires et les plus indispensables à l'intelligence de leur art ; j'ai donc dû me préoccuper de leur donner le *plus vite* et le plus *sûrement* possible les rudiments des mathématiques du contremaître et même pour quelques points délicats de l'étude du réglage les éléments des mathématiques de l'ingénieur. Ainsi est né, pour les besoins mêmes de l'enseignement régulier de la chronométrie, le cours des « Mathématiques de l'ingénieur ». Je dois ajouter que ce cours qui s'est imposé à nous comme un enseignement nécessaire annexe du cours de chronométrie, a attiré d'autres auditeurs plus nombreux que les étudiants horlogers ; et, en particulier, des étudiants de la physique industrielle.

II. — Qu'est-ce que les mathématiques de l'ingénieur.

Cet enseignement est extrêmement élémentaire, pourtant il n'est pas le cours élémentaire de nos lycées. A la fois plus et moins, à coup sûr il est autre.

Moins étendu, mais plus proche des applications techniques il ne s'adresse pas à des jeunes gens dont les loisirs d'esprit sont assurés jusqu'à la vingt-cinquième année ; il s'adresse, au contraire à des artisans qui ont besoin d'apprendre les mathématiques sur leurs outils.

Les mathématiques ainsi étudiées au seuil même du chantier, du laboratoire ou de l'atelier doivent d'être enseignées par des méthodes *à la fois plus simples et plus puissantes* que ne l'exige l'éducation ordinaire de nos bacheliers.

Nous touchons ici à l'une des erreurs les plus répandues autour de l'enseignement professionnel.

On considère habituellement l'enseignement scientifique des écoles professionnelles comme une simple amputation de l'enseignement secondaire.

Il importe au contraire, que l'enseignement professionnel, garde son originalité propre.

Et en effet les élèves de l'enseignement professionnel et plus souvent encore les étudiants ouvriers ont fréquemment une intuition très vive des phénomènes mécaniques et c'est sur cette intuition naturelle que l'on doit s'appuyer pour illustrer les notions mathématiques dont ils ont besoin dès qu'ils veulent être plus que des manœuvres. Ainsi, bien loin de croire que l'éducation mathématique des artisans puisse être confiée à n'importe qui, je suis au contraire persuadé que l'enseignement vivant des mathématiques exigé par les artisans finira, un jour ou l'autre, par simplifier l'enseignement même de nos bacheliers.

III. — Observations pédagogiques suscitées par l'enseignement des mathématiques de l'ingénieur.

Voici diverses observations que j'ai constatées dans la pratique de mon enseignement nouveau.

Toutes les déterminations de fonctions que l'on rencontre dans les problèmes de la mécanique horlogère ont pu être parfaitement saisies par mes étudiants ouvriers lorsque la question comportait une interprétation géométrique adéquate au problème.

L'un des exemples les plus nets que j'en puisse donner ici est l'assimilation complète par des étudiants ouvriers de la théorie des phénomènes de synchronisation. Cette théorie n'est qu'un jeu pour un étudiant qui possède la notion des équations différentielles linéaires; je me suis proposé de la rendre plus simple encore et de la réduire à la simple géométrie de l'enfant. J'y suis parvenu par l'étude préalable du mouvement spiral uniforme; en projetant *en axes obliques convenables* ce mouvement, je généralise les théorèmes d'Huyghens relatifs au mouvement circulaire et j'établis ainsi d'une manière intuitive les propriétés du mouvement pendulaire uniformément amorti. (*Archives de Genève*, février 1904.)

Soit alors à étudier ce que devient ce mouvement, quand il est troublé par une accélération périodique. Nous supposerons d'abord celle-ci répartie en phases d'intensité constante en nombre fini, une variation brusque existant alors en l'in-

stant où se touchent deux phases contiguës ; soit T la période de cette répartition périodique. Je fais alors usage de la représentation de Cornu qui définit à chaque instant l'état de mouvement (position et vitesse) d'un point mobile sur une droite qui contient les pôles des diverses spirales utilisées, au moyen d'un point de la spirale qui a le premier pour projection oblique. Les points M_0, M_1, M_2, .. M_n représentatifs de l'état du mouvement envisagé aux époques t_0, t_0+T, t_0+2T, .. t_0+nT .... dérivent, chacun du précédent, *par une même transformation* de figure, savoir : une similitude directe avec coefficient constant de condensation ; or il est extrêmement facile de voir que cette transformation de figure possède un point double P, c'est-à-dire un point P qui coïncide avec son transformé, d'où résulte évidemment que la transformation se réduit à une rotation fixe autour de P suivie d'une homothétie déterminée autour du même point P, mais avec condensation, les points M_n tendent donc vers P quand n croît indéfiniment.

Chacune des valeurs de t_0 comprise dans une durée fixe d'étendue T fournit ainsi un point P ; cet ensemble de points P forme une courbe fermée qui est la courbe représentative du régime périodique vers lequel tend asymptotiquement le mouvement réel.

Comme ces résultats sont complètement indépendants de la succession des phases de constance de la force synchronisante *on conçoit aisément*, et cela suffit ici, qu'ils doivent persister dans le cas d'une force périodique absolument quelconque et de période T. Telle est la méthode géométrique qui permet à des étudiants ouvriers de se rendre compte du phénomène de synchronisation au moins dans le cas le plus simple, — celui où l'on néglige l'influence de l'échappement propre à l'horloge synchronisée.

C'est l'approximation de Cornu ; — je l'ai d'ailleurs complétée d'autre part.

Je me suis étendu un peu sur cet exemple pour ne point rester dans les vagues généralités, mais il est encore d'autres notions que l'image géométrique rend accessibles à des étudiants artisans ; telles sont les méthodes d'approximations successives et avec elles la belle méthode d'intégration par

quadratures répétées en série que l'on doit à M. Picard, ces méthodes, dis-je, convenablement interprétées et surtout utilisées pour un problème défini sont facilement assimilables. Notons en passant que la méthode de M. Picard fournit ainsi *directement* les séries entières de sin$x$ et cos$x$, et que cette méthode peut être employée utilement avec la méthode projective d'Huyghens.

Je crois donc pouvoir nettement affirmer que la notion des infiniment petits n'offre aucune difficulté capable d'arrêter nos artisans toutes les fois qu'elle est appliquée à des variables qu'ils connaissent bien. Mais en revanche tout calcul abstrait et littéral les arrête; résoudre deux équations du 1[er] degré à 2 inconnues sera pour eux bien plus difficile que de comprendre le phénomène de la synchronisation.

Voilà un fait pédagogique qui surprendra peut-être; mais j'en garantis l'absolue exactitude. Ce fait tient uniquement selon moi, à ce que l'algèbre élémentaire est enseignée à l'école professionnelle comme on l'enseigne à des élèves qui ont des années de collège devant eux : on leur parle de monômes, de binômes et d'irrationnelles, ce sont choses qu'ils ne voient pas à l'atelier.

Au contraire, si on leur montre que toutes les opérations arithmétiques se ramènent à l'addition et au sectionnement, bref si la notation littérale leur est rendue familière dès leurs premiers pas dans l'arithmétique raisonnée, et si aussitôt par l'image des segments on leur fait concevoir le calcul des *quantités continues*, leur terreur du calcul littéral abstrait s'évanouira.

A des étudiants horlogers, qui n'ont pas de culture mathématique préalable, vous pourrez faire saisir quelques lois de la dynamique de la montre, c'est-à-dire du réglage ; c'est que nos étudiants connaissent déjà les variables qui apparaissent d'elles-mêmes dans le calcul; ils les connaissent et ils sont désireux de comprendre leurs relations; aussi suivront-ils attentifs tout raisonnement même long pourvu que celui-ci conserve les quantités auxquelles ils s'intéressent directement.

Leur attention ne lâche prise que si, par ce qui vous paraît

un besoin du calcul, vous introduisez des quantités auxiliaires.

Le changement abstrait de variables les déroute ; ils voudraient toucher la variable nouvelle aussi bien que la première qui leur est familière.

Lorsque l'étudiant artisan ne sent pas la nécessité de se remettre à l'école d'un bon maître d'algèbre ou lorsqu'il n'en a pas le temps, et s'il veut néanmoins comprendre la théorie d'un phénomène qui l'intéresse, bref s'il veut comprendre une loi qui ne peut être claire que dans la langue du calcul, nous devrons l'intéresser à un calcul littéral nécessaire par des exemples où entrent en jeu des variables familières, et peu à peu lui faire sentir que la multiplicité des étapes du calcul, peut être évitée le plus souvent par l'emploi d'un symbole approprié.

IV. — Quelques conclusions.

En résumé, si le collégien a plus de loisirs et aussi plus d'esprit d'imitation, l'étudiant artisan a sur le collégien le grand avantage de connaître les variables fondamentales qui l'intéressent, il les connaît, soit par le toucher, soit par cette intuition motrice dont Herbert Spencer a saisi toute l'importance : il emploie pour ainsi dire des variables vécues par lui.

Si le collégien a une certaine philosophie apparente, officielle, oserai-je dire, des notions scientifiques, l'élève ouvrier a en germe plus de philosophie naturelle et vécue.

Et voilà pourquoi il est possible, avec une géométrie à la fois très simple et profonde — une géométrie dont l'instinct de la Mécanique n'est jamais absent, voilà, dis-je, pourquoi il est possible à des étudiants ouvriers de se faire une philosophie naturelle bien supérieure à celle de nos bacheliers.

Et voilà aussi pourquoi je ne crains pas de souligner ici l'importance de ces « Mathématiques de l'ingénieur ».

Importantes d'abord par leur but d'utilité immédiate, elles seront encore plus appréciées dans l'avenir, car elles finiront bien, un jour ou l'autre, par simplifier l'enseignement

même de nos bacheliers qui est vraiment d'une anharmonie exagérée.

A cette œuvre de progrès contribuera ainsi, sans le vouloir, cet enseignement des mathématiques de l'ingénieur, s'il sait garder son originalité propre, jusqu'au jour où il réagira sur la pédagogie mathématique imposée à nos enfants.

Jules ANDRADE (Besançon).

LES DÉFINITIONS MATHÉMATIQUES[1]

Une définition mathématique est une égalité logique dont le premier membre est le terme à définir, et dont le second membre est composé de termes connus (soit déjà définis, soit admis comme indéfinissables). Il s'ensuit que le terme à définir ne peut figurer dans le second membre, c'est-à-dire servir à se définir lui-même ; la violation de cette règle constitue le cercle vicieux dans les définitions. Le premier membre s'appellera le *défini* et le second membre le *définissant*[2].

La définition est une égalité logique, disons-nous ; elle n'est cependant pas une proposition, car elle n'est ni vraie ni fausse. Le terme à définir est, par hypothèse, dénué de sens avant d'être défini (ou dépouillé du sens plus ou moins précis que l'usage lui attache) ; il n'a de sens qu'après et par la définition. On ne peut donc ni affirmer ni nier l'égalité logique du défini et du définissant ; on peut refuser de l'admettre, voilà tout. C'est en ce sens que les définitions sont dites libres ou même arbitraires ; on veut dire par là qu'elles

[1] Le present travail est entièrement inspiré par les travaux et les théories des logiciens modernes, notamment de M. Peano et de son école. Ces théories sont résumées dans notre *Manuel de Logistique* (en préparation). En attendant, nous nous permettrons de renvoyer le lectenr à nos articles sur *Les principes des Mathématiques*, dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* (janv. 1904 et nos suivants).

[2] Nous proposons cette expression au lieu du mot *définition*, qui serait équivoque, puisqu'il désigne déjà l'égalité du défini et du définissant. Les mathématiciens appellent souvent le définissant la *valeur* du défini ; mais ce terme est équivoque, car il désigne aussi les entités constantes qu'on substitue aux variables.

sont indiscutables et irréfutables ; on ne peut les apprécier que par des raisons de commodité, de convenance et d'usage. Dès qu'on se réfère à l'usage, c'est-à-dire au sens habituel conféré à tel terme, la définition n'est plus libre ; mais aussi ce n'est plus une définition, c'est une proposition, qui consiste à affirmer que le sens habituel de tel terme est bien le sens indiqué dans le second membre (par le *définissant*) ; cette proposition peut être vraie ou fausse, et peut être légitimement contestée, au moyen d'exemples et d'autorités. Les propositions de ce genre s'appelaient dans la logique classique *définitions de choses* ou *d'idées*, par opposition aux *définitions nominales* ou *de mots*. Les considérations précédentes nous permettent d'affirmer que toute définition proprement dite est une définition nominale. C'est d'ailleurs ce que confirme l'exemple et l'usage constant des mathématiques.

Bien qu'une définition ne soit pas une proposition, elle ne laisse pas de jouer exactement le rôle d'une proposition ou plus exactement d'une égalité logique dans tous les raisonnements. En effet, le terme défini n'a, en principe, pas d'autre sens que le définissant ; si donc il peut et doit figurer dans les raisonnements, c'est uniquement avec le sens du définissant, et par suite on peut, partout où il figure, lui substituer le définissant. Telle est la raison de cette grande règle de méthode, qu'on peut toujours substituer le définissant au défini ; règle qui est d'ailleurs la raison d'être des définitions : car ce ne serait évidemment pas la peine de définir un terme, si l'on ne devait jamais tenir compte de sa définition. Non seulement on peut substituer le définissant au défini, c'est-à-dire employer la définition comme une égalité logique quelconque, mais encore on peut en tirer une conséquence logique quelconque et employer celle-ci dans les déductions. Une telle conséquence est ce qu'on appelle une proposition *vraie par définition*. Il est assez paradoxal qu'une définition, qui n'est pas une vérité, puisse engendrer des vérités. C'est que, si l'on est libre de donner à tel terme tel sens qu'on veut, on n'est plus libre, une fois ce terme défini, de changer ou même d'ajouter quoi que ce soit au sens que lui confère la définition.

Il y a plus : pour démontrer une proposition quelconque portant sur un terme défini, il est recommandé de lui substituer son définissant. Et en effet, le défini n'existe, logiquement, que comme l'équivalent de son définissant. Si donc il possède une propriété ou une relation quelconque, c'est uniquement en vertu de sa définition, et par conséquent il est naturel de se reporter à celle-ci pour trouver la raison de cette propriété ou de cette relation.

Inversement, on peut toujours substituer le défini au définissant, puisque, en vertu de leur égalité logique, ils ont absolument le même sens. Le défini est, en général, un terme simple, par suite plus court et plus maniable que son définissant. C'est même là tout l'avantage des définitions ; c'est de permettre de substituer des termes simples à des termes plus ou moins complexes, et d'abréger ainsi, non seulement le langage et l'écriture, mais la pensée[1]. En effet, une fois qu'on a démontré certaines propriétés du terme défini (en se référant au définissant), on est dispensé de refaire les mêmes déductions et transformations, et l'on n'a qu'à retenir l'énoncé du théorème pour l'appliquer en toute occasion. Or, dans cet énoncé, le terme défini représente et remplace le définissant plus complexe ; il figure une combinaison d'idées faite une fois pour toutes, et qui doit se retrouver intégralement toutes les fois qu'on aura à appliquer le théorème. Il est donc indiqué de substituer le défini au définissant, pour mieux voir dans quels cas apparaît la combinaison en question, et pour en apercevoir tout de suite la présence. En un mot, il y a lieu de substituer le définissant au défini lorsqu'on veut remonter aux principes d'une proposition ; et, au contraire, le défini au définissant, lorsqu'on veut en tirer des conséquences.

Le fait que le terme défini sert de substitut au définissant a donné souvent à croire qu'il n'est rien de plus qu'un nom ou un symbole du définissant. Aussi beaucoup d'auteurs ont-ils considéré le défini comme un simple nom ; et cette opinion se reflète dans l'expression même de définition *nomi-*

[1] Leibniz disait : « Theoremata cogitandi compendia esse » (les théorèmes sont des résumés de pensée).

nale. Mais, si l'on y réfléchit, il est absurde d'établir une égalité logique entre un nom et un concept : un nom n'est jamais un concept, mais seulement le nom d'un concept. Si le premier membre d'une définition est un nom, le second doit aussi être un nom, par raison d'homogénéité ; et alors on devra dire que le défini et le définissant sont deux noms du même concept, le premier étant seulement plus simple que le second. Mais cette conception nominaliste est trop superficielle : car il reste à savoir pourquoi le même concept a deux noms, l'un simple et l'autre complexe. C'est que, en réalité, le concept lui-même est complexe ; sa complexité, c'est-à-dire la manière dont il est composé d'autres concepts, est exprimée par le définissant, et son unité est figurée par le défini, c'est-à-dire par le nouveau nom qu'on lui impose pour conserver et sceller en quelque sorte la combinaison de concepts qui lui a donné naissance. Dans cette conception, les deux membres de la définition ne sont pas des noms, mais des concepts, ou plutôt *le même* concept, considéré tantôt dans son unité, tantôt dans sa complexité ; et l'égalité logique exprime précisément cette identité du concept. Ainsi la définition qui, au point de vue du nominalisme vulgaire, semble n'être que l'imposition d'un nom à un concept, et qui, au point de vue du nominalisme systématique, semble n'être que l'équivalence d'un nom à un assemblage de noms, est en réalité la construction d'un concept, dont le nom ne fait que symboliser l'identité [1].

Quoi qu'il en soit, il est toujours permis de substituer le définissant au défini partout où celui-ci figure. Il en résulte qu'aucune définition n'est indispensable théoriquement, bien qu'elle puisse être pratiquement utile et commode. On peut se passer d'une définition, à la condition de remplacer partout le défini par le définissant ; et par suite on peut (théoriquement) se passer de toutes les définitions, si l'on ne

---

[1] Peu importe, d'ailleurs, qu'au point de vue psychologique la définition corresponde à l'analyse d'un concept *preexistant* plutôt qu'à la construction d'un concept nouveau : les deux opérations, psychologiquement différentes, sont semblables au point de vue logique. L'une consiste à passer du premier membre au second, l'autre à passer du second membre au premier. Mais leur égalité logique subsiste et est toujours la même, car elle est symétrique. D'ailleurs, un concept n'existe en logique qu'une fois qu'il est *construit*, que sa construction ait été, ou non, précédée d'une analyse logique portant sur un concept préexistant.

recule pas devant la complication extraordinaire que cela entraînerait dans l'énoncé des propositions[1]. Il en résulte cette vérité, paradoxale au premier abord, que les définitions ne font pas partie de l'enchaînement logique des propositions, puisque ces propositions pourraient se démontrer de même en l'absence des définitions. Et cela se comprend, puisque les définitions ne sont pas des *vérités*, mais des abréviations d'idées : elles ne servent nullement de principes ni de fondement à la vérité des propositions. Cette remarque a une autre conséquence curieuse : c'est que toutes les propositions d'une théorie déductive peuvent être considérées comme portant, en définitive, sur les seules notions indéfinissables de la théorie, car si, dans leur énoncé, on remplaçait tous les termes définis par leurs définissants, il n'y resterait que des termes indéfinissables. Par exemple, si l'on peut définir tous les termes de la géométrie en fonction de deux indéfinissables, le *point* et le *segment*, tous les théorèmes de la géométrie que l'on pourra démontrer seront des propositions concernant les points et les segments, quelle que soit la complication des termes dérivés qui figurent dans leur énoncé usuel. Cette remarque est l'analogue exacte de la suivante, qui est banale : à savoir que toutes les propositions d'une théorie déductive sont des conséquences logiques des propositions premières, de sorte que toute la théorie est contenue et résumée dans celles-ci, et que sa vérité dépend entièrement et uniquement de la vérité de ses propositions premières.

Toute proposition qui contient un terme défini doit en général pouvoir se démontrer par la substitution du définissant au défini. Par conséquent, les propositions premières d'une théorie doivent porter sur les notions premières de cette théorie. Définir les notions premières, c'est donner le moyen de démontrer les propositions premières. Il y a donc une corrélation intime entre le système des notions premières et celui des propositions premières. On ne peut pas ré-

[1] « Cette suppression d'un signe défini est un exercice très utile... pour vérifier l'exactitude d'une définition : si l'on n'arrive pas à remplacer partout le signe défini par sa valeur, on déduit que la définition n'est pas énoncée en forme exacte. » G. PEANO. *Formulaire*, 1903, p. 12.

duire l'un sans réduire l'autre, ni changer l'un sans changer l'autre [1].

L'égalité logique qui exprime la définition doit être complète et intelligible par elle-même. Par conséquent elle doit être entièrement rédigée en symboles logiques, car si on est obligé de lui adjoindre une explication verbale, on ne peut plus savoir exactement quelles notions on fait intervenir, à cause des équivoques et des sous-entendus qu'implique toujours le langage. Elle doit en outre vérifier la *loi d'homogénéité*, c'est-à-dire que les deux membres doivent renfermer les mêmes variables *réelles* [2]. Pour nous rendre compte de cette exigence, il convient de préciser les divers cas possibles. Le terme défini peut être, soit un terme constant (comme les nombres 0, e, π), soit un concept ou une classe (comme : nombre entier, nombre rationnel, nombre réel), soit une relation entre deux ou plusieurs termes. Dans le premier cas, il ne contient aucune variable ; dans le deuxième, il en contient une (l'élément variable de la classe) ; dans le troisième, il en contient deux ou plusieurs. Or il est évident que les deux membres d'une définition ne peuvent contenir des variables *réelles* différentes ou en nombre différent : on ne peut définir une fonction logique qu'au moyen d'une fonction des mêmes variables réelles, car autrement son sens dépendrait d'une variable que, par hypothèse, elle ne contient pas, c'est-à-dire dont elle ne dépend pas. Par conséquent, lorsque le terme à définir est constant (c'est-à-dire représente un individu), le défini doit être constant ; il doit commencer par le signe ι qui marque l'individu.

Par exemple, soit à définir le zéro arithmétique.

On ne peut pas écrire :

$$x + 0 = x$$

car le premier membre est $x + 0$, et non pas 0 ; cette éga-

[1] Bien entendu, les propositions premières peuvent contenir des notions définies, mais elles doivent, dans leur ensemble, contenir toutes les notions non définies, car autrement celles-ci ne pourraient pas figurer dans les propositions dérivées.

[2] G. Peano, *Sur les définitions mathématiques*, ap. *Bibliothèque du Congrès de Philosophie*, t. III (Paris, Colin, 1901). Une variable (logique) est dite *réelle*, dans une formule logique, lorsque le sens de cette formule dépend de la valeur qu'on assigne à cette variable. Dans le cas contraire, la variable est dite *apparente*.

lité ne pourrait définir que $x + 0$, mais non pas 0 tout seul. Il faut donc isoler 0 dans le premier membre.

On ne peut pas écrire non plus :

$$0 = x - x$$

car on ne sait pas ce qu'est le terme x ; ni :

$$n \varepsilon \mathrm{N} . \supset . 0 = x - x$$

car le second membre contient la variable x, et l'on ne sait pas si sa valeur ne dépend pas de cette variable. Il faut démontrer que la valeur de $x - x$ ne dépend pas de x :

$$x, y \varepsilon \mathrm{N} . \supset . x - x = y - y$$

et alors on pourra écrire la définition véritable :

$$0 = \iota z \ni (x \varepsilon \mathrm{N} . \supset_x . z = x - x) \qquad \mathrm{Df}$$

« Zéro est le nombre z tel que $z = x - x$, quel que soit le nombre x ». Le second membre est constant, car la variable z est apparente ; et il est individuel, car si $z\ni$ est une classe, le théorème précédent prouve que c'est une classe singulière, de sorte qu'on a le droit de la faire précéder du signe ι.

Soit maintenant à définir un concept de classe, c'est-à-dire une fonction logique à une variable. On pourra mettre cette fonction sous la forme explicite $x \varepsilon a$, a étant la classe à définir ; et le définissant sera une fonction implicite de la seule variable réelle x, soit φx. La définition aura la forme

$$x \varepsilon a . = . \varphi x \qquad \mathrm{Df}$$

On peut isoler le terme a dans le premier membre en opérant par $x\ni$; on a la nouvelle forme :

$$a . = . x \ni \varphi x \qquad \mathrm{Df}$$

qui est la plus fréquente. Dans ce cas, la variable x n'est qu'apparente au second membre. Ainsi, quand le terme défini est une classe, le définissant doit être lui-même une classe (ce qui arrive, en particulier, quand il commence par $x\ni$). Exemple :

$$\mathrm{Np} = (1 + \mathrm{N}_1) - [(1 + \mathrm{N}_1) \times (1 + \mathrm{N}_1)] \qquad \mathrm{Df}$$

« Un nombre premier est un nombre supérieur à 1 qui n'est pas le produit de deux nombres supérieurs à 1. »

De même, pour définir une fonction (non propositionnelle) à une variable, on devra employer une fonction à une variable. Exemple :

$$a \varepsilon \mathrm{Q} - \iota 1 \,.\, x \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset .\ \log_a x = \rceil q \frown z \ni (a^z = x) \qquad \mathrm{Df}$$

« a et x étant des nombres réels positifs et a différent de 1, le logarithme de x, à base a, est le nombre réel z tel que $a^z = x$. » Le signe $\rceil$ suppose que le nombre z existe et est unique (pour une valeur déterminée de x), c'est-à-dire que la fonction log a est uniforme.

La même fonction $\log_a x$ peut être considérée, non plus comme une fonction de la seule variable x, mais comme une fonction des deux variables x et a. Dans un cas comme dans l'autre, la définition précédente sera homogène, puisque le définissant contient lui aussi les lettres a et x. La lettre z est une variable apparente, à cause du symbole $z \ni$.

De même, on définira la différence de deux nombres entiers comme suit :

$$a \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\, b \varepsilon a + \mathrm{N}_0 \,.\, \supset .\, b - a = \rceil \mathrm{N}_0 \frown x \ni (x + a = b) \qquad \mathrm{Df}$$

« a et b étant des nombres entiers, b supérieur à a, $b - a$ désigne le nombre entier x tel que $x + a = b$. » Le signe $\rceil$ suppose qu'on a démontré l'existence et l'unicité de x. Le terme défini $(b - a)$ est fonction de a et de b ; le définissant contient les mêmes lettres ; la lettre x est une variable apparente.

Enfin, voici un exemple d'une relation à deux termes, c'est-à-dire d'une fonction propositionnelle de deux variables :

$$a, b \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\, \supset : a \leqq b \,.=.\, b \varepsilon a + \mathrm{N}_0 \qquad \mathrm{Df}$$

« a, b étant des nombres entiers, dire que « a est inférieur ou égal à b », c'est dire que b est la somme de a et d'un nombre entier. » Ce qu'on définit ici, c'est la relation $a \leqq b$, c'est-à-dire le signe $\leqq$; a et b sont les termes variables de cette relation ; ils figurent également dans le définissant.

Voici maintenant des exemples de définitions vicieuses, qui

pèchent contre la loi d'homogénéité. On croit souvent pouvoir définir les fractions en posant :

$$a, b, c, d \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \supset : a/b = c/d . = . ad = bc$$

Or ce n'est pas là une définition des fractions a/b et c/d, mais tout au plus une définition de l'*égalité* de ces fractions. Encore faut-il remarquer que les termes de cette relation ne sont pas les fractions a/b, c/d, mais bien les quatre nombres entiers a, b, c, d ; car c'est eux qui figurent comme variables dans le définissant, et non pas les fractions a/b, c/d. L'exemple suivant montrera mieux la légitimité de cette distinction. On croit pouvoir définir le produit de deux fractions comme suit :

$$a, b, c, d \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \supset . (a/b) \times (c/d) = ac/bd .$$

Le premier membre est ou devrait être une fonction des deux fractions a/b, c/d, tandis que le second membre est une fonction des quatre termes. Pour prouver qu'une telle définition est incorrecte, supposons qu'on définisse comme suit une opération désignée par ? sur les fractions :

$$a, b, c, d \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \supset . (a/b)\, ?\, (c/d) = (a + c)/(b + d)$$

En vertu de cette définition : $(1/2)$? $(2/3) = (3/5)$, $(2/4)$? $(2/3) = (4/7)$;

Or, $1/2 = 2/4$, donc les deux résultats doivent être égaux :

$$3/5 = 4/7$$

ce qui est faux. On est arrivé à cette absurdité, parce qu'on a pris pour variable d'un côté la fraction comme un tout, et de l'autre côté ses termes. Au fond, il faudrait distinguer la fraction, comme ensemble de deux nombres entiers, du nombre rationnel qui en est la valeur, et qui est la valeur commune de toutes les fractions « égales ». Quand on dit : « la fraction 2/3 est irréductible », on ne peut pas en conclure : « la fraction 4/6 est irréductible », et pourtant elle est égale à la précédente. L'irréductibilité est une propriété de la fraction, et non du nombre rationnel qui est sa valeur. Or, quand on définit la somme ou le produit de deux fractions, on définit en réalité la somme ou le produit des nombres

rationnels correspondants. Il faut donc définir la somme et le produit de deux nombres rationnels x et y par une fonction de x et de y, et non par une fonction des termes des fractions qui leur correspondent, car ces termes ne sont pas fonctions des nombres rationnels : parler du « numérateur de x » ou du « dénominateur de x » n'aurait pas de sens [1].

Une définition définit en général une classe [2], à savoir la classe des objets qui possèdent les caractères ou propriétés indiqués par le définissant. D'ailleurs, tout concept étant représenté dans le calcul logique par son extension, on peut dire que sa définition détermine son extension. Or cette extension peut être quelconque ; autrement dit, la classe définie peut contenir un ou plusieurs individus, ou une infinité, ou aucun. Que ce dernier cas soit possible, c'est ce dont on se rendra compte, si l'on réfléchit qu'on peut (et que parfois même on doit) définir des concepts absurdes, quand ce ne serait que pour pouvoir raisonner sur eux et en prouver l'absurdité (exemples : le plus grand des nombres entiers ; une fraction égale à une fraction irréductible, et dont les termes soient respectivement inférieurs à ceux de celle-ci [3]). Or ce que l'on a en général l'*intention* de définir, c'est un objet existant et unique. Dans ce cas, il est nécessaire de démontrer (ou de postuler) que l'objet existe et qu'il est unique, c'est-à-dire, en termes de calcul logique, que la classe définie n'est pas nulle et qu'elle ne contient qu'un individu. Cette double proposition (*existence* et *unicité* de l'objet défini) peut parfois précéder la définition au lieu de la suivre ; mais, dans tous les cas, elle est indispensable pour qu'on puisse appliquer au terme en question le signe ℩, ou l'article défini *le*, qui suppose l'existence et l'unicité de l'objet. Par exemple, on peut définir le terme « parallèle menée à une droite par un point extérieur » ; il ne s'ensuit, ni qu'une telle parallèle existe, ni qu'elle soit unique. On démontrera (ou on postulera) son existence et son unicité, et alors, mais alors seulement, on

---

[1] G. Peano, *loc. cit.*

[2] C'est ce qui arrive, notamment, quand le définissant commence par $x \ni$.

[3] Euclide (IX, 20), pour prouver que le nombre des nombres premiers est infini, dit : Posons : $\partial\varepsilon$ = le plus petit commun multiple de tous les nombres premiers ; puis il démontre que $\partial\varepsilon$ n'existe pas.

pourra parler de « *la* parallèle menée à une droite par un point extérieur », car cette expression implique que cette objet existe et est bien déterminé.

Ainsi l'on ne peut jamais déduire d'une définition l'existence de son objet; il faut toujours démontrer celle-ci ou la postuler; et tous les théorèmes d'existence se démontrent au moyen de postulats existentiels[1]. Bien plus, on n'a pas le droit d'invoquer une définition, et de faire intervenir le terme défini dans un raisonnement, avant d'avoir prouvé qu'il existe; en effet, il s'agit ici de l'existence logique: un objet existe dès que sa notion n'est pas contradictoire, ou contraire à quelque autre loi logique. Or, comme Leibniz l'a déjà remarqué, d'une notion contradictoire ou absurde on peut démontrer tout ce qu'on veut, car on peut en déduire des propositions contradictoires[2]. C'est pourquoi le premier théorème qui suit une définition porte en général sur l'existence de l'objet défini.

Une autre conséquence de cette théorie est qu'on ne peut pas *créer* un objet par une définition. C'est une illusion fréquente chez les mathématiciens, de croire que les définitions sont créatrices, et qu'un objet quelconque existe *par définition*, par le seul fait qu'on l'a défini. Il suffit, pour la dissiper, de rappeler qu'on peut définir les notions les plus chimériques et les plus absurdes, et raisonner ensuite sur elles (pour en montrer l'absurdité, et par suite la non-existence de leur objet). C'est surtout dans la généralisation du nombre qu'on est tenté d'employer le procédé trop commode des définitions créatrices, de *poser* un symbole ou un ensemble de symboles, et de définir ses propriétés à coups de *conventions*. Cette méthode est d'autant plus contraire à la logique que, généralement, ces *conventions* ont pour effet de rendre possibles des opérations auparavant impossibles (retrancher un nombre d'un nombre plus petit, diviser un nombre par un autre qui ne le divise pas « exactement », extraire une racine d'un nombre qui n'a pas de racine), c'est-à-dire sont contradictoires avec les lois du calcul précédemment éta-

---

[1] V. *Les principes des mathématiques*, ch. VI : La géométrie.

[2] C'est même là une manière de prouver qu'une notion est contradictoire.

blies [1]. En général, il faut se défier des *conventions* en mathématiques : elles recouvrent trop souvent des sophismes ou tout au moins des pétitions de principe. Il n'y a rien de conventionnel en mathématiques (pas plus que dans aucune science logique et rigoureuse), en dehors des définitions ; et encore, la part de la convention s'y réduit-elle au choix du nom (qui n'est arbitraire qu'en théorie, mais qui pratiquement est le plus souvent dicté et presque imposé par l'usage ou par l'analogie). Aussi le mot de *convention* devrait-il être rayé du langage mathématique, dans l'intérêt de la rigueur logique, et nous dirions presque de la loyauté scientifique. Ce qu'on appelle *convention* est, ou bien une définition ou une imposition de nom, ou bien une hypothèse ou un postulat. Dans les deux cas, il est plus correct et plus précis d'employer ces dernières expressions. En dehors de ces deux cas, une convention ne peut être qu'un moyen d'éluder, soit une explication, soit une démonstration, c'est-à-dire un expédient sophistique ou paresseux [2].

Nous avons dénoncé plus haut le préjugé nominaliste, qui est le péché mignon des mathématiciens. Il consiste, en général, à croire ou à dire que les mathématiques n'opèrent que sur des symboles. Le bon sens objecte que des symboles sont toujours symboles de quelque chose, à savoir d'une idée ou d'un objet ; mais les mathématiciens mettent leur coquetterie à manier des symboles qui ne soient symboles de rien, c'est-à-dire en somme des signes vides de sens. A ce point de vue, ils diront qu'une définition consiste à poser l'équivalence d'un symbole nouveau et d'un système de symboles anciens ; et ils méconnaîtront ce fait que, par là même, on assigne au nouveau symbole un sens (représenté par le système des symboles anciens), c'est-à-dire qu'on le fait correspondre à un *nouveau concept* dont le définissant figure la composition et

[1] Une vive et juste critique des *définitions créatrices* a été faite par M. Frege en maint endroit, et notamment dans les *Grundgesetze der Arithmetik*, t. II (1903).

[2] Lorsqu'on assimile les lois mathématiques aux règles conventionnelles d'un jeu comme les cartes ou les échecs, on fait complètement abstraction de la *valeur de vérité* que possèdent les propositions, et par suite de leur valeur scientifique. Un coup d'échecs n'est pas une proposition ; il n'affirme rien et ne signifie rien. Il n'en est pas de même des formules mathématiques, de sorte que toute analogie tombe en défaut. Nous empruntons cette pensée, avec beaucoup d'autres, à M. Frege, qui est le plus rigoureux des mathématiciens-logiciens de notre temps.

la structure. En un mot, la définition consiste à former un nouveau concept, et à lui imposer un nom. Toutefois, moyennant cette réserve capitale, on pourra dire qu'une définition introduit un nouveau symbole dans le calcul, ou un nouveau nom dans le langage, et la considérer comme une simple imposition de nom ou une abréviation d'écriture; car si ce n'est pas tout, ni même l'essentiel, c'est du moins la moitié de la vérité.

Néanmoins, le préjugé nominaliste est si répandu et si ancré dans les esprits, qu'il doit avoir quelque raison d'être ou quelque excuse. Et en effet, comme toute erreur, il renferme une âme de vérité, que voici. C'est que, dans une théorie déductive, la vérité des propositions qu'on déduit des principes est indépendante du sens des notions premières. En effet, ces notions n'étant pas définies, leur sens intrinsèque n'intervient pas, *ne peut pas* intervenir dans les déductions; celles-ci reposent entièrement sur les propositions premières, qui établissent des relations extrinsèques entre les notions premières. Il en résulte que tout autre système de notions premières qui vérifiera les mêmes postulats vérifiera toutes les propositions qui en dérivent. On est ainsi amené à faire abstraction du sens des notions premières, à les réduire à des symboles vides de sens, et à considérer la théorie comme portant uniquement sur ces symboles. Une telle abstraction est légitime, au point de vue de la logique formelle, et ce n'est pas une erreur, tant qu'on ne nie pas l'existence des concepts que l'on néglige. Elle provient, on le voit, du caractère *formel* des déductions mathématiques; elles s'appuient exclusivement sur la forme des propositions, et ne dépendent en aucune manière de leur contenu conceptuel, c'est-à-dire de la nature des notions qui en seront les termes. Cela ne veut pas dire, évidemment, que chaque proposition, prise isolément, soit intelligible, quand on n'attribue à ces termes aucun sens particulier; mais seulement que leur enchaînement logique, leur relation de principe à conséquence, est indépendant du sens des termes, et subsiste lorsque ce sens varie, tout en continuant à vérifier les propositions premières. On conçoit donc une théorie mathé-

matique comme une pure forme de raisonnement, vide de contenu, où la place des notions est marquée par des symboles, et c'est ainsi qu'on aboutit à la considérer comme portant sur ces symboles. Ce qu'il y a de vrai, c'est que son contenu, toujours indispensable, et sans lequel elle n'aurait aucun sens, est indéterminé (dans certaines limites), et qu'elle peut s'appliquer à plusieurs systèmes de notions qui vérifient également ses principes [1]. Ces systèmes de notions sont alors considérés comme des *interprétations* diverses de l'ensemble des symboles non définis qui figurent dans les formules de la théorie; et c'est en ce sens qu'on peut dire qu'une théorie déductive est indépendante de l'interprétation qu'on donne à ses symboles non définis [2].

D'ailleurs, il est clair que, dès qu'on a choisi une interprétation pour les symboles non définis, le sens de tous les autres symboles se trouve déterminé par là même, puisqu'ils sont définis au moyen des symboles non définis. Mais il importe de se rendre compte des conséquences de cette conception *formaliste* des mathématiques : du moment qu'une théorie mathématique n'est qu'un ensemble de déductions formelles dont la vérité est indépendante de la matière à laquelle on les applique, elle n'est plus qu'une conséquence des lois logiques, et la mathématique ainsi conçue n'est pas autre chose qu'un prolongement de la logique formelle.

Louis Couturat (Paris).

---

[1] Pour bien comprendre cette distinction, il suffit de penser à une équation algébrique contenant plusieurs variables; cette équation peut être vraie pour certains systèmes de valeurs, et fausse pour les autres; mais elle n'a de sens (elle n'est vraie ou fausse) que si l'on assigne aux variables des valeurs déterminées, d'ailleurs quelconques. Si l'on n'assigne aucune valeur aux variables, l'équation n'est plus qu'une forme vide et insignifiante, le schéma d'une infinité de propositions possibles, où les lettres x, y, z ne font que marquer la place des termes indéterminés, mais ne la remplissent pas.

[2] Bien entendu, une théorie déductive, étant un système d'implications, est *toujours vraie*, même pour les interprétations qui ne vérifient pas ses principes, puisqu'une implication est vérifiée dès que son hypothèse est fausse. Mais on a l'habitude de ne considérer comme intéressants que les cas où les principes sont vérifiés, et alors, la théorie n'est vraie que si les conséquences sont aussi vérifiées.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sous ce titre nous publions les remarques et renseignements concernant plus ou moins directement l'enseignement mathématique, telles que des descriptions d'instruments ou d'appareils nouveaux, etc. Quant à la correspondance, elle permet à tout lecteur de présenter sous une forme rapide les idées qui lui semblent utiles, les remarques suggérées par la lecture d'un article, ou les questions sur lesquelles il aurait besoin d'un renseignement.

LA RÉDACTION.

Définition physique de la Force.

(A propos de l'article de M. Hartmann ; voir *L'Ens. math.* du 15 novembre 1904, p. 425-439.).

I. Lettre de M. E. MACH, professeur émérite de l'Université de Vienne. — Il était intéressant de connaître l'opinion de l'auteur de l'*Exposé historique et critique* du développement de la Mécanique[1]. Se plaçant précisément au point de vue du développement historique de la science, le savant professeur trouve les idées du colonel Hartmann très naturelles. « Ses idées, nous écrit-il, me paraissent très intéressantes. Elles n'ont pour moi rien de choquant, ni d'étrange. M. Hartmann montre, qu'à côté de la conception usuelle de force, on peut encore avoir recours à d'autres notions pour représenter les phénomènes dynamiques. Notre notion actuelle de force est due, en effet, à un simple hasard historique. Si, dans son étude de la chute libre des corps, Galilée avait envisagé la relation entre la vitesse de chute et le chemin parcouru et non pas sa relation avec la durée de chute, nos notions sur la Dynamique eussent pris une tout autre direction[2]. Je tiens à ajouter que notre conception actuelle de la force n'a rien d'incorrect. Les anciennes et les nouvelles conceptions seront simplement plus ou moins avantageuses suivant les différents problèmes auxquels on les appliquera. Pour terminer je ferai remarquer qu'*un* corps *seul* ne peut être caractérisé physiquement ; il faut lui adjoindre au moins encore un second corps, qui peut être représenté par l'un de nos sens. Ainsi la vitesse d'*un* corps isolé n'a pour moi pas de sens. C'est là le seul point sur lequel je ne suis pas d'accord avec M. Hartmann. »

---

[1] E. MACH, *La Mécanique : Exposé historique et critique de son développement.* Ouvrage traduit sur la quatrième édition allemande, par Em. BERTRAND. 1 vol. in-8°, librairie Hermann, Paris, 1904.

[2] Voir l'ouvrage cité, p. 242 et suivante.

II. — Un de nos lecteurs nous fait remarquer qu'il est intéressant de rapprocher la communication de M. Hartmann de la conférence faite, à peu près à la même époque, au Congrès international de St-Louis, par M. H. Poincaré sur *l'état actuel et l'avenir de la Physique mathématique*. Tandis que dans la première on trouve des considérations d'un grand intérêt sur la conception de la force, l'autre contient une revue critique des divers principes qui sont à la base de la Physique mathématique. Nous regrettons de ne pouvoir citer ici quelques passages de cette remarquable conférence : elle a été reproduite, *in extenso*, dans ta *Revue des Idées*[1] du 15 novembre 1904.

Une simplification dans l'enseignement des séries.

(A propos d'un article de M. Maur. Godefroy).

Permettez-moi, à l'occasion d'un intéressant article de M. Godefroy paru récemment dans *L'Ens. Math.* (juillet 1904), d'appeler l'attention de vos lecteurs sur un point de la théorie des séries uniformément convergentes. Les traités didactiques, après avoir défini cette notion, signalent naturellement le cas particulier des séries dont les termes sont respectivement moindres en module que des nombres positifs formant une série convergente ; mais aucun, à ma connaissance, n'établit ce fait que le cas général peut se ramener à ce cas particulier, au moyen de la proposition très simple que voici.

Adoptons pour la définition de la convergence uniforme la définition la plus large (celle que M. Dini appelle condition de convergence uniforme simple) : à $\varepsilon > 0$ et h entier correspond $n > h$ tel que le reste de la série arrêtée au n^{me} terme est inférieur en module à ε. Soit S la somme, S_p la somme des p premiers termes. Donnons-nous des nombres positifs décroissants $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \dots$ formant une série convergente ; nous pouvons déterminer des entiers croissants $n_0, n_1, n_2, \dots, n_i \dots$ tels qu'on ait, quel que soit i :

$$| S_{n_i} - S | < \alpha_{i+1}.$$

En posant : $U_0 = S_{n_0}$, $U_1 = S_{n_1} - S_{n_0}$, ... $U_i = S_{n_i} - S_{n_{i-1}}$, ..., on a, à partir de $i = 1$:

$$| U_i | = | S_{n_i} - S_{n_{i-1}} | < | S_{n_i} - S | + | S_{n_{i-1}} - S | < \alpha_{i+1} + \alpha_i < 2\,\alpha_i.$$

---

[1] *La Revue des Idées*, Etudes de critique générale paraissant le 15 de chaque mois ; Administration : 7, rue du 29 juillet, Paris.

Voir aussi le *Bulletin des Sciences mathématiques*, n° de decembre 1904.

Chaque expression U_i est la somme d'un nombre limité de termes consécutifs de la série donnée. Ainsi, par un groupement de termes consécutifs convenablement opéré dans cette série, on la remplace par une série $U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_i + ...$, dont les termes, à partir du second, sont inférieurs en module aux nombres (donnés *a priori*) $2\alpha_1, 2\alpha_2, ... 2\alpha_i, ...$.

Cette proposition, dont plusieurs auteurs se sont déjà servis, à la forme près, dans des mémoires scientifiques, me paraît mériter de prendre place dans l'enseignement élémentaire. Elle permet, lorsqu'on veut établir certaines propositions relatives aux séries uniformément convergentes les plus générales, de se restreindre, dans la démonstration, au cas particulier signalé. Les simplifications qui résultent de ce fait sont considérables dans certains cas, par exemple, comme l'indique M. Godefroy, dans la question de la dérivation des séries, traitée par lui d'après M. Stolz.

René Baire (Montpellier).

Suppression systématique du tracé de la ligne de terre en Géométrie descriptive.

Dans le Tome III de votre excellente Revue, p. 300, vous demandez quels sont les pays où l'on se borne, dans l'enseignement de la Géométrie descriptive, à n'employer que la direction de la ligne de terre, sans en fixer la position.

En Belgique, dès 1885, nous avons supprimé la position absolue de la ligne de terre, dans notre enseignement oral à l'École militaire, sans même connaître l'idée que M. Mannheim avait émise à ce sujet en 1882, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tellement l'idée est naturelle pour ceux qui font de la Géométrie descriptive en vue des applications aux travaux de l'ingénieur.

En 1892, fort d'une expérience déjà longue et concluante, nous nous sommes décidé à publier, pour le Livre I de la Ire Partie de notre Cours, une édition conforme en tous points à notre enseignement oral de cette époque. Les méthodes nouvelles suivies à l'École militaire, et en particulier, la suppression systématique de l'usage de la ligne de terre étaient ainsi rendues publiques : immédiatement après, l'enseignement de la Géométrie descriptive a été transformé à l'Université de Bruxelles (*Revue Universitaire*, 1892, p. 119) ; l'année suivante, M. Mansion a cru devoir nous critiquer, tout en nous permettant de défendre nos idées dans *Mathesis* (1893, pp. 40-45) ; depuis, les anciennes méthodes ont été abandonnées successivement dans presque tous les établissements d'enseignement moyen et à partir de 1900, le Gouvernement n'a plus donné que la direction de la ligne de terre dans les programmes de ses concours généraux (*Revue de Mathématiques spéciales*,

tome VI, p. 176; tome VII, p. 344 et tome VIII, p. 55); cette année enfin, l'Université de Louvain a littéralement calqué l'enseignement donné à l'École militaire, dans ses « Notes du Cours de Géométrie descriptive de l'Université catholique de Louvain », notes publiées sans nom d'auteur (Louvain, 1904).

On peut donc affirmer qu'en Belgique, l'évolution prévue en 1893 (*Mathesis*, 1893, p. 45) a été complète et rapide; nous pouvons ajouter qu'il en est résulté un progrès considérable, comme le prouvent annuellement, jusqu'à l'évidence, les examens d'entrée à l'Ecole militaire.

Signalons encore qu'en Portugal, le Cours de Géométrie descriptive de l'École polytechnique, publié en 1899 par L. P. da Motta PEGADO se borne à n'employer que la direction de la ligne de terre.

(*Les Mathématiques en Portugal au XIXe siècle*, par R. GUIMARAES, p. 77. Coïmbre, 1900.)

F. CHOMÉ (Bruxelles).

Une nouvelle régle à calculs.

La *règle à calculs circulaire* CH. CHARPENTIER, qui a été signalée aux lecteurs de cette Revue par M. H. LAURENT (Paris), vient d'être mise en vente, au prix de fr. 18.—, chez les principaux opticiens. On peut aussi l'obtenir directement en s'adressant à l'inventeur M. Ch. Charpentier, Ingénieur, à Valdoie-Belfort (France).

A propos d'un théorème sur le triangle.

Le théorème de M. Kariya publié dans notre numéro de mars 1904 (p. 130 à 132) et les intéressantes remarques qu'il a provoquées (p. 236-239, 406-411) nous en procurent encore de nouvelles que nous résumons ci-après.

VIII. — Lettre de M. BARBARIN (Bordeaux) :

Dans la note sur le théorème de M. Kariya, p. 238, le lecteur est prié de faire la rectification suivante :

ligne 16 : lire α'_1 et α'_2 au lieu de α_1 et α_2

ligne 17 : lire α_1 et α_2 au lieu de α'_1 α'_2

ligne 24 : lire $\frac{p-c}{p-b}$ au lieu de $\frac{p-b}{p-c}$

IX. — Lettre de M. CANTONI (Viadano, Mantova, Italie).

a) La proposition suivante admet comme cas particulier celui qui a été indiqué par M. KARIYA.

Si d'un point quelconque O du plan d'un triangle ABC, pourvu qu'il ne soit pas situé sur les côtés et ne coïncide pas avec l'orthocentre, nous abaissons sur les côtés les perpendiculaires OX, OY, OZ et nous prenons sur elles les points D, E, F tels que

$$OD : OE : OF = 1/OX : 1/OY : 1/OZ$$

les trois droites AD, BE, CF concourent en un point de l'hyperbole équilatère passant par le point O et par les trois sommets du triangle.

Il suffit observer que si, par exemple, A' et C' sont les points où se coupent ZO et BC, XO et BA, les quatre points X, Z, A', C' sont concycliques.

A l'aide de cette considération on peut aisément décrire par points l'hyperbole équilatère qui passe par quatre points donnés.

b) Le théorème de M. Franke que j'ai généralisé (*Enseig. Math.* p. 410, 1904) peut se démontrer plus rapidement en appliquant la propriété que deux figures homothétiques à une troisième sont homothétiques entre elles et les trois centres d'homothétie sont collinéaires. En effet, en se reportant à la figure et aux notations alors usées, on voit bientôt que le triangle $M_1M_2M_3$ est homothétique à $D_1D_2D_3$, qui à son tour est homothétique à $A_1A_2A_3$.

Peut-être est-il digne de mentionner le cas particulier où M coïncide avec le centre du cercle des neuf points : il fournit le corollaire :

Si sur les rayons du cercle des neuf points menés aux milieux des côtés, on prend trois points également distants du centre, les droites joignant ces points aux sommets respectivement opposés aux côtés auxquels sont menés les rayons concourent en un point de la droite de Euler.

c) La propriété des figures homothétiques que je viens de mentionner m'a fait parvenir à un théorème sur le triangle que, à ma connaissance, personne n'a encore énoncé. Soient X, Y, Z les pieds des hauteurs d'un triangle ABC et X', Y', Z' les milieux des côtés du triangle orthique XYZ. Soient encore K_1, K_2, K_3 les sommets du triangle formé par les tangentes au cercle circonscrit à A B C menées par A, B, C. On sait que le point de Gergonne du triangle $K_1K_2K_3$ est point de Lemoine du triangle fondamental ABC et que les trois triangles $K_1K_2K_3$, XYZ, X'Y'Z' ont les côtés respectivement parallèles de sorte qu'ils sont homothétiques.

Les droites AK_1, BK_2, CK_3 sont les symédianes du triangle ABC et passent par les milieux des côtés du triangle orthique qui sont respectivement antiparallèles aux côtés de ABC. Il s'en suit que le centre d'homothétie des deux triangles X'Y'Z' et $K_1K_2K_3$ est le point de Lemoine K du triangle A B C. Le centre d'homothétie de XYZ et X'Y'Z' est leur barycentre G et le centre d'homo-

thétie de XYZ et $K_1K_2K_3$ sera un point P situé sur la droite GK. Et puisque le barycentre de XYZ et le point de Gergonne de $K_1K_2K_3$ sont sur GK, le barycentre de $K_1K_2K_3$ et le point de Gergonne de XYZ se trouveront aussi sur la même droite. Nous aurons donc le théorème :

Le point de Lemoine d'un triangle est situé sur la droite joignant le barycentre de son triangle orthique au barycentre du triangle formé des tangentes au cercle circonscrit menées par les sommets. Sur cette droite sont situés aussi le point de Gergonne du triangle orthique et le point de concours des droites joignant les sommets du triangle formé par les tangentes aux pieds homologues des hauteurs du triangle fondamental.

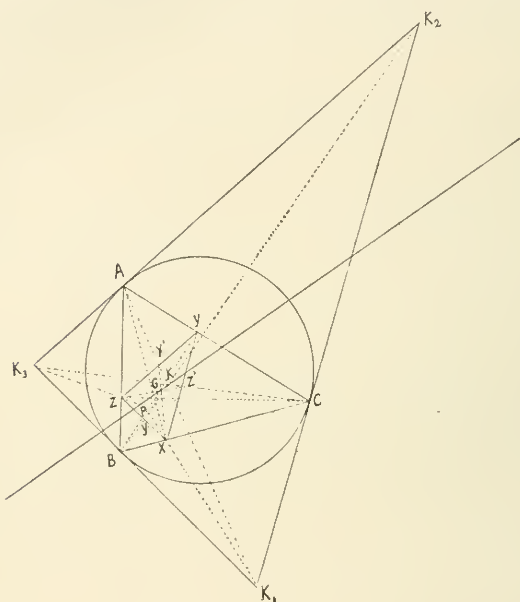


Fig. 1.

d) Soit encore ABC le triangle fondamental ; décrivons le cercle inscrit au triangle et touchant les côtés en A′, B′, C′ et décrivons d'un rayon arbitraire un autre cercle concentrique au premier qui coupe les côtés du triangle en D, D′, E, E′, F, F′. Il en résultera manifestement :

$$DA' = A'D' \quad EB' = B'E' \quad FC' = C'F'$$
$$AC' = AB' \quad BC' = BA' \quad CA' = CB'$$

et les couples de droites FE′ et F′E, DF′ et D′F, DE′ et D′E seront respectivement parallèles à C′B′, C′A′, A′B′. On peut considérer les six points D, D′, E, E′, F, F′ comme intersections des côtés du triangle fondamental avec les côtés du triangle PQR, ou bien de P′Q′R′ en désignant par P, Q, R, P′, Q′, R′ les points de rencontre des trois couples de droites que je viens de considérer.

Remarquons que les triangles FE'P, C'B'A', F'EP' sont deux à deux homothétiques, A étant le centre d'homothétie, et que par suite les points A, P, A', P' sont en ligne droite. De même on a la collinéation des points B, Q, B', Q' et C, R, C', R' et par conséquent les triangles PQR et P'Q'R' sont homothétiques à A'B'C', le centre d'homothétie étant au point de Gergonne G du triangle fondamental. Il est manifeste alors que les côtés de tout triangle homothétique à A'B'C', G étant le centre d'homothétie, détermineront sur les côtés du triangle fondamental six points situés sur un cercle concentrique au cercle inscrit. En particulier les trois parallèles aux côtés de A'B'C' menées par G détermineront le cercle de Adams.

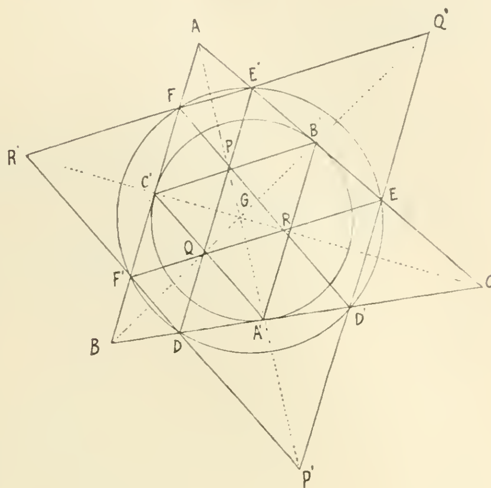


Fig. 2.

E. Cantoni.

X. — Lettre de M. Daniels (Fribourg, Suisse) :

1. M. G. Franke (*Ens. Math.* VI, p. 407-409) démontre le théorème suivant :

Si $D_1D_2D_3$ sont les milieux des côtés d'un triangle, M le centre du cercle circonscrit, les droites A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3 passent par un point de la droite d'Euler, pourvu que $M_1M_2M_3$ satisfassent aux conditions.

$$(D_1MM_1) = (D_2MM_2) = (D_3MM_3) .$$

Ce théorème n'est cependant qu'un cas spécial de celui-ci :

Si $D_1D_2D_3$ sont les milieux des côtés, P un point quelconque, les droites A_1P_1 ,A_2P_2, A_3P_3 passent par un point P' situé sur la droite qui relie le point P au centre de gravité G, pourvu que $P_1P_2P_3$ satisfassent aux conditions :

$$(D_1PP_1) = (D_2PP_2) = (D_3PP_3) \equiv \lambda .$$

La position du point P′ est déterminée par l'équation :

$$(\mathrm{GPP}') = \frac{2}{3}\lambda .$$

2. En effet, nous avons d'abord pour les milieux des côtés.

$$D_1 \equiv \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \qquad D_2 \equiv \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \qquad D_3 \equiv \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 .$$

et si le point P est

$$P \equiv x_1\mathbf{r}_1 + x_2\mathbf{r}_2 + x_3\mathbf{r}_3 ,$$

les points P_1, P_2, P_3 seront

$$P_1 \equiv -\frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{2} - \frac{\lambda(x_1\mathbf{r}_1 + x_2\mathbf{r}_2 + x_3\mathbf{r}_3)}{x_1 + x_2 + x_3} .$$

ou encore

$$P_1 \equiv -2\lambda x_1\mathbf{r}_1 + (x_1 + x_2 + x_3 - 2\lambda x_2)\mathbf{r}_2 + (x_1 + x_2 + x_3 - 2\lambda x_3)\mathbf{r}_3$$

etc. ; les droites A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3 passent donc par le point

$$P' \equiv (x_1 + x_2 + x_3 - 2\lambda x_1)\mathbf{r}_1 + (x_1 + x_2 + x_3 - 2\lambda x_2)\mathbf{r}_2 + (x_1 + x_2 + x_3 - 2\lambda x_3)\mathbf{r}_3$$

qui, si nous introduisons les vecteurs $\mathbf{r}_g$ et $\mathbf{r}_p$ du centre de gravité et du point P peut s'écrire :

$$P' \equiv 3\mathbf{r}_g - 2\lambda\mathbf{r}_p .$$

Il s'ensuit

$$(\mathrm{GPP}') = \frac{2\lambda}{3} .$$

3. Si l'on prend p. ex. pour P le centre du cercle inscrit

$$P \equiv a_1\mathbf{r}_1 + a_2\mathbf{r}_2 + a_3\mathbf{r}_3$$

et $\lambda = 1$, les transversales angulaires A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3 sont parallèles aux droites PD_1, PD_2, PD_3 et le point P′ devient

$$P' \equiv (a_2 + a_3 - a_1)\mathbf{r}_1 + (a_3 + a_1 - a_2)\mathbf{r}_2 + (a_1 + a_2 - a_3)\mathbf{r}_3$$

c. à. d. le point de Nagel. Il s'ensuit 1° que les transversales angulaires du point de Nagel N sont parallèles aux droites qui relient le centre du cercle inscrit I aux milieux des côtés. 2° que G, I et N sont sur une droite et 3° que $(\mathrm{GIN}) = \frac{2}{3}$. Si $N_1N_2N_3$ sont les autres points du groupe de Nagel et $I_1I_2I_3$ les centres des cercles exinscrits, on a de même

$$(\mathrm{GI_1N_1}) = (\mathrm{GI_2N_2}) = (\mathrm{GI_3N_3}) = \frac{2}{3} .$$

4. La relation $(\mathrm{GPP'}) = \frac{2\lambda}{3}$ ou $\frac{\mathrm{GP'}}{\mathrm{GP}} = \frac{2\lambda}{2\lambda - 3}$ nous prouve, que les figures décrites par les points correspondants P et P′ sont semblable, si λ est constant. Leur centre de similitude est alors G.

M. Fr. Daniels.

XI. — Lettre de M. C. Stolp (Kampen, Hollande) :

a) A propos de la lettre de M. Barbarin.

1. Le cercle circonscrit au triangle ABC et la conique L, lieu du point de Kariya, ont pour quatrième point d'intersection

$$x(r - \mathrm{R} \cos \mathrm{A}) = y(r - \mathrm{R} \cos \mathrm{B}) = z(r - \mathrm{R} \cos \mathrm{C}) ,$$

ce qui est aisé à vérifier.

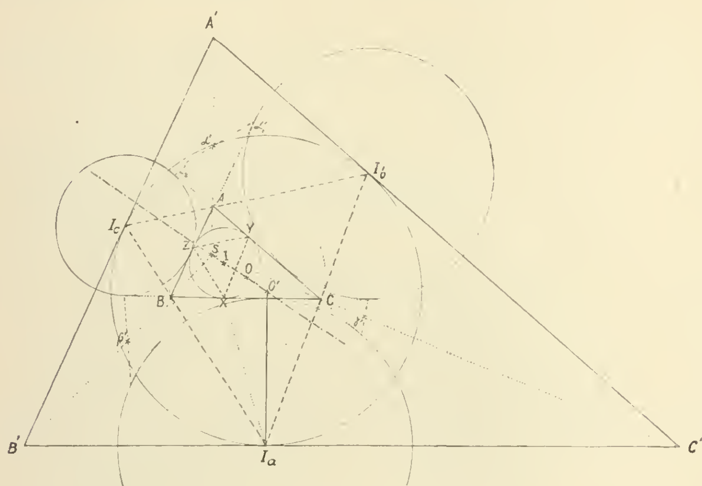


Fig. 3.

2. Comme nous verrons, on connaît depuis longtemps le point φ' de M. Barbarin. Nommons I, I_a, I_b, I_c les centres des cercles tritangents ; r, r_a, r_b, r_c leurs rayons ; XYZ les contacts du cercle inscrit avec BC, CA, AB ; O et O′ les centres des cercles circonscrits aux triangles ABC et $\mathrm{I}_a\mathrm{I}_b\mathrm{I}_c$; S le centre d'homothétie des triangles $\mathrm{I}_a\mathrm{I}_b\mathrm{I}_c$ et XYZ, g et g' leurs barycentres ; on sait que les points S, O′, g, g' se trouvent sur la droite IO (Voir : Casey, *A sequel to Euclid*, Suppl. Chapt. Sect. VIII, Tritangent circles). Considérons en particulier le point S.[1] Pour en trouver les coor-

[1] Le point S, notation de Casey, correspond au point φ', notation de M. Barbarin.

données trilinéaires, menons par I_a, I_b, I_c les droites B'C', C'A', A'B' parallèles à BC, CA, AB. Les trois droites (en même temps tangentes au cercle $I_aI_bI_c$) déterminent un triangle A'B'C' homothétique avec ABC par rapport au centre S. Les coordonnées y', z' du sommet A' étant $-r_b$, $-r_c$, la droite AA' a pour équation

$$\frac{y}{r_b}=\frac{z}{r_c} \quad \text{ou} \quad \frac{y}{\operatorname{tang}\frac{B}{2}}=\frac{z}{\operatorname{tang}\frac{C}{2}}.$$

On en conclut que les droites AA', BB', CC' concourent au point

$$\frac{x}{\operatorname{tang}\frac{A}{2}}=\frac{y}{\operatorname{tang}\frac{B}{2}}=\frac{z}{\operatorname{tang}\frac{C}{2}},$$

inverse du point φ (page 238), et l'on observe que les points φ' et S sont identiques.

b) A propos de la lettre de M. HAROLD HILTON (page 237).

M. Hilton remarque que les triangles ABC, DEF sont réciproques par rapport à une circonférence de cercle. Il s'ensuit qu'on peut regarder comme donné *l'un ou l'autre* des deux triangles.

Si l'on choisit DEF pour triangle de référence, k étant le rayon de son cercle circonscrit, et qu'on désigne par ξ, η, ζ les distances d'un point quelconque aux côtés EF, FD, DE, on trouvera que la droite AD a pour équation

$$\eta(k\cos F\cos D+r\cos E)=\zeta(k\cos D\cos E+r\cos F)$$

et que AD, BE, CF, passent par le point P

$$\xi(k\cos E\cos F+r\cos D)=\eta(k\cos F\cos D+r\cos E)=\zeta(k\cos D\cos E+r\cos F).$$

En faisant $r=0$, $r=\infty$, $r=k$ le point P coïncide avec les points suivants du triangle DEF : le centre O du cercle circonscrit, l'orthocentre H, le point de Lemoine K. Supposons les points D, E, F fixes ; si l'on fait varier r le point P décrit une conique qui, passant par les sommets du triangle DEF et par son orthocentre, est une hyperbole équilatère. Son inverse est la droite d'Euler qu'elle coupe aux points H, O.

C. STOLP.

XII. — La Géométrie du triangle est une mine inépuisable de constructions et de propriétés des plus intéressantes. Les lettres qui nous sont adressées à propos de l'article de M. Kariya le prouvent suffisamment. Nous devons nous borner à mentionner

encore les lettres de MM. Ant. Pleskot (Pilsen) et Aug. Tafelmacher (Santiago du Chili).

M. Pleskot fait intervenir le triangle $A_1B_1C_1$, polaire réciproque du triangle ABC par rapport à une conique arbitraire. Il prend ensuite pour conique un cercle de centre O; puis envisageant pour O quelques positions particulières, il obtient quelques propriétés très simples et les propriétés corrélatives en vertu du principe de Dualité. L'une de ces propriétés est précisément celle qu'exprime le théorème énoncé par M. Kariya.

M. Tafelmacher nous signale une Note *sur les coordonnées homogènes obliques*, destinée à la *Zeitschrift f. math. u. naturw. Unterricht*, dans laquelle il donne une démonstration du théorème de Kariya. On y trouvera, entre autres, l'expression de la puissance de point K par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC.

La Rédaction.

CHRONIQUE

Paul Tannery.

Les sciences mathématiques et historiques viennent de faire une grande perte en la personne de M. *Paul Tannery*, directeur de la manufacture des tabacs de Pantin, décédé le 27 novembre dernier à l'âge de 61 ans. Sa mort subite a été une douloureuse surprise pour tous ceux qui l'ont connu et tout particulièrement pour ceux qui ont encore eu l'occasion de l'approcher au Congrès des mathématiciens à Heidelberg et au Congrès de philosophie et d'histoire des sciences à Genève.

Ancien élève de l'Ecole polytechnique de Paris, Tannery sortit dans le corps des ingénieurs des tabacs, où il suivit régulièrement la carrière, ce qui ne l'empêcha pas de rester en contact avec la science pure. Il consacra ses loisirs principalement à l'histoire des sciences et à la philosophie. D'une remarquable érudition pour tout ce qui touche à l'histoire des sciences, il était connu aussi bien des mathématiciens et des physiciens, que des hellénistes et des philologues. Il fut l'un des principaux organisateurs des congrès d'histoire des sciences. Ses travaux ont été publiés notamment dans le *Bulletin des sciences mathématiques*, l'*Archiv für Geschichte der Philosophie*, la *Revue de philosophie*, la *Revue des Etudes grecques*, la *Revue de Philologie*, et dans *Bibliotheca*

mathematica. Parmi les ouvrages mathématiques, on lui doit une *Géométrie grecque* (1887), et des *Recherches sur l'Histoire de l'Astronomie ancienne* (1893) ; il préparait une Histoire générale des sciences. Il y a lieu de mentionner sa collaboration très active à la publication des *œuvres de Fermat* et des *œuvres de Descartes.*

Tannery a appartenu à l'enseignement supérieur, à deux reprises, d'une façon temporaire, pour autant que ses fonctions d'ingénieur le lui permirent. Il donna, pendant deux ans, un cours libre à la Sorbonne sur l'Histoire de l'Arithmétique, et fut chargé de la suppléance de M. Ch. Lévêque, au Collège de France, pour la chaire de philosophie grecque et latine.

Paul Tannery était le frère de M. Jules Tannery, professeur à la Sorbonne et sous-directeur de l'Ecole normale supérieure de Paris.

H. Fehr.

Le Congrès international des Sciences ; St-Louis, Etats-Unis.

L'Enseignement mathématique[1] a déjà donné le plan général de ce congrès pour ce qui concerne particulièrement les sciences mathématiques. Nos lecteurs savent que les travaux mathématiques ont été répartis sur trois sections : 1° *Algèbre et Analyse;* 2° *Géométrie;* 3° *Mathématiques appliquées,* et que, dans chaque section il devait être présenté, outre les communications spéciales, deux rapports, l'un sur les liens entre la branche envisagée et les branches qui s'y rattachent, l'autre sur les problèmes de l'heure actuelle. Comme introduction aux séances de ses trois sections, le *département* des mathématiques a tenu une séance consacrée aux Rapports de M. Bocher[2] (Harvard) sur *les conceptions et méthodes fondamentales des mathématiques* et de M. Pierpont[2] (Yale) sur *l'Histoire des mathématiques pendant le XIXe siècle.*

Voici quelques indications, très incomplètes faute de renseignements suffisants, sur les rapports présentés aux séances de section.

Les deux Rapports de la section *d'Algèbre et Analyse* ont été rédigés par MM. E. Picard (Paris) et Maschke (Chicago). Celui de M. Picard a pour titre : *Sur le développement de l'Analyse mathématique et ses rapports avec quelques autres Sciences*[3].

Les Rapports de la Section de *Géométrie* ont été présentés par MM. Darboux (Paris) et Kasner (Columbia Un., New-York). Le Rapport de M. Darboux est intitulé : *Etude sur le développement des méthodes géométriques*[4].

---

[1] Voir 6me année, p. 58 et p. 310.

[2] Ces deux rapports ont été reproduits in-extenso dans le *Bull. of the American math. Society,* vol. XI, N° 3, decembre 1904.

[3] Reproduit in-extenso dans le *Bull. des Sc. math.,* t. XXVIII, octobre et nov. 1904.

[4] Reproduit in-extenso dans le *Bull. des Sc. math.,* t. XXVIII, sept. 1904.

Quant aux rapports de la Section des *Mathématiques appliquées*, ils sont dus à MM. H. POINCARÉ (Paris) et BOLTZMANN (Vienne). Ainsi que nous le disons d'autre part, la conférence de M. Poincaré a été publiée par la *Revue des Idées* (numéro du 15 novembre, Paris, 1904) ; elle est intitulée : *l'état actuel et l'avenir de la Physique mathématique*[1].

Grâce à l'obligeance de M. J.-W. YOUNG (Northwestern University, Evanston), nous pouvons donner un aperçu des travaux de la section d'*algèbre* et *analyse*.

LA RÉDACTION.

SECTION D'ALGÈBRE ET ANALYSE. — La première séance eut lieu le 22 septembre 1904, immédiatement après la séance commune aux trois sections. Elle débuta par un remarquable rapport de M. PICARD *sur le développement de l'analyse mathématique et ses rapports avec quelques autres sciences.* Il serait téméraire de vouloir résumer en quelques lignes cette brillante conférence très substantielle par le fond et d'une rare élégance par la forme. Nous en recommandons vivement la lecture. M. Picard jette d'abord un coup d'œil sur le développement de l'algèbre à travers les âges, il rappelle les idées nouvelles introduites au XVIIme et au XVIIIme siècles par les fondateurs de la géométrie analytique, de la science du mouvement et de l'analyse. Le XIXme siècle, qui fut caractérisé par l'introduction d'une plus grande rigueur scientifique, tient naturellement une grande place dans cet exposé. La conférence s'attache surtout aux relations de l'analyse avec la géométrie, la mécanique, la physique mathématique et fait ressortir l'influence que ces dernières sciences ont eue sur son développement. Les sciences chimiques, biologiques et économiques sont également prises en considération ; là encore M. Picard fait ressortir l'origine et la raison des liens qui unissent les sciences à l'analyse. « Il semble, dit-il, que la chimie soit sortie aujourd'hui de la méthode prémathématique, par laquelle débute toute science, et qu'un jour doive venir où s'ordonneront de vastes théories, analogues à celles de notre physique mathématique actuelle, mais bien plus vastes et comprenant l'ensemble des phénomènes physico-chimiques ».

Après cette belle conférence vint le Rapport de M. MASCHKE sur *les problèmes actuels de l'algèbre et de l'analyse.* Mais le conférencier s'est borné à un très petit nombre de problèmes. Il a d'abord donné un intéressant aperçu de l'état actuel du problème des invariants des formes quadratiques différentielles, et il a exposé sa propre notation symbolique pour les invariants différentiels, analogue à la notation des invariants algébriques. Le Rap-

[1] Se trouve également dans le *Bull. des Sc. math.*, t. XXVIII, déc. 1904.

port se termina par une table contenant les invariants différentiels connus dans leur notation symbolique et par un théorème donnant la condition pour qu'une expression symbolique soit un invariant différentiel, d'une manière analogue à ce qui existe pour les invariants algébriques.

Ces Rapports ont été suivis de *communications* d'une durée de dix minutes chacune. Nous ne pouvons en donner ici qu'un résumé très bref, pour autant qu'il est possible de le faire sans avoir eu le mémoire en main. Quelques résumés seront donc très courts sans que nous ayons l'intention de faire ressortir davantage l'une ou l'autre des communications.

1. — M. E.-V. Huntington (Harvard University) a présenté une série de postulats indépendants définissant l'*Algèbre des quantités réelles* et les groupes abéliens; ils semblent offrir certains avantages principalement au point de vue pédagogique.

2. — M. J. Hutchinson (Cornell University) dans son mémoire sur les *problèmes actuels de la théorie des fonctions automorphes* montre qu'il est désirable que l'on développe la théorie *arithmétique* des groupes discontinus des substitutions linéaires d'une variable.

3. — M. B. Porter (University of Texas) : *Sur les fonctions définies par une série infinie de fonctions analytiques*. Il s'agit d'une généralisation d'un théorème dû à Osgood. En l'absence de l'auteur le mémoire est présenté par M. Bôcher.

4. — M. E.-R. Hedrick (University of Missouri) demande une *généralisation de la notion de fonction analytique* que l'on obtiendrait en remplaçant la condition ordinaire par une autre équation aux dérivées partielles du second ordre; il estime qu'en se référant au plan non-euclidien, il sera possible de donner une interprétation géométrique de la nouvelle condition.

5. — M. W. Haskell (University of California) a présenté une série de propriétés *des collinéations perspectives*. Il a prouvé, entre autres, les théorèmes suivants : 1. Chaque collinéation dans l'espace à deux dimensions laissant invariable une conique, peut être représentée par deux collinéations perspectives. 2 Chaque collinéation est le produit de quatre collinéations perspectives. Puis il a présenté quelques généralisations relatives à l'espace à n dimensions.

6. — M. B. Shaw (Milliken University) fait un exposé de l'état actuel de la théorie de l'*Algèbre linéaire associative*. Le mémoire comprend trois parties : 1. Développement de la théorie; 2. Formes particulières; 3. Applications.

7. — M. G.-A. Miller (L. Stanford University) a adressé une Note sur la portée d'un théorème fondamental des groupes d'ordre p^m dans ses relations avec des problèmes actuels.

J.-W. Young.

Les mathématiques au IIe Congrès international de dessin à Berne ; août 1904.

Etant donné les liens intimes de la géométrie et du dessin géométrique et même du dessin technique tout entier, nous aurions pensé que les mathématiques seraient un peu plus en honneur au Congrès de Berne. Il en a, cependant, été quelque peu parlé dans deux conférences, mais fort peu dans les discussions générales. Les divers pays représentés avaient organisé des expositions dont quelques furent magnifiques ; mais, à part les collections françaises, le dessin mathématique tombait très à l'arrière-plan.

Conférence J.-J. Pillet. La première conférence, celle de M. J.-J. Pillet, inspecteur honoraire du dessin à Paris, avait pour objet le développement des méthodes d'enseignement du dessin géométrique et du dessin technique dans les écoles françaises. Le cours de M. Coquelet au Collège Rollin, à Paris, et celui de M. Bécourt au Lycée Saint-Louis, également à Paris, formaient le fond de la brillante causerie de M. Pillet. Tout ce qu'il nous a présenté, modèles muraux et collections, était très beau et tout ce qu'il nous a dit, plein de finesse et de bon sens. Il a quelque peu malmené les professeurs de mathématiques chargés de cet enseignement. Il leur reproche de faire, de ce cours, une annexe de la descriptive. M. Pillet ne veut pas que le dessin soit lié aux mathématiques ; ce sont deux branches qui doivent se suffire à elles-mêmes et qui peuvent quasiment vivre l'une sans l'autre. Il voudrait ne voir enseigner dans cette direction que des artistes connaissant à fond la technologie et préparant déjà des ingénieurs et des architectes dans l'enseignement secondaire général.

Conférence L. Crelier. Dans la deuxième conférence l'auteur de ces lignes a traité l'enseignement du dessin de projection dans les écoles suisses. J'ai déjà entretenu les lecteurs de l'*Enseignement mathématique*[1] de mes idées à ce sujet. Je me suis trouvé en opposition, amicale et courtoise, avec M. Pillet. Le dessin géométrique et le dessin de projection doivent aider l'enseignement des mathématiques, tout en se basant sur lui. Ils forment l'intuition et l'application de celles-ci. Ce sont des études parallèles qui ne peuvent que gagner à un contact journalier bien compris, à la condition évidente qu'aucune des deux n'absorbe l'autre. Le dessin doit se détacher des mathématiques à chaque instant, pour appliquer immédiatement les constructions géométriques à des modèles simples et nombreux tirés du monde technique. Contrairement aux vues de l'auteur précédent, nous estimons que la technologie doit être laissée aux écoles d'arts et métiers. L'enseignement général

---

[1] N° du 15 juillet 1904, p. 300 à 304.

doit se contenter de mettre les élèves à même de représenter exactement ce qu'ils voient et ce qu'ils peuvent comprendre dans les différentes directions techniques. C'est pour cela qu'on ne peut et qu'on ne doit pas aborder des constructions trop compliquées.

Séances ordinaires. Dans les séances ordinaires le dessin géométrique n'a pas donné lieu à de longues discussions. M. Kaiser, de La Chaux-de-Fonds, rapporteur sur la question du dessin dans l'enseignement secondaire, avait présenté diverses conclusions spéciales relatives au dessin mathématique, mais elles n'ont pas été adoptées. Le congrès s'en est tenu à des généralités. Les *conclusions* de M. Kaiser étaient :

1. Le dessin mathématique est enseigné dans les classes du degré secondaire, dès le moment où les élèves ont atteint l'âge de treize ans.

2. Le but de cet enseignement doit être de donner les connaissances générales sur tous les modes de représentation des objets par le dessin mathématique.

3. Dans le degré secondaire cet enseignement ne doit revêtir à aucun moment un caractère professionnel, mais préparer les élèves à leur entrée dans les écoles spéciales.

Suivant nous, toutes ces conclusions sont très logiques, sauf la fin de la troisième. L'enseignement secondaire ne prépare pas exclusivement aux écoles spéciales, mais il doit, en première ligne, donner les bases d'une bonne culture générale. Nous estimons donc que le dessin mathématique de ce degré ne doit pas être conçu comme première partie d'un cours spécial.

Le Congrès a adopté, pour le dessin dans son ensemble, à l'école primaire comme à l'école secondaire, le vœu que celui-ci devienne : « Evolutif, Réaliste, Général, Spontané et Esthétique ».

Signalons pour terminer une conférence magistrale de M. F.-J. Pillet, ingénieur à Paris : *Codification internationale des signes employés dans le dessin.* Ici encore les mathématiciens ont entendu des choses très intéressantes touchant toutes les applications de leur branche d'études. Le Congrès a du reste adopté ce superbe travail comme base d'une étude approfondie de la question.

L. Crelier (Bienne et Berne).

Congrès des mathématiciens allemands; Breslau, 1904.

L'Association allemande des mathématiciens a tenu sa dernière réunion annuelle à Breslau, du 18 au 24 septembre 1904, en même temps que le Congrès annuel des naturalistes et médecins allemands. Comme on pouvait s'y attendre, la participation a été moins forte que de coutume, en raison du 3e Congrès international qui avait eu lieu à Heidelberg quelques semaines auparavant.

A côté des communications mathématiques, au nombre de onze, la réunion de Breslau présenta un attrait tout particulier pour ceux qui s'intéressent à l'enseignement scientifique. Voici d'abord la liste des communications présentées :

1. Lampe (Berlin-Charlottenbourg) : Quelques exemples empruntés aux exercices du Calcul intégral faits à l'École technique supérieure de Charlottenbourg.

2. Gutzmer (Iéna) : Contribution à la théorie des équations différentielles linéaires et homogènes.

3. Kowalewski (Greifswald) : Sur une généralisation du second théorème de la moyenne dans le Calcul intégral.

4. Sturm (Breslau) : Sur les transformations crémoniennes pour lesquelles aux plans d'un espace correspondent des surfaces générales du 3e ordre de l'autre espace.

5. Pulfrich (Iéna) : *a)* Sur un nouveau mode de comparaison de photographies d'étoiles ; *b)* sur un appareil pour la mesure de la dépression de l'horizon ; *c)* Relevé stéréo-photogrammétrique des côtes, effectué sur un navire ; *d)* nouveau théodolite et photo-théodolite démontable.

6. Landsberg (Heidelberg) : Sur les analogies entre les théories des nombres algébriques et des fonctions algébriques.

7. Steinitz (Berlin-Charlottenbourg) : Représentation collinéaire de polyèdres trigonaux et l'analyse situs dans l'espace projectif.

8. Ludwig (Karlsruhe) : Contribution à la théorie des affinités cycliques.

9. Wiessner (Silésie) : Sur la possibilité de compléter la théorie de Kant-Laplace.

10. Franz (Breslau) : Formation de la surface lunaire.

11. Gutzmer (Iéna) : Contribution à la théorie des équations différentielles adjointes.

Conformément à une décision adoptée à la réunion annuelle précédente, sur la proposition de M. le prof. Klein, les sections scientifiques du Congrès des naturalistes et médecins allemands avaient à consacrer une séance commune aux *Rapports et débats sur l'enseignement des sciences mathématiques dans les établissements secondaires supérieurs* [1]. Quatre rapports ont été présentés :

1. K. Fricke (Brême) : *La position actuelle de l'enseignement des sciences naturelles et mathématiques dans les établissements secondaires supérieurs.* Le rapporteur se place à un point de vue tout à fait général et montre quelle est la position qui a été faite à l'enseignement scientifique dans les plans d'études adoptés en 1901. « Il ne s'agit pas, dit-il, d'envisager l'enseignement scientifique à un

[1] Voir les *Verhandlungen der Breslauer Naturforscher-Versammlung über den naturw. u. mathematischen Unterricht an den höheren Schulen*, herausgegeben von A. Wangerin. Verlag Vogel, Leipzig.

point de vue professionnel ou d'une façon étroite comme branche d'instruction, mais nous voulons considérer l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles au point de vue de l'instruction générale, en rapport avec la vie moderne et tel qu'il paraît désirable de le voir se développer, afin de permettre à la jeunesse d'aujourd'hui de contribuer à son tour aux progrès de la culture moderne. »

2. F. Klein (Göttingue) : *Remarques concernant l'enseignement des Mathématiques et de la Physique*. Le conférencier rappelle d'abord un certain nombre de publications dans lesquelles il indique ses vues sur l'enseignement des mathématiques. Nous nous bornerons à mentionner son récent mémoire *Sur une transformation, conforme aux besoins actuels, de l'enseignement mathématique dans les établissements secondaires supérieurs*, que nous avons déjà eu l'occasion de signaler. (*L'Enseignement mathématique*, 6e année, p. 389, numéro du 15 septembre 1904.) M. Klein demande que l'on introduise dans l'enseignement algébrique des classes supérieures, quelques notions de Calcul différentiel et intégral, afin de permettre à tous ceux qui ont suivi les établissements secondaires supérieurs de comprendre la portée générale des mathématiques dans les domaines les plus divers et d'en tirer parti. Parlant de la préparation du corps enseignant, le rapporteur estime qu'il est désirable que les professeurs obtiennent régulièrement des congés afin qu'ils puissent reprendre contact avec la science pure et ses applications.

3. M. Fr. Merkel (Göttingue) présente des *vœux concernant l'enseignement biologique*. Cet enseignement doit : 1° *apprendre à observer* ; 2° fournir les notions essentielles sur les fonctions du corps humain.

4. Le quatrième rapport, dû à M. G. Leubuscher (Meiningen), est consacré aux intérêts de l'hygiène, notamment de l'hygiène scolaire.

Ces rapports ont été suivis d'une discussion à laquelle ont pris part MM. Pietzker (Nordhausen), v. Borries (Berlin), Grimsehl (Hambourg), Schotten (Halle), Classen (Hambourg), Archenhold (Treptow), Rebmann (Karlsruhe), Klein et Mme Rabinowitsch. Ils serviront de base à une étude générale qui a été confiée à une commission de 12 membres.

La prochaine réunion annuelle aura lieu à *Meran* (Tyrol), en septembre 1905.

Association des maîtres de mathématiques des écoles moyennes suisses.

Le 17 décembre 1904 a eu lieu à Zurich, sous la présidence de M. le Dr E. Gubler, la réunion annuelle des maîtres de mathéma-

tiques des établissements secondaires supérieurs suisses. A l'ordre du jour figuraient, à côté des questions purement administratives, un rapport de M. le prof. H. Fehr sur *la notion de fonction dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes* et un rapport, présenté par MM. Gubler et Fehr, sur le *III*^me^ *Congrès international des mathématiciens.*

La conférence de M. Fehr sera reproduite dans un prochain numéro de cette *Revue ;* nous pouvons donc nous borner à donner un résumé très bref. Le conférencier a insisté sur *la nécessité qu'il y a d'introduire la notion de fonction dans les diverses catégories des écoles moyennes.* Il ne s'agit pas seulement de la représentation graphique des fonctions simples, mais de l'étude de leur variation à l'aide de la notion de dérivée ; cette notion doit être étudiée principalement en vue de ses applications fondamentales en géométrie analytique (problème de la tangente) et en cinématique (notion de vitesse). La question n'est du reste pas nouvelle et M. Fehr a rappelé les efforts qui se font actuellement dans ce sens en Allemagne, puis il a montré dans quelle mesure la notion de fonction est représentée dans les nouveaux programmes français. Après une intéressante discussion, à laquelle ont pris part MM. Wild (par une lettre datée de St-Gall), Scherrer, Küsnacht-Zurich, Brandenberger, Zurich, Suter, Kilchberg-Zurich, Butzberger, Zurich, Flatt, Bâle, Gubler, Zurich, Juzi, Bienne, et Fehr, les thèses proposées par le conférencier ont été adoptées à l'unanimité. L'assemblée a en outre exprimé le vœu que dans cette première initiation une large part soit accordée au développement historique, principalement dans les établissements classiques.

A l'occasion des propositions individuelles M. le prof. Otti, Aarau, a attiré l'attention de ses collègues sur la question suivante, qui pourrait être examinée dans une prochaine assemblée : Est-il désirable, dans l'enseignement géométrique des établissements secondaires supérieurs, de renoncer à la division sexagésimale de l'angle pour adopter la division décimale ?

Médaille Guccia.

Nous avons déjà annoncé qu'à l'occasion du IVe Congrès International des Mathématiciens, qui se tiendra à Rome en l'année 1908, le *Circolo Matematico di Palermo* décernera un prix international de Géométrie. Ce prix, qui sera appelé « médaille guccia » (du nom de son fondateur), consistera en une petite médaille portative en or et en une somme de 3000 francs. Voici les détails complets des conditions du concours d'après la circulaire arrêtée par M. Albeggiani, président du *Circolo Matematico :*

On sait que, depuis les travaux auxquels a donné lieu le prix Steiner décerné en 1882, la théorie des courbes gauches algébriques a été plutôt

délaissée, et que même les grands progrès de la Géométrie moderne, obtenus par les méthodes synthétiques, ou algébriques, ou fonctionnelles, ont laissé de côté cette théorie : de sorte que les questions fondamentales, qu'on avait abordées dans les travaux cités, et d'autres questions encore que l'on pourrait se poser, n'ont pas fait l'objet de travaux ultérieurs. Si d'ailleurs on passe de l'espace ordinaire aux espaces supérieurs, on rencontre pour les courbes algébriques (en particulier pour leur classification, pour l'étude des courbes canoniques de genre donné, etc.) une foule de questions importantes dont personne encore ne s'est occupé. D'autre part, l'on connaît bien peu de propositions sur les courbes gauches algébriques obtenues en se limitant au champ réel, ou bien à un champ rationnel donné.

C'est en s'inspirant de ces considérations (mais sans vouloir d'ailleurs limiter d'avance, en aucune manière, les problèmes et les méthodes de recherche), que le *Circolo Matematico di Palermo*, conformément aux intentions du fondateur du prix, décernera la « MÉDAILLE GUCCIA » à *un mémoire qui fera faire un progrès essentiel à la théorie des courbes gauches algébriques.*

Dans le cas où, parmi les travaux envoyés au concours, aucun mémoire relatif à la théorie ci-dessus ne serait trouvé digne du prix, celui-ci pourra être adjugé à *un mémoire qui fera faire un progrès essentiel à la théorie des surfaces, ou autres variétés, algébriques.*

Les mémoires destinés au concours devront être : inédits, rédigés en italien, ou français, allemand, anglais et écrits (sauf les formules) avec la machine à écrire. Munis d'une épigraphe, ils devront parvenir, en trois exemplaires, au Président du *Circolo Matematico di Palermo* avant le 1er juillet 1907, accompagnés d'un pli cacheté contenant sur l'enveloppe l'épigraphe adoptée et à l'intérieur le nom et l'adresse de l'auteur. Le mémoire couronné sera inséré dans les « *Rendiconti* », ou autre publication, du *Circolo Matematico di Palermo*. L'auteur en recevra 200 tirages-à-part.

Dans le cas où aucun des mémoires présentés au concours ne serait trouvé digne du prix, celui-ci pourra être adjugé à un mémoire, sur les théories ci-dessus, qui aura été publié après la publication de ce programme et avant le 1er juillet 1907.

Le prix sera décerné par le *Circolo Matematico di Palermo* conformément à la décision d'une Commission internationale de trois membres, composée de MM. MAX NOETHER (Erlangen), HENRI POINCARÉ (Paris) et CORRADO SEGRE (Turin).

La lecture du rapport de la Commission, ainsi que la proclamation du nom du savant couronné et l'attribution du prix, auront lieu à Rome, en 1908, dans une des séances du IVe CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS.

Monument au mathématicien Véga.

Une souscription[1] est ouverte à Laibach (Autriche) pour l'érection d'un monument à la mémoire du mathématicien VÉGA (1754-1804) auteur de Tables de logarithmes.

Mais Véga n'a pas seulement été l'auteur d'une Table de loga-

[1] Envoyer les dons à M. le Capitaine Joh. KRAMARSIC, Inf. Reg. 27, à Laibach, Autriche : ou à M. le Prof. Krazer, Westendstr. 57, Karlsruhe, Allemagne.

rithmes qui en est aujourd'hui à sa 80e édition, il a laissé, en outre, plusieurs traités de mathématiques qui ont atteint un grand nombre d'éditions et dont l'un d'eux est resté en usage à l'Ecole d'Artillerie pendant plus d'un demi-siècle. Véga est précisément l'un des premiers qui ait compris la nécessité d'introduire une forte culture scientifique dans les écoles militaires. Il est également le premier qui, en Autriche, ait fait de la propagande en faveur du système métrique pour les poids et mesures.

Nous empruntons ces quelques renseignements à l'intéressante étude biographique de M. le Capitaine Fridolin KAUCIC, intitulée *Georg Freiherr von Vega*, 2te verbesserte illustrierte Auflage (58 p.), Vienne 1904. On y trouvera non seulement un aperçu de la carrière scientifique de Véga, mais aussi de très belles pages consacrées à sa carrière militaire qui fut des plus brillantes.

Académie des Sciences de Paris.

PRIX DÉCERNÉS. — Dans la séance publique annuelle du 19 décembre, l'Académie a décerné les prix dans la liste desquels nous signalons les suivants ayant trait aux Sciences mathématiques.

Grand prix des Sciences mathématiques. — Le prix n'est pas décerné.

Prix Bordin. — Le prix n'est pas décerné intégralement : un prix de 2000 fr. a été attribué à M. SERVANT.

Prix Vaillant. — Le prix est partagé entre MM. BOREL et BRICARD. L'Académie avait proposé le sujet suivant : Détermination et Etude de tous les déplacements d'une figure invariable dans lesquels les différents points de la figure décrivent des courbes sphériques.

Prix Francœur. — M. E. LEMOINE, pour l'ensemble de ses travaux de Géométrie.

Prix Poncelet. — M. D. ANDRÉ, pour l'ensemble de ses travaux sur l'Analyse combinatoire.

Prix Montyon. — M. G. RICHARD, Ingénieur civil des Mines, pour l'ensemble de ses travaux relatifs à la Mécanique.

Prix Lalande. — M. S.-W. BURNHAM, pour ses travaux sur les étoiles doubles.

Prix Valz. — M. de CAMPOS RODRIGUES, directeur de l'Observatoire royal astronomique de Lisbonne. Détermination de la Parallaxe solaire au moyen de la planète Eros. Autres recherches sur la détermination d'ascensions droites d'un groupe d'étoiles ; observations pendant l'opposition de 1902, sur la planète Mars.

Médaille Janssen. — M. HANSKY, pour l'ensemble de ses observations.

Prix Hébert. — M. G. CLAUDE, pour son ouvrage, l'« Electricité à la portée de tout le monde ».

Prix Hughes. — M. le Lieutenant-Colonel E. Ariès, pour ses publications sur la Théorie de la chaleur et la Statique chimique.

Prix Kastner-Boursault. — M. le Capitaine Ferrié, pour l'ensemble de ses travaux relatifs aux conditions les plus favorables des appareils destinés à la Télégraphie sans fil, et pour ses nombreuses expériences.

Prix Leconte. — M. René Blondlot, Correspondant de l'Académie des Sciences, Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy, pour l'ensemble de ses travaux.

Prix Saintour. — M. C. Frémont, pour, 1° ses expériences sur la définition pratique de la limite d'élasticité des métaux; 2° ses expériences sur la détermination approchée de la pression maximum produite par un choc, et des applications.

Prix Montyon (Statistique). — Le prix est partagé entre MM. V. Lowenthal et P. Razous. Des mentions sont accordées à MM. H. Guégo, E. Maury et Ott.

Prix Laplace. — Œuvres de M. Laplace remises à M. Léauté, sorti premier de l'Ecole polytechnique et entré, en qualité d'élève ingénieur, à l'Ecole nationale des Mines.

Prix Félix Rivot. — Partagé entre MM. Léauté et Dubois, entrés premiers à l'École nationale des Mines et MM. Hecker et Le Verrier, entrés premiers à l'Ecole des Ponts et Chaussées.

Prix proposés. — *Prix Francœur* (1905; 1000 fr.). — Découvertes utiles au progrès des Sciences mathématiques pures et appliquées.

Prix Poncelet (2000 fr.). — Pour l'Ouvrage le plus utile aux Mathématiques appliquées.

Grand prix des Sciences mathématiques (1906; 3000 fr.). — Perfectionner, en quelque point important, l'étude de la convergence des fractions continues algébriques.

Prix Bordin (1907; 3000 fr.). — Reconnaître d'une manière générale si les coordonnées des points d'une surface algébrique peuvent s'exprimer en fonctions abéliennes de deux paramètres, de telle sorte qu'à tout point de la surface corresponde plus d'un système de valeurs des paramètres (aux périodes près). Etudier en particulier le cas où l'équation de la surface serait de la forme

$$z^2 = f(x, y)$$

f étant un polynome, et donner des exemples explicites de telles surfaces.

Prix Vaillant (1907; 4000 fr.). — Perfectionner, en un point important, le problème d'Analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées, c'est-à-dire le problème de l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y)$$

avec les conditions que la fonction u et sa dérivée suivant la normale au contour de la plaque soient nulles. Examiner plus spécialement le cas d'un contour rectangulaire.

Prix Montyon (1905 ; 700 fr.). — Invention ou perfectionnement d'Instruments utiles aux progrès de l'Agriculture, des Arts mécaniques ou des Sciences.

Prix Fourneyron (1905 ; 1000 fr.). — Étude théorique ou expérimentale des turbines à vapeur.

Prix Pierre Guzman (100.000 fr.). — Communiquer avec un astre autre que Mars. — Les intérêts du capital non décerné s'accumulent et forment un prix quinquennal qui sera décerné, s'il y a lieu, en 1905, à un travail faisant progresser l'Astronomie.

Prix Lalande (540 fr.). — Observation, mémoire ou travail le plus utile aux progrès de l'Astronomie.

Prix Valz (460 fr.). — Observation astronomique la plus intéressante de l'année.

Prix G. de Pontécoulant (700 fr.). — Recherches de Mécanique céleste.

Prix Damoiseau (2000 fr.). — Les comètes à orbites hyperboliques étaient-elles telles avant leur entrée dans le système solaire ?

Prix Janssen. — Médaille d'or ; progrès important en Astronomie physique.

Faculté des Sciences de Paris ; thèses soutenues en 1904.

Thèses soutenues en 1904 en vue du Doctorat ès sciences mathématiques.

A. *Doctorat d'Etat.* — 1. d'Adhémar (M. R.) : Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre, du type hyperbolique, à 3 ou 4 variables indépendantes. (Soutenue le 23 avril.)

2. Bernstein (Serge) : Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre. (Soutenue le 10 juin 1904.)

3. Esclangon (Ernest) : Les fonctions quasi-périodiques. (Soutenue le 25 juin 1904.)

4. Potron : Le groupe d'ordre p^6. (Soutenue le 28 juin 1904.)

B. *Doctorat d'Université.* — 1. Vandeuren (Pierre) : Théorie des champs continus bilinéaires. (Soutenue le 24 juin 1904.)

2. Dumas (Gustave) : Sur les fonctions à caractère algébrique dans le voisinage d'un point donné. (Soutenue le 29 juin 1904.)

Notre enquête sur la méthode de travail des mathématiciens.

La collaboration de nombreux mathématiciens, appartenant aux divers pays où se cultivent les sciences exactes, donne à notre enquête un intérêt qui surpasse nos espérances premières. Les réponses, très développées pour la plupart, constituent des docu-

ments profondément instructifs dont nous ferons bénéficier nos lecteurs. Nous nous empressons d'exprimer notre vive reconnaissance à tous ceux qui n'ont pas reculé devant la longueur du questionnaire. Nous comptons recevoir encore des réponses et nous ne saurions trop engager ceux de nos lecteurs qui n'ont pas encore répondu, de bien vouloir nous retourner le questionnaire [1] le plus tôt possible. Il semble en effet que, par suite d'une fausse modestie, bien des lecteurs hésitent encore à répondre. Mais nous leur rappelerons que la collaboration de tous les mathématiciens, depuis les simples professeurs de mathématiques élémentaires jusqu'aux savants des grandes Universités et Académies nous est également utile.

Le dépouillement de l'enquête est un travail qui exige beaucoup de soin et le concours de plusieurs personnes. Nous prions donc nos lecteurs de bien vouloir prendre quelque peu patience.

LA RÉDACTION.

Nominations et distinctions.

M. BOEHM, privat-docent, est nommé professeur extr. à l'Université de Heidelberg.

M. A. DOMMER, prof. extr., est nommé professeur ord. à l'Université de Lausanne.

M. J. GRÜNWALD est admis en qualité de privat-docent de mathématiques à l'Université de Vienne.

M. F. JUNG est admis en qualité de privat-docent de mécanique à l'Ecole technique supérieure allemande de Prague.

M. KNESER a accepté un appel en qualité de professeur ord. à l'Université de Breslau en remplacement de M. London.

M. G. KOWALEWSKI, de l'Université de Greifswald, est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Bonn.

M. LIEBMANN, privat-docent, est nommé professeur extr. à l'Université de Leipzig.

M. F. LONDON, de l'Université de Breslau, est nommé professeur extr. à l'Université de Bonn en remplacement de M. Hefter.

M. LOSSIER est admis en qualité de privat-docent de statique graphique à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich.

M. RUSSJAN est nommé professeur ord. de mécanique à l'Ecole technique supérieure de Lemberg.

M. Th. VAHLEN, de l'Université de Königsberg, est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Greifswald.

M. VIEILLE est nommé membre de l'Académie des Sciences de Paris, Section de mécanique, en remplacement de M. Sarrau, décédé.

---

[1] Demander le questionnaire à l'un des rédacteurs ou à l'un des éditeurs.

NOTES ET DOCUMENTS

Sous ce titre nous publions des renseignements relatifs à l'organisation de de l'enseignement : créations nouvelles, programmes et règlements d'un intérêt général, liste des cours des principales Universités et Ecoles supérieures, etc. — La Rédaction.

Le Séminaire d'Histoire des mathématiques à l'Ecole polytechnique de Munich.

A la suite d'une communication que j'ai présentée au Congrès international des mathématiciens à Heidelberg, la Rédaction de l'*Enseignement mathématique* m'a prié de lui adresser quelques notes sur l'organisation du *Séminaire* d'Histoire des mathématiques que j'ai inauguré, en 1894, à l'Ecole polytechnique de Munich.

Il s'agit d'un Séminaire *de deux heures par semaine*, consacrées à des entretiens sur des sujets nouveaux. L'un des étudiants fait une conférence sur une question que je lui ai donnée plusieurs semaines à l'avance et qu'il traite par écrit. La conférence est suivie d'une discussion qui permet de corriger la forme et le fond et de compléter la bibliographie. Le travail des recherches bibliographiques est généralement fait par moi-même, parce que les étudiants ne le possèdent pas encore suffisamment. Quelquefois je présente moi-même une conférence sur des sujets récents ou sur des recherches que j'ai développées dans un article spécial.

Depuis 1899 j'ai arrangé des *cycles de conférences*, embrassant deux semestres. Le *premier cycle* traita de l'histoire de la quadrature du cercle depuis les temps les plus reculés jusqu'à nos jours; le *second cycle* eut pour sujet l'histoire des origines du calcul infinitésimal. Il commença de l'antiquité et finit avec l'invention de Newton et Leibniz. Le *troisième cycle* donna l'histoire du Calcul différentiel et intégral depuis Newton et Leibniz jusqu'à Gauss, le *quatrième* traita de l'histoire de la Géométrie dans les seizième et dix-septième siècles et tout spécialement de l'origine de la Géométrie analytique. Enfin le *cinquième cycle* développa l'histoire des séries infinies depuis Mercator et Newton jusqu'à nos jours.

Les plus avancés de mes élèves ont déjà publié quelques petites Notes sur des questions nouvelles. C'est le cas des mémoires de MM. Heinrich, Haller, Björnbo, Kutta et principalement des

beaux travaux de M. Wallner sur l'origine du Calcul infinitésimal. Ces mémoires ont paru dans la *Bibliotheca mathematica* de M. G. Eneström, et ils ont été présentés, en partie, dans les conférences de mon Séminaire. A. v. Braunmühl.

FRANCE

LA RÉFORME DES PROGRAMMES D'ADMISSION AUX GRANDES ÉCOLES [1]

II. Programme de la classe de mathématiques spéciales [2].

Le ministre de l'instruction publique et des beaux-arts,

Sur la proposition de la commission interministérielle instituée par arrêté du 3 août 1903,

Arrête ainsi qu'il suit le programme de la classe de mathématiques spéciales :

Mathématiques.

A. — ALGÈBRE ET ANALYSE

Nombres incommensurables. — Notion de coupure.

Division des polynômes entiers. — Plus grand commun diviseur de deux polynômes. — La condition nécessaire et suffisante pour que deux polynômes $f(x)$ et $g(x)$ de degrés respectifs p et q aient un diviseur commun de degré n est qu'il existe deux polynômes A et B de degrés respectifs $p-n$ et $q-n$ tels que l'on ait :

$$A\,g(x) + B\,f(x) = 0.$$

Arrangements, permutations, combinaisons sans répétition.

Formule du binôme dans le cas de l'exposant entier et positif.

Calcul des valeurs arithmétiques des radicaux. — Exposants fractionnaires et négatifs. (On réservera pour la définition de a^x le cas de l'exposant incommensurable.)

Déterminants. — Définition, développement suivant les éléments d'une même ligne. — Echange des lignes avec les colonnes. — Permutation de deux colonnes ou de deux lignes. — Addition de lignes ou de colonnes. — Produit de deux déterminants. — Résolution d'un système d'équations linéaires [3].

---

[1] La *Première Partie*, consacrée au *Rapport de M. Appell*, a été publiée dans *L'Ens. math.* du 15 novembre 1904, p. 485 et suivantes.

[2] Extrait du *Journal officiel* du 27 juillet 1904.

En s'inspirant de ce nouveau programme la *Revue de Mathématiques spéciales* (Rédacteur en chef : M. E. Humbert, Paris) a élaboré un programme, qu'elle publie dans son numéro de décembre 1904, et qui diffère en plusieurs points du nouveau programme. Tout en tenant compte des applications, elle donne plus de détails dans les développements théoriques de quelques chapitres. Nous reproduirons ce projet dans un prochain numéro.

[3] Les élèves devront être exercés à la résolution des équations numériques sans employer les déterminants.

Formes linéaires et homogènes à deux, trois ou quatre variables. — Conditions d'indépendance.

Nombres complexes. — Formule de Moivre.

Séries. — Séries à termes positifs : caractères de convergence ou de divergence tirés de l'étude des expressions $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, $\sqrt[n]{u_n}$, $n^p u_n$. — Séries absolument convergentes. — Convergence des séries à termes alternativement positifs et négatifs dont le terme général décroît constamment en valeur absolue et tend vers zéro.

Exemples numériques.

Fonctions. — Fonctions d'une variable réelle, représentation graphique, continuité. — Définition et continuité de la fonction exponentielle et de la fonction logarithmique. Limite de

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

quand m grandit indéfiniment en valeur absolue. — Dérivée d'une fonction : pente de la courbe représentative. — Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une puissance entière, d'une fonction de fonction. — Dérivées des fonctions circulaires directes et inverses. — Dérivées de a^x et de $\log x$ (logarithmes vulgaires et logarithmes népériens). — Usage des tables de logarithmes et de la règle à calcul.

Théorème de Rolle, formule des accroissements finis, représentation graphique.

Fonctions de plusieurs variables indépendantes, dérivées partielles, formule des accroissements finis. — Dérivée d'une fonction composée. — Dérivée d'une fonction implicite. (On admettra sans démonstration l'existence de cette fonction et de sa dérivée.)

Emploi de la dérivée pour l'étude de la variation d'une fonction : maxima et minima.

Fonctions primitives d'une fonction donnée, leur représentation par l'aire d'une courbe.

Fonction définie par une série entière en x à coefficients réels. — Intervalle de convergence. — Addition et multiplication. — A l'intérieur de l'intervalle de convergence, on obtient la dérivée ou les fonctions primitives de la fonction en prenant la série des dérivées ou des fonctions primitives. (On ne s'occupera pas de ce qui se passe aux extrémités de l'intervalle.)

Exemples : développements en série de

$$\frac{1}{1-x}\,;\quad \frac{1}{1+x^2}\,;\quad \text{arc tang}\,x\,;\quad \mathrm{L}\,(1-x)\,;\quad \mathrm{L}\,\frac{1-x}{1+x}\,.$$

Série exponentielle, série du binôme ; les équations

$$y' = y \text{ et } y'\,(1+x) = m\,y$$

permettent de déterminer les sommes de ces deux séries. — Développements en série de a^x ; arc sin x.

Formules de Mac Laurin et de Taylor :

$$f(a+x) = f(a) + \frac{x}{1} f'(a) + \frac{x^2}{1.2} f''(a) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a+\theta x).$$

Développements en série de sin x et de cos x.

Application de la formule de Taylor à l'étude du quotient de deux fonctions de x dans le voisinage d'une valeur donnée de x; cas où les deux fonctions de x s'annulent pour cette valeur. — Diverses formes d'indétermination.

Croissances de e^x et Lx comparées à celle de x^m. Application à la recherche de la limite de $\frac{e^x}{x^m}$ pour x infini et de $x^m Lx$ pour $x = 0$.

Fonctions e^z, cos z, sin z pour z complexe. — Égalités :

$$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}, \quad e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Sinus et cosinus hyperboliques, leurs relations avec le sinus et le cosinus ordinaires.

Propriétés générales des équations algébriques. — Nombre des racines d'une équation. — Relations entre les coefficients et les racines. — Toute fonction rationnelle et symétrique des racines s'exprime rationnellement en fonction des coefficients. — Élimination d'une inconnue entre deux équations au moyen des fonctions symétriques.

Propriétés spéciales des équations à coefficients réels. — Racines imaginaires conjuguées. — Indications que fournissent les signes des résultats de la substitution de deux nombres réels.

Conditions pour qu'une équation ait des racines égales. — Recherche des racines commensurables.

Théorème de Descartes.

Infiniment petits. — Infiniment petits équivalents. — Ordre relatif de deux infiniment petits. — Valeur principale. — Exemples.

Différentielle première d'une fonction d'une variable.

Différentielle totale d'une fonction $f(x, y, \ldots)$ définie par la formule :

$$df = f'_x\, dx + f'_y\, dy + \ldots$$

Transformation de cette expression lorsqu'on remplace $x, y, \ldots$ par des fonctions d'autres variables.

Intégrales. — L'aire d'un segment de courbe est la limite de la somme des rectangles inscrits; emploi des symboles :

$$\int f(x)\, dx\,; \quad \int_a^b f(x)\, dx.$$

Valeur moyenne d'une fonction dans un intervalle. — Changement de la variable. — Intégration par parties.

Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples. — Intégration des différentielles rationnelles en x et de celles qui s'y ramènent.

Application des quadratures à la rectification des courbes, au calcul d'un volume décomposé en tranches par des plans parallèles, à l'évaluation de l'aire d'une surface de révolution et au calcul des moments d'inertie du

cylindre de révolution, de la sphère, et du parallélipipède par rapport à leurs axes de symétrie. — Aires et volumes des solides de la géométrie élémentaire.

Intégration des équations différentielles du premier ordre :

1° Dans le cas où les variables se séparent immédiatement ;

2° Dans le cas où l'équation est linéaire.

Intégration de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre ; cas où le second membre est un polynôme ou une somme d'exponentielles de la forme $A e^{ax}$.

Résolution numérique des équations algébriques ou transcendantes. — Méthode d'approximation de Newton et méthode des parties proportionnelles établies par des considérations géométriques. — Extension de la méthode de Newton à la résolution numérique de deux équations simultanées qu'on remplacera par deux équations linéaires approchées.

Calcul approché d'une intégrale définie par la méthode des trapèzes.

II. — TRIGONOMÉTRIE

Fonctions circulaires. — Angles correspondant à une fonction circulaire.

Théorème des projections.

Relations entre les fonctions circulaires d'un même angle. — Formules relatives à l'addition, à la soustraction, à la multiplication et à la division des angles.

Divisions sexagésimale et centésimale de la circonférence. (On fera usage de tables trigonométriques centésimales à cinq décimales.)

Résolution des triangles rectilignes.

Résolution trigonométrique de l'équation binôme.

Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique :

$$\text{Cos } a = \text{Cos } b \text{ Cos } c + \text{Sin } b \text{ Sin } c \text{ Cos } A.$$

III. — GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1° *Géométrie plane.*

Constructions d'expressions algébriques. — Homogénéité.

Coordonnées rectilignes. — Représentation d'une ligne par une équation. — Formules de transformation des coordonnées rectilignes. Ordre d'une courbe algébrique. Distance de deux points.

Ligne droite. — Équation de la ligne droite. Problèmes simples relatifs à sa détermination. — Formules donnant la distance d'un point à une droite et la tangente de l'angle de deux droites, en supposant les axes rectangulaires. Applications. — Notions succinctes sur les points à l'infini au moyen des coordonnées homogènes et sur les éléments imaginaires. — Relation homographique ; relation involutive ; rapport anharmonique de quatre nombres. Application au rapport anharmonique de quatre points en ligne droite et de quatre droites appartenant à un même faisceau linéaire.

Cercle.

Lieux géométriques.

Courbes dont l'équation est résolue ou résoluble par rapport à l'une des coordonnées. Tracé. — Équation de la tangente en un point ; sous-tangente. — Normale ; sous-normale. — Concavité ; convexité ; points d'inflexion. —

Asymptotes. — Application à des exemples simples et en particulier à des coniques et à des courbes dont l'équation est du second degré par rapport à l'une des coordonnées.

Courbes définies par l'expression des coordonnées d'un de leurs points en fonction d'un paramètre. — Tracé. — Exemples numériques. — Les courbes du second ordre et celles du troisième ordre à point double sont unicursales.

Courbes définies par une équation implicite. — Equation de la tangente et de la normale en un point. — Tangentes à l'origine dans le cas où l'origine est un point simple ou un point double. Recherche des asymptotes sur des exemples *numériques* de courbes du second et du troisième ordre.

Courbure. — *Enveloppes.* — *Développées.*

Intersection d'une courbe algébrique donnée, définie par une équation entière et homogène : $f(x, y, z) = 0$, avec une droite arbitraire menée par un point quelconque donné sur cette courbe ; point simple ; tangente en ce point. Cas particulier où le point est rejeté à l'infini : asymptote définie comme tangente à la courbe en ce point.

Courbes du second ordre. — Division en trois genres d'après la nature des points à l'infini ; asymptotes. — Etablir les différentes formes réduites que peut prendre l'équation d'une conique en appliquant la méthode de décomposition en carrés à des exemples numériques ; figurations géométriques correspondantes. — Condition pour que deux points soient conjugués par rapport à une conique ; polaire d'un point. — Condition pour que deux droites soient conjuguées ; pôle d'une droite.

Centres ; diamètres ; directions conjuguées ; diamètres conjugués. — Directions principales et axes de symétrie en supposant les coordonnées rectangulaires. — Recherche des formes réduites ; calcul des coefficients des formes réduites dans le cas où les coordonnées sont rectangulaires.

Foyers d'une courbe du second ordre. — Directrices — Excentricité. — Paramètre. — Recherche des foyers et des directrices sur les équations réduites en coordonnées rectangulaires.

Equation trinôme : $y^2 = 2px + qx^2$, commune aux trois courbes du second ordre.

Etude des courbes du second ordre sur les équations réduites. — Intersection avec une droite ; condition de contact ; problèmes simples relatifs aux tangentes. — Propriétés focales et tracés qui en résultent ; tangente et normale. — Questions relatives à l'ellipse et à l'hyperbole ; diamètres ; cordes supplémentaires ; diamètres conjugués ; théorèmes d'Apollonius. — Tracés spéciaux pour l'ellipse considérée comme projection orthogonale du cercle. — Propriétés spéciales de l'hyperbole relativement aux asymptotes. — Propriétés spéciales de la parabole relativement aux diamètres, à la sous-tangente et à la sous-normale.

Homothétie.

Rapport anharmonique de quatre points ou de quatre tangentes sur une conique. — Divisions homographiques et divisions en involution sur une conique.

Deux coniques ont, en général, quatre points communs réels ou imaginaires à distance finie ou infinie. — Notions succinctes sur les coniques appartenant au faisceau linéaire ponctuel défini par deux coniques données ; les coniques de ce faisceau découpent sur une droite quelconque deux divisions en involution.

Coordonnées polaires. — Leur transformation en coordonnées rectilignes. Equation de la ligne droite.

Construction des courbes; tangentes. — Asymptotes. — Applications (on se bornera au cas où l'équation est résolue par rapport au rayon vecteur). — Cas des coniques.

2. *Géométrie dans l'espace.*

Coordonnées rectilignes. — Représentation d'une surface par une équation; représentation d'une ligne par deux équations simultanées. — Formule qui donne le cosinus de l'angle de deux directions en supposant les coordonnées rectangulaires. — Formules de transformation des coordonnées rectilignes; formules d'Euler. — Ordre d'une surface algébrique. — Distance de deux points.

Ligne droite et plan. — Equation du plan; équations de la droite. — Problèmes simples relatifs à leur détermination et à leurs intersections.

Formules donnant le cosinus de l'angle de deux droites ou de deux plans, la distance d'un point à un plan, d'un point à une droite et la plus courte distance de deux droites, en supposant les axes rectangulaires. — Applications. — Notions succinctes sur les points à l'infini à l'aide des coordonnées homogènes et sur les éléments imaginaires. — Rapport anharmonique de quatre plans appartenant à un même faisceau linéaire.

Sphère. (Coordonnées rectangulaires).

Courbes gauches. — Tangente. — Plan osculateur. — Courbure. — Applications à l'hélice circulaire.

Surfaces en général. — Plan tangent; normale. — Marche à suivre pour trouver l'équation d'une surface définie géométriquement. Application aux cylindres, aux cônes et aux surfaces de révolution.

Surfaces du second ordre. — Intersection d'une surface du second ordre donnée avec une droite arbitraire menée par un point quelconque donné sur cette surface; point simple; plan tangent en ce point; son intersection avec la surface. — Cas où le point est à l'infini; plan asymptote défini comme plan tangent en ce point. — Classification des surfaces du second ordre d'après la nature des points à l'infini.

Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface du second ordre possède un ou plusieurs points doubles à distance finie ou infinie.

Etablir les différentes formes réduites que peut prendre l'équation d'une surface du second degré en appliquant la méthode de décomposition en carrés à des exemples numériques; formes géométriques des surfaces correspondantes. — Condition pour que deux points soient conjugués par rapport à une surface du second ordre; plan polaire d'un point. — Condition pour que deux plans soient conjugués; pôle d'un plan. — Droites conjuguées. — Centres; plans diamétraux; directions conjuguées; diamètres, diamètres conjugués. (Toutes les discussions relatives à la distribution des plans asymptotes, des centres, des plans diamétraux et des diamètres seront faites sur les formes réduites.)

Démontrer que dans toute surface du second ordre il existe au moins trois directions conjuguées rectangulaires (en coordonnées rectangulaires); calcul des coefficients des carrés des variables lorsqu'on prend des axes parallèles à ces directions; calcul des autres coefficients des formes réduites par la translation de ces axes.

Homothétie.

Étude des surfaces du second ordre sur les équations réduites. — Condition de contact d'un plan avec la surface; problèmes simples relatifs aux plans tangents. — Normale. — Propriétés des diamètres conjugués; théorèmes d'Apollonius pour l'ellipsoïde et les hyperboloïdes. — Sections circulaires. — Génératrices rectilignes. — Les surfaces du second ordre sont unicursales.

Variation de la courbure des sections normales en un point simple d'une surface (on supposera le point à l'origine et la surface tangente au plan xoy). — Indicatrice. — Courbure d'une section plane quelconque au même point. — Théorème de Meusnier. — Surfaces convexes, surfaces à courbures opposées en un point.

IV. — MÉCANIQUE

CINÉMATIQUE DU POINT. — Mouvement rectiligne d'un point. — Relativité du mouvement. — Vitesse, accélération. — Mouvement uniforme, uniformément varié, vibratoire simple.

Mouvement curviligne. — Vitesse. — Hodographe. — Vecteur accélération.

Accélérations tangentielle et centripète. — Diagrammes des espaces, des vitesses, des accélérations tangentielles.

Mouvement rapporté à des axes de coordonnées rectangulaires ou obliques et à des coordonnées semi-polaires.

Cinématique d'un système invariable. — Translation. — Rotation autour d'un axe fixe. — Mouvement hélicoïdal.

Changement du système de comparaison. — Composition des vitesses; composition des accélérations bornée au cas où le mouvement du système de comparaison est un mouvement de translation.

DYNAMIQUE.

I. *Point matériel libre.* — Principe de l'inertie. — Définition de la force et de la masse[1]. — Relation entre la masse et le poids. — Invariabilité de la masse. — Unités fondamentales. — Unités dérivées. — Mouvement d'un point sous l'action d'une force constante en grandeur et en direction ou sous l'action d'une force issue d'un centre fixe : 1° proportionnelle à la distance; 2° en raison inverse du carré de la distance.

Composition des forces appliquées à un point matériel[2].

Travail d'une force, travail de la résultante de plusieurs forces, travail d'une force pour un déplacement résultant. — Théorème de la force vive. — Surfaces de niveau. — Champs et lignes de force. — Energie cinétique et énergie potentielle d'un point placé dans un champ de force.

II. *Point matériel non libre.* — Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné avec et sans frottement, la vitesse initiale étant dirigée suivant une ligne de plus grande pente. — Pression totale sur le plan; réaction du plan. — Petites oscillations d'un pendule simple sans frottement, isochronisme.

Homogénéité. — Dimensions d'une vitesse, d'une accélération, d'une force, d'un travail, d'une quantité de mouvement, d'une force vive.

---

[1] On admettra qu'une force appliquée à un point matériel est égale géométriquement au produit de la masse du point par l'accélération qu'elle lui imprime.

[2] On admettra que si plusieurs forces agissent sur un point, l'accélération qu'elles lui impriment est la somme géométrique des accélérations que chacune d'elles lui imprimerait si elle agissait seule.

Statique.

Statique du point. — Equilibre d'un point matériel libre, d'un point matériel assujetti à rester sur une courbe fixe ou sur une surface fixe, avec ou sans frottement.

Moments. — Moment vectoriel par rapport à un point. — Moment par rapport à un axe.

Statique des systèmes de points matériels. — Démontrer qu'il existe six conditions nécessaires d'équilibre indépendantes des forces intérieures. — Démontrer que, pour les systèmes invariables, ces six conditions sont suffisantes. Cas particuliers.

Equivalence de deux systèmes de forces appliquées à un corps solide. — Application à la réduction d'un système de forces. — Composition des couples. — Centre des forces parallèles; centre de gravité; moments des forces parallèles par rapport à un plan.

Equilibre d'un solide invariable qui n'est pas libre. — Cas d'un point fixe, d'un axe fixe avec ou sans glissement le long de cet axe, de un, deux ou trois points de contact avec un plan fixe. — Réactions.

Machines simples. — Levier, poulie fixe avec ou sans frottement ; bascule, treuil, cabestan, poulie mobile, moufle sans frottement.

Vérifier sur chacune de ces machines que, pour un déplacement élémentaire à partir d'une position d'équilibre, la somme algébrique des travaux élémentaires de la puissance et de la résistance est nulle, si l'on fait abstraction du frottement.

V. — GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

Problèmes sur la droite et le plan.

Représentation et intersection de prismes et de pyramides.

Sphères. — Section plane. — Intersection avec une droite. — Plan tangent ; cône circonscrit ; ombres.

Résolution des trièdres.

Cônes et cylindres. — Plans tangents ; contours apparents et ombres. — Intersection avec une droite. — Sections planes. — Développement.

Surfaces de révolution. — Plans tangents ; contours apparents et ombres. — Sections planes. — Intersection avec une droite.

Surfaces réglées du second ordre. — Hyperboloïde de révolution et paraboloïde hyperbolique. — Mode de génération. — Intersection avec une droite.

Plans tangents ; contours apparents et ombres. — Sections planes.

Intersections de surfaces. — Deux cônes ou cylindres, cône ou cylindre et surface de révolution ; deux surfaces de révolution dont les axes sont dans un même plan.

Projections cotées. — Problèmes sur la droite et le plan. — Surfaces topographiques. — Lignes de niveau et de plus grande pente ; ligne d'égale pente ; sommet ; fond ; col ; ligne de faîte ; ligne de thalweg.

Sections planes ; profils ; intersection avec une droite. Intersection de deux surfaces.

Applications de géométrie projective. (Prog. de math. A).

Plan du tableau. — Perspective d'un point, d'une droite, d'une ligne.

Rapport anharmonique de quatre points en ligne droite. — Sa conservation par projections. — Rapport harmonique.

Point de fuite d'une droite. — Perspective de deux droites parallèles. — Ligne de fuite d'un plan. — Conception de la droite de l'infini d'un plan.

Nota. — Le professeur de géométrie descriptive devra se servir des notions de géométrie projective qui figurent au programme de géométrie analytique.

Physique.

Image d'un point par rapport à un système optique. — Aplanétisme. — Miroirs plans, surfaces du second degré. — Transformations successives d'une surface aplanétique par la méthode de Foucault.

Aplanétisme approché d'une surface sphérique réfléchissante. — Rappel des formules des miroirs sphériques. — Aberrations longitudinale et transversale[1]. — Expériences mettant en évidence les aberrations, les caustiques et les droites focales.

Aplanétisme par réfraction. — Points aplanétiques de la sphère. — Rappel des formules des lentilles minces. — Etude expérimentale des aberrations, des caustiques et des droites focales[2]. — Lentilles de Fresnel; projecteur catadioptrique.

Montrer géométriquement l'existence et les propriétés des plans principaux dans tout système optique centré[2]. — Formule fondamentale $\varphi\varphi' = f^2$. Détermination expérimentale des foyers et des plans principaux. — Construction des images.

Convergence; dioptrie.

Prismes. — Déviation minima. — Conditions de l'aplanétisme vrai et approché.

Aberrations de réfrangibilité. — Lentilles achromatiques.

Instruments d'optique. — Instruments destinés à aider l'œil dans l'observation soit des petits objets soit des objets éloignés. — Puissance, grossissement, pouvoir séparateur, clarté, champ. — Marche des rayons. — Loupe; oculaires, microscope, lunette astronomique; lunette terrestre, lunette de Galilée. — Télescope de Foucault. — Objectif photographique.

Indices de réfraction des solides et des liquides. — Goniomètre. — Méthode de la réflexion totale.

Mesure de la vitesse de la lumière par la méthode de Foucault et celle de Fizeau.

MESURES

Vernier. — Vis micrométrique : machine à diviser; microscope micrométrique; sphéromètre. — Cathétomètre[3]. — Comparateur.

Pesanteur. — Champ de force, direction. — Lois de la chute des corps : plan incliné; machine d'Atwood, appareil de Morin.

Balance; conditions de sensibilité suivant que les trois axes de suspension parallèles sont ou non dans un même plan; boîtes de poids; méthodes de la double pesée et de la pesée à charge constante. — Description d'une pesée.

Pendule simple; pendule composé[4]. — Réciprocité des axes de suspension et d'oscillation. — Application du pendule à la mesure de l'intensité de la pesanteur. — Méthode des coïncidences.

---

[1] Sans calculs.

[2] On se bornera au cas où les milieux extrêmes sont identiques.

[3] On n'insistera pas sur le réglage du cathétomètre.

[4] Voir dans le cours d'algèbre les formes de pendules composés dont on peut calculer le moment d'inertie.

Indication des résultats obtenus pour le champ terrestre.

Extension de la formule du pendule au cas d'une force proportionnelle à l'écart. — Horloges et chronomètres. — Notions très sommaires sur l'amortissement et la résistance.

Unités et étalons. — Unités fondamentales. — Unités dérivées mécaniques : dimensions. — Système C. G. S. — Unités mécaniques pratiques.

Masses et poids spécifiques. — Densités des solides et des liquides par la méthode du flacon, avec les corrections. — Densité des gaz ; poids du litre d'air.

Capillarité : étude expérimentale ; tension superficielle.

Baromètre normal. — Baromètre métallique. — Manomètre à mercure. — Manomètre métallique.

CHALEUR

Mesure des températures. — Thermomètre normal. — Thermomètre à mercure. — Détermination de l'intervalle fondamental. — Déplacement du zéro.

Mesure d'une quantité de chaleur. — Méthode de la fusion de la glace (calorimètre de Bunsen). — Méthode des mélanges (calorimètre de Berthelot). — Idée générale des corrections calorimétriques.

Chaleurs spécifiques des solides, des liquides et des gaz à pression constante[1]. — Résultats généraux.

Détermination de l'équivalent mécanique de la calorie ; expériences fondamentales de Joule. — Unité C. G. S. de quantité de chaleur.

Dilatations ; courbes de dilatation ; coefficients de dilatation.

Méthode du comparateur pour la dilatation linéaire des solides.

Dilatation absolue du mercure. — Principe de la méthode de Dulong et Petit et de Regnault[2].

Méthode des thermomètres comparés. — Cas particulier de l'eau.

Lois de compressibilité et de dilatation des gaz. — Lois de Mariotte et de Gay-Lussac comme première approximation ; résultats des expériences de Regnault, Cailletet, Amagat ; réseaux d'isothermes.

Changements d'état. — Enoncé de la règle des phases et des lois du déplacement de l'équilibre.

Vaporisation, liquéfaction. — Courbe des forces élastiques de la vapeur d'eau.

Courbes d'Andrews. — Point critique. — Liquéfaction des gaz.

Ebullition. — Distillation. — Caléfaction. — Chaleur de vaporisation. — Formule de Regnault pour l'eau[3].

Densité des vapeurs.

Fusion et solidification. — Chaleur de fusion. — Dissolution. — Mélanges réfrigérants.

Influence d'un corps dissous sur le point de fusion et sur le point d'ébullition. — Lois de Raoult.

---

[1] Là, comme ailleurs, on insistera sur l'exposition des méthodes et non sur la description des appareils.

[2] Là comme ailleurs, on insistera sur l'exposition des méthodes et non sur la description des appareils.

[3] Résultats sans la description des expériences.

ÉLECTROSTATIQUE

Rappel des notions fondamentales. — Mesure relative des quantités d'électricité par le cylindre de Faraday. — Etude expérimentale de la distribution. — Densité électrique. — Influence. — Principe des machines à influence.

Loi de Coulomb. — Quantité d'électricité.

Champ électrique. — Lignes de force, flux de force. — Théorème de Gauss. — Théorème de Coulomb. — Eléments correspondants. — Applications à l'influence.

Notions élémentaires sur le potentiel.

Capacité électrostatique. — Condensateur, condensateur plan, cylindrique. — Pouvoir inducteur spécifique.

Energie électrique d'un condensateur.

Electromètre absolu. — Electromètre à quadrants. — Mesure des différences de potentiel. — Distances explosives en fonction du potentiel dans l'air à la pression ordinaire.

Unités électrostatiques C. G. S.; unités pratiques.

MAGNÉTISME

Faits généraux. — Loi de Coulomb. — Champ magnétique. — Lignes de force; flux de force à travers une surface.

Champ terrestre; déclinaison, inclinaison.

Mesure du moment d'un barreau par la méthode des oscillations.

Composition de deux champs uniformes. — Méthode du magnétomètre.

Mesures absolues; méthode de Gauss.

Chimie.

Nous nous bornons à reproduire ici les principaux titres. *(La Réd.)* :

Phénomènes physiques. Phénomènes chimiques. Lois qui régissent les combinaisons. Notation chimique[1]. Principes fondamentaux de thermochimie. Caractères généraux des fonctions chimiques. Etude des métalloïdes et de leurs principaux composés.

Fait à Paris, le 26 juillet 1904. J. CHAUMIÉ.

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1904-1905 *(suite)*.

Oxford; University. — Lecture List for Hilary Term, 1905 (à partir du 23 janvier). Mathematics. — W. ESSON : Comparison of Analytic and Synthetic methods in the Geometry of Conics, 2 h. Synthetic Geometry of Cubics, 1. — E. B. ELLIOT : Elements of Elliptic Functions, 2. Substitutions and Resolvents, 1. — H. H. TURNER : Elementary Mathematical Astronomy, 2. — The Professor and H. C. PLUMMER : Practical Work. — A. E. H.

---

[1] La notation atomique est obligatoire.

Observation générale. On supprimera la description de tous les appareils qui n'ont plus qu'un intérêt historique, pour s'en tenir à ce qu'il y a de plus récent.

Lowe : Theory of Potential, 2. Elements of the Calculus (for Students of Science), 2. — J. W. Russell : Algebra of Quantics, 2. — P. J. Kirkby : Higher Algebra, 1. — A. L. Dixon : Calculus of Finite Differences, 1. — J. E. Campbell : Geometry of Surfaces, 1. — C. H. Sampson : Higher Solid Geometry (continued), 1. — C. H. Thompson : Dynamics of a Particle, 3. — H. T. Gerrans : Hydrodynamics, 2. — C. E. Haselfoot : Theory of Equations, 1. — A. L. Pedder : Trigonometry, 1. — C. Leudesdorf : Geometry (Maxima and Minima, Inversion, &c.), 2. — A. E. Jolliffe : Analytical Geometry (continued), 2. — C. H. Sampson : Solid Geometry, 2. — R. F. McNeile : Integral Calculus, 2. — E. H. Hayes : Elementary Mechanics, 3.

Paris ; Collège de France (Cours du 1er semestre 1904-1905). — Mécanique analytique et Mécanique céleste : M. Hadamard, suppléant : Equations de l'Elasticité (2 leçons par semaine). — Mathématiques : M. Humbert, suppléant : Fonctions abéliennes (2 leçons par semaine). — Mathématiques (Fondation Claude Antoine Peccot) ; M. Henri Lebesgue, chargé du cours : Séries trigonométriques (1 leçons par semaine).

BIBLIOGRAPHIE

Annuaire pour l'an 1905, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques. — 1 vol. in-16 de près de 800 pages avec figures : **1** fr. **50** (franco, **1** fr. **85** ; s'adr. à la Librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris).

Nous venons de recevoir l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1904. — Ce petit volume compact contient, comme toujours, une foule de renseignements indispensable à l'ingénieur et à l'homme de Science. Parmi les Notices de cette année, signalons tout spécialement celle de M. P. Hatt, **Explication élémentaire des marées.**

Gino Loria. — **Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven.** Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem Italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fritz Schütte. Mit 174 Figuren und 17 lithographierten Tafeln. — 1 vol. in 8° de 744 pages. Prix M. 28.—. B. G. Teubner, Leipzig.

Le présent ouvrage est un catalogue méthodique de toutes les courbes planes que les géomètres ont eu à considérer depuis les temps les plus reculés de l'antiquité jusqu'à nos jours. La publication d'un tel ouvrage était dans l'air depuis longtemps, et l'auteur lui-même se plaît à rendre hommage à ceux qui, avant lui, ont contribué à cette rude besogne.

Dans ces dix dernières années, la chose était revenue à maintes reprises sur le tapis. Des questions furent posées dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* à son sujet, notamment par M. Haton de la Goupillière, E. Lemoine, P. Tannery, et peu après l'Académie des Sciences de Madrid en faisait l'objet d'un concours. Il n'en aurait pas fallu tant pour montrer l'importance

d'un sujet sur lequel les meilleurs traités de géométrie analytique étaient bien peu complets.

En 1897, une première et magistrale réponse fut faite par M. H. Brocard. Ce géomètre publia deux volumes autographiés, sous le titre de *Notes de bibliographie des Courbes géométriques* qui montraient l'extrême compétence de leur auteur et, dans la préface de l'ouvrage qu'il publie aujourd'hui, M. Gino Loria rend un juste hommage à M. Brocard, en déclarant que cet éminent géomètre tient incontestablement la première place parmi tous ceux qui ont étudié le sujet.

L'ouvrage de M. Brocard était un dictionnaire où les courbes avaient leurs noms rangés par ordre alphabétique; celui de M. Loria en diffère à ce point de vue. Ici les courbes sont groupées géométriquement, en commençant tout d'abord par les courbes algébriques de degré inférieur.

On y passe rapidement sur la droite et les coniques, car ces lignes sont bien étudiées dans tous les ouvrages élémentaires. Quelques mots historiques et philosophiques sur l'impossibilité de nettement définir la droite sont cependant très intéressants. Quant aux coniques, admirablement étudiées par les Grecs et cependant complètement délaissées par le Moyen Age, leur étude fut, pour ainsi dire, l'origine de toutes les méthodes de la géométrie moderne.

L'ouvrage commence véritablement par l'étude des courbes du troisième degré.

L'auteur part d'un point de vue très général et remarque que l'étude peut se présenter sous trois aspects différents. Ou bien on étudiera les cubiques d'après la manière de les construire géométriquement, ou bien on partira de la configuration de leurs points singuliers, ou enfin du célèbre théorème de Salmon, relatif à la constance du rapport anharmonique de quatre tangentes menées à la courbe par l'un de ses propres points supposé non singulier.

En partant notamment de la configuration des points singuliers, on arrive facilement à montrer que toute courbe du troisième degré peut toujours se représenter par une équation de la forme

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

puis, sur la forme paramétrique, au moyen de fonctions elliptiques très simples d'un paramètre.

Signalons aussi la possibilité de transformer une cubique quelconque en une cubique à centre par une transformation projective.

Après ces généralités, nous voyons les classifications de cubiques tentées dans le passé et notamment la riche et poétique liste qu'en fit Newton en empruntant presque tous les noms à la botanique et à l'architecture, mais la première classe véritablement délimitée de façon méthodique que M. Loria nous présente est celle des cubiques rationnelles, c'est-à-dire de celles qui sont paramétriquement définies par des équations de la forme

$$\rho x_i = a_{i0}\lambda^3 + a_{i1}\lambda^2 + a_{i2}\lambda + a_{i3}, \ (i = 1,2,3.)$$

puis immédiatement ensuite les cubiques circulaires, c'est-à-dire celles qui passent par les points ombilicaux. Le chapitre suivant étudie la cissoïde de Dioclès

$$x(x^2 + y^2) = 2ry^2$$

qui, comme cette équation le montre immédiatement, est précisément une cubique circulaire.

On connaît les rapports remarquables de la cissoïde et de la parabole. Signalons aussi d'élégantes et fort simples quadratures qui nous donnent de très remarquables théorèmes : Si, par exemple, la cissoïde est engendrée à l'aide d'un cercle de la façon élémentaire bien connue, l'aire comprise entre la branche à point de rebroussement et l'asymptote est égale à trois fois celle du cercle générateur et le volume engendré par cette aire tournant autour de l'asymptote est égal à celui du tore engendré par le cercle précédent.

Signalons aussi la rectification de la courbe et le fait que la différence de sa longueur totale et de celle de l'asymptote est une quantité finie.

Nous voyons ensuite les généralisations de la cissoïde, puis les courbes connues sous le nom de parabole et de folium de Descartes, la première de de ces deux n'ayant pas grande importance, mais la seconde en ayant, au contraire, une très grande, surtout au point de vue historique.

L'analogie de forme du folium et de la strophoïde nous conduit à l'étude de cette dernière courbe qui peut rentrer comme la cissoïde dans la classe des cubiques circulaires. Elle possède un point double où les tangentes sont rectangulaires. Elle est comme la cissoïde susceptible de certaines généralisations.

La conchoïde de Sluse est aussi une cubique circulaire ; elle possède une asymptote et deux points d'inflexion à distance finie. Le lieu de ces points pour l'ensemble des conchoïdes que l'on peut construire avec la même asymptote et le même pôle est une cissoïde de Dioclès.

La versiera est une cubique rationnelle dont l'équation peut s'écrire :

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2},$$

la visiera est encore une cubique circulaire et ces deux courbes comprennent, elles aussi, entre elles et leurs asymptotes des aires en rapport très simple avec celui d'un certain cercle générateur de la courbe.

Voici encore la trisectrice de Maclaurin, puis celle de Catalan qui est la podaire négative d'une parabole, par rapport à son foyer, puis celle de de Longchamps qui, exception faite pour cette dernière, sont encore des cubiques circulaires.

Après les trisectrices viennent les duplicatrices et les feuilles paraboliques représentées par des équations de la forme

$$x^3 = a\,(x^2 - y^2) + bxy,$$

ce qui termine la partie consacrée aux courbes du troisième ordre.

On voit déjà par ce qui précède que l'ouvrage de M. Loria est loin de ressembler à quelque sèche nomenclature ; à côté du souci de rappeler toutes les courbes considérées et nommées par les géomètres, on sent celui non moins sérieux de ne pas faire un exposé disparate et de relier par la géométrie analytique et le calcul intégral les propriétés les plus belles de ces courbes.

La place limitée dont nous pouvons disposer dans ce journal ne nous permet pas de continuer avec autant de détails l'analyse des autres sections de l'ouvrage. Bornons-nous à décrire rapidement leur plan. Voici 124 pages consacrées aux courbes du quatrième ordre. La classification de ces courbes

est exposée avec concision. Celles qui se présentent le plus naturellement sont celles qui ont leur maximum de points doubles et que des constructions simples permettent de faire dériver des coniques. Nous considérons ensuite celles qui ont deux points doubles sur la droite de l'infini; ce sont les quartiques elliptiques; si ces deux points sont les points ombilicaux, nous obtenons les quartiques bicirculaires, telles, par exemple, que les sphériques de Perseus Ces dernières courbes sont de grande importance; elles comprennent les lignes isoptiques des coniques, les lemniscates, les ovales de Cassini.

Comme quartique simplement circulaire, nous considérons la conchoïde rectiligne de Nicomède à laquelle un chapitre est spécialement consacré, puis les généralisations de cette courbe, et notamment la conchoïde à base circulaire qui nous mène naturellement à la cardioïde. Après celle-ci, voici l'hypo-cycloïde triangulaire, merveilleuse entre toutes, et un chapitre spécial consacré à l'étude de ses podaires. Signalons aussi les ovales de Descartes, remarquables quant à leurs propriétés focales et les courbes dites polyzomales définies par des équations de la forme

$$\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2} + \sqrt{f_3} = 0$$

les f étant des premiers membres d'équation de coniques; ensuite les quartiques possédant un point double à tangentes confondues, telle que celle qui ressemble au $\varkappa$ grec et porte pour cette raison le nom de cette lettre; les courbes de Cassini, quartiques bicirculaires nées d'un problème d'astronomie; les quartiques dont les points singuliers sont des points d'inflexion, tels que la lemniscate de Bernoulli. Cette importante section se termine par l'étude de la courbe nommée *Muschellinie* (ligne en coquille) par Dürer, laquelle est encore rationnelle et simplement circulaire, par la triséeante qui est dans le même cas, et enfin par quelques généralités sur les quartiques considérées comme lieux géométriques attachés à de certaines coniques.

Dans une quatrième section, nous étudions des courbes de degré supérieur au quatrième. Cette étude est certainement plus restreinte que les précédentes, car, comme le remarque l'auteur, les courbes du troisième ordre forment un territoire bien défini dans l'empire mathématique, celle du quatrième un domaine dont certaines frontières sont encore imprécises, et, quant à celles de degré supérieur, quelque chose comme un pays dont quelques rares routes seulement sont tracées, cela en dépit d'efforts d'éminents géomètres comme M. Brocard, qui ont surtout trouvé, comme courbes remarquables du cinquième ordre, celles qui se rattachaient à des problèmes posés sur les coniques.

Voici, d'autre part, l'astroïde (hypocycloïde à quatre rebroussements réels) et la scarabée, la courbe de Watt, issue de considérations cinématiques, la néphroïde, sextique bicirculaire, l'atriphtaloïde qui est dans le même cas et qui est née de la considération d'une surface des mers simplifiée par quelques abstractions. Signalons encore parmi les sextiques le trifolium pratense; la section se termine par l'étude sommaire de courbes du neuvième et du vingt-cinquième ordre, issues de considérations relatives à la théorie des fonctions d'une variable complexe.

La cinquième section du livre est consacrée à des courbes algébriques spéciales qui, par exemple, ne sont pas forcément d'un degré déterminé.

Elles sont surtout nées de courbes de faible degré dont on veut généraliser et élever le degré de l'équation en conservant cependant la forme de celle-ci Telles sont, par exemple, la parabole et les hyperboles généralisées

$$y^n = p^{n-1} x \quad . \quad x^n y^p = a^{n+p} ,$$

les courbes dites « perles »

$$x^s (a \pm x)^r = \frac{a^{r+s}}{b^p} y^p$$

qui, pour $s = 1$, $r = 1$, $p = 2$ sont des coniques rapportées à un axe et à la tangente en un sommet, les courbes de Lamé

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1 ,$$

les courbes polyzomales dont il a déjà été question plus haut dans un cas particulier.

Signalons encore les courbes de Darboux présentant des propriétés imitées de celles de la parabole et de ses tangentes et celles de Serret dont les asymptotes passent toutes par un même point en y faisant des angles égaux. Si ces angles sont droits on retrouve l'hyperbole équilatère.

Nous ne pouvons que signaler les élégantes rosaces et plus généralement les feuilles géométriques dont les noms viennent de comparaisons botaniques, les ovales, les courbes triangulaires et toutes les courbes nées du problème du partage de l'angle en parties égales. Voici un chapitre intéressant et très général sur les courbes possédant un centre ou un axe de symétrie, un autre sur les courbes qu'une transformation géométrique déterminée change en elles-mêmes (courbes antipolaires, anallagmatiques, etc...).

Sous le titre de géométrie des polynômes, nous étudions maintenant spécialement les courbes dont les équations s'obtiennent en égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire d'un polynôme de variable complexe. On sait qu'il y a là un moyen général d'obtenir des familles de courbes orthogonales.

L'important problème de la rectification des courbes nous conduit ensuite à considérer celles qui sont rectifiables au moyen d'arcs de courbes simples, notamment par arcs de parabole, de cercle, d'hyperboles, d'ellipses (courbes de Serret), de lemniscates (courbes qui conduisent notamment aux spirales sinussoïdes). Nous terminons avec les courbes de Lissajou, nées cinématiquement de la combinaison de deux mouvements harmoniques et obtenues expérimentalement en acoustique par une méthode optique bien connue.

Nous quittons alors les courbes algébriques et pénétrons dans la sixième section consacrée aux courbes transcendantes. L'intégration d'équations différentielles d'une extrême simplicité conduit à de telles courbes et M. Loria montre rapidement que quelques considérations relatives à cette voie pourraient permettre un essai de classification. Beaucoup de ces courbes sont nées aussi de considérations géométriques spéciales et voici, par exemple, le problème de la quadrature du cercle qui en fait naître de très intéressantes, dites quadratrices.

Passons rapidement sur les courbes transcendantes les plus connues, telles que les spirales algébriques et transcendantes, la clothoïde, dont le rayon de courbure est inversement proportionnel à l'arc, toutes les roulettes ; signalons les pseudocycloïdes moins connues et que l'on déduit des véritables roulettes en donnant des valeurs imaginaires à certains paramètres constants, les courbes de Delaunay et Sturm qui sont des roulettes d'ellipses, les courbes syntrépentes et isotrépentes, nées de considérations cinématiques et propres, en effet, à transformer un mouvement circulaire en divers mouvements non uniformes, les courbes de Debeaune, nées d'un problème posé par ce géomètre à Descartes, les courbes de Ribaucour dont le rayon de courbure est proportionnel à la normale, les courbes de Norwich ou de Sturm et celles d'Euler dont le rayon de courbure est proportionnel au rayon vecteur.

Signalons encore les courbes trigonométriques $y = \sin x$, $\operatorname{tang} x$, etc.., la courbe logarithmique et leurs généralisations dites courbes hypertrigonométriques et courbes hypergéométriques. Sous le nom de courbes extraordinaires, M. Loria a rassemblé la courbe sans tangente de Weierstrass, les courbes qui remplissent une aire, celles dans l'équation desquelles figurent des fonctions numériques, etc...

Un très intéressant chapitre est consacré aux courbes de Klein et Lie dont l'équation en coordonnées homogènes est de la forme $x^a y^b z^c =$ constante. Nous voyons ensuite les courbes qui, sur une carte de Mercator, représentent les sections planes de la sphère.

L'étude des courbes transcendantes se termine par celles de ces courbes qui sont liées à des questions de statique, de physique mathématique, etc... Voici les tractrices, les chaînettes, les courbes élastiques, les polhodie et herpolhodie et différentes autres, telles que les courbes magnétiques.

La septième et dernière section de l'ouvrage est consacrée aux courbes dérivées de courbes primitivement connues, au moyen de certaines transformations, telles, par exemple, que celles que l'on obtiendrait en partant d'une même équation entre deux variables, en convenant que ces variables peuvent être tour à tour coordonnées cartésiennes, tangentielles, polaires, etc...

Signalons ensuite les courbes de poursuite, les développées, développantes et leurs généralisations, les courbes parallèles, les courbes radiales, lieux des extrémités d'un segment issu d'un point fixe et équipollent au rayon de courbure d'une courbe donnée, les caustiques, les podaires et antipodaires, les courbes isoptiques des points desquelles on voit une courbe donnée sous un angle donné et, comme cas particulièrement intéressant, les courbes orthoptiques.

Voici, de plus, les courbes différentielles et intégrales d'une courbe donnée $y = f(x)$ dont les équations s'obtiennent en remplaçant $f(x)$ dans la précédente, soit par la fonction dérivée, soit, au contraire, par la fonction primitive.

Signalons encore les *anticourbes (Gegencurven)* qui s'obtiennent quand on fait correspondre à un point (x, y) d'une courbe quelconque l'autre point d'intersection de deux cercles passant au point (x, y) et admettant respectivement pour centres les pieds des coordonnées x et y sur les axes.

Le dernier chapitre est consacré aux courbes dérivées d'un groupe de plusieurs courbes, par exemple celles dont l'ordonnée est une fonction donnée des ordonnées d'autres courbes.

Après ce dernier chapitre, l'auteur a ajouté quelques notes et notamment

une postface étendue et prodigieusement intéressante au point de vue historique et philosophique. Il y fait remarquer que, contrairement à ce que l'on pourrait croire au premier abord, les courbes transcendantes ne forment pas un ensemble beaucoup plus confus que les courbes algébriques et que beaucoup d'entr'elles, et notamment les plus connues, sont telles que le coefficient angulaire y' de la tangente s'exprime algébriquement en fonction des coordonnées x, y. On peut nommer *panalgébriques* les courbes de cette nature.

La longue analyse qui précède est incomplète et la décuplerait-on que ce défaut ne disparaîtrait pas, car dans un livre comme celui de M. Loria, chaque page appelle une réflexion; nous l'aurons, du moins, signalé comme un recueil d'une prodigieuse richesse et d'une admirable variété.

A. Buhl (Montpellier).

Galdeano (Dr. Zoel. G. de). — **Tratado de Análisis Matemático**; tomo primero: **Cálculo differencial.** (Nueva Enciclopedia matemática) — t. IV. 1 vol. in 8° (XII - 270 p.); Prix : 5 pesetas; Zaragoza, Casañal. 1904.

Le présent Ouvrage constitue le tome IV d'une Encyclopédie mathématique dont Mr de Galdeano a entrepris la publication. Dans sa préface, le savant professeur de l'Université de Saragosse se plaint avec amertume de la décadence lamentable de l'Enseignement supérieur en Espagne sous l'influence de programmes arriérés. Ceux-ci, dit-il, semblent dater de l'époque glorieuse, mais déjà bien lointaine, de Lagrange, de Lacroix et de Sturm. Tous les progrès modernes, réalisés à l'Etranger, en ont été soigneusement exclus. Mr de Galdeano proteste, avec éloquence, contre un pareil état de choses, si néfaste à l'avenir scientifique de sa patrie. Et, il se propose de réagir, dans la mesure du possible, en faisant paraître ce manuel de Calcul différentiel première partie d'un Traité complet d'Analyse.

En effet, l'Auteur s'est efforcé, dans ce petit volume, d'introduire, sous une forme très élémentaire, les principes les plus essentiels de la théorie actuelle des fonctions d'une variable réelle. C'est ainsi que, dès le début, après avoir parlé des nombres irrationnels, il donne des notions très claires sur les ensembles. La même préoccupation de rigueur et de simplicité se constate à propos des infiniment petits (*triangles infinitésimaux*), des séries, des dérivées (*dérivées des fonctions implicites — déterminants fonctionnels*) qui donnent lieu à autant de chapitres spéciaux. Puis, viennent les changements de variables, l'élimination des constantes et les fonctions arbitraires, le calcul des différences, et, enfin, quelques mots sur la recherche des fonctions primitives. Tous ces sujets sont accompagnés de nombreux exemples ou exercices, fort heureusement choisis.

La seconde partie du volume de Mr de Galdeano est consacrée aux applications analytiques du Calcul différentiel (*formule de Taylor — réversibilité des séries. — formule de Moivre et conséquences. — Fonctions hyperboliques. — Séries de Laplace et de Lagrange. — Décomposition des fractions algébriques. — Expressions indéterminées. Maximums et minimums*). On retrouve, dans l'exposé de ces diverses questions, les qualités d'élégance et de précision qui caractérisent le talent de Mr de Galdeano. Elles contribueront, nous l'espérons, non seulement au succès de son œuvre, mais encore à la réalisation des idées qui lui sont chères, pour le plus grand bien de l'Enseignement universitaire de son pays. M. Godefroy (Marseille).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaire des principaux périodiques:

American Journal of Mathematics, edited by Frank Morley, published under the Auspices of the John Hopkins University. Vol. xxvi. Baltimore.

N° 3. July 1904. — Edm. Landau : Bemerkungen zu Herrn Lehner's Abhandlung. — H.-E. Hawkes : On Hypercomplex Number Systems in Seven Units. — L.-E. Dickson : Memoir on Abelian Transformations.

N° 4. Octobre 1904. — E.-J. Wilczynski : Invariants of a System of Linear Partial Differential Equations, and the theory of Congruences of Rays. — C. de Polignac : On Elements Connected each to each by one or the other of Two Reciprocal Relations.

Annali di Matematica pura ed applicata, publiés par L. Bianchi, U. Dini, G. Jung, C. Segre. Série IIIa; Rebeschini, Milan.

T. IX. Fasc. 3 et 4. — Niels Nielsen : Recherches sur le carré de la dérivée logarithmique de la fonction gamma et sur quelques fonctions analogues. — Note sur quelques séries de puissances trouvées dans la théorie de la fonction gamma. — Recherches sur des généralisations d'une fonction de Legendre et d'Abel. — Evaluation nouvelle des formules de Binet, Endermann et Raabe concernant la fonction gamma. — Bianchi : Sulla deformazione dei paraboloidi. — Brusotti : Sulla curva razionale normale dello spazio a quattro dimensioni.

T. X. Fasc. 1. — Fubini : Sulle funzioni automorfe ed iperfuchsiane di più variabili indipendenti. — Tedone : Saggio di una teoria generale delle equazioni dell'equilibrioelastico per un corpoisotropo. — Vitali : Sopra le serie di funzioni analitiche.

Fasc. 2. — Niccoletti : Su un'equazione a radici reali. — Bianchi : Sopra alcune classi di congruenze rettilinee negli Spazî di curvatura costante. — Niels Nielsen : Sur quelques transformations d'une série de puissances.

Fasc. 3 et 4. — Gebbia : Le deformazioni tipiche dei corpi solidi elastici. — Guldberg : Mémoire sur les congruences linéaires aux différences finies. — Bigiavi : Sopra alcune equazioni differenziali lineari riducibili. — Lenzi : Sulla ricerca di un quarto integrale di 2° grado del sistema di equazioni differenziali de moto di un corpo solido in un liquido indefinito. — Fano : Ricerche sulla varietà cubica generale dello spazio a quattro dimensioni e sopra i suoi spazi pluritangenti. — Niels Nielsen . Recherches sur les polynomes et les nombres de Stirling. — Note sur quelques applications analytiques des polynomes de Stirling.

Bulletin des sciences mathématiques, rédigé par G. Darboux, E. Picard et J. Tannery, 2me série, T. xxviii. 1904. Gauthier-Villars, Paris.

Juillet. — Painlevé : Le problème moderne de l'intégration des équations différentielles.

Août. — Dolbnia : Sur la liaison entre la théorie de la transformation des fonctions elliptiques et la théorie analytique de la réduction des intégrales abéliennes.

Septembre. — G. Darboux : Etude sur le développement des méthodes géométriques, lue le 24 septembre 1904 au Congrès des sciences de St-Louis.

Octobre et novembre. — E. Picard : Sur le développement de l'analyse mathématique et ses rapports avec quelques autres sciences. (Rapport présenté au Congrès de St-Louis.)

Décembre. — H. Poincaré : L'état actuel et l'avenir de la Physique mathématique. (Rapport présenté au Congrès de St-Louis).

Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, publiés par les secrétaires perpétuels. Gauthier-Villars, Paris, 1904. Tome cxxxix.

4 juillet. — E. Picard : Sur certaines équations fonctionnelles et sur une classe de surfaces algébriques. — H. Lebesgue : Sur les fonctions représentables analytiquement. — E. Martin : Sur la théorie générale des réseaux et des congruences. — W. Stekloff : Sur une égalité générale commune à toutes les fonctions fondamentales.

11 juillet. — L. Raffy : Sur deux problèmes relatifs aux surfaces isothermiques. — E. Jouguet : Sur l'onde explosive.

18 juillet. — Pas de communication mathématique.

25 juillet. — E. Picard : Sur une équation fonctionnelle. — P. Boutroux : Sur les singularités de l'équation $y' = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \ldots$

1er août. — H. Deslandres : Organisation générale des recherches solaires. — P. Boutroux : Sur les zéros des fonctions entières d'ordre entier.

8 août. — J. Boussinesq : Equations générales du mouvement des nappes d'eau infiltrées dans le sol. — A. Demoulin : Sur l'emploi d'un tétraèdre de référence mobile en géométrie cayleyenne. — M. Potron : Sur les groupes d'ordre p^m (p premier) dont tous les sous-groupes d'ordre p^{m-2} sont abéliens. — M. Rémoundos : Sur un théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions entières.

16 août. — J. Boussinesq : Equation de deuxième approximation pour l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et à faibles pentes. — E. Mathis : Note sur une méthode d'intégration. — R. de Saussure : Mémoire sur les grandeurs de la mécanique.

22 août. — J. Boussinesq : Petites dénivellations d'une masse aqueuse infiltrée dans le sol, de profondeurs quelconques, avec ou sans écoulement au dehors.

29 août. — H. Perrotin : Sur la chute des Perseïdes en 1904. — F. Riesz : Sur la résolution approchée de certaines congruences.

5, 12 et 19 septembre. — Pas de communications mathématiques.

26 septembre. — J. Bigourdan : Sur une cause de variabilité des erreurs de division dans certains cercles gradués. — L. Libert : Les Perseïdes en 1904.

3 octobre. — Pas de communications mathématiques.

10 octobre. — J. Maillard : Sur l'expérience de Perrot.

17 octobre. — L. Bianchi : Sur les équations de Moutard avec des groupes de solutions quadratiques. — E. Pascal : Sur les équations différentielles auxquelles satisfont les résultants et discriminants de forme binaire.

24 octobre. — H. Poincaré présente le T. xiii des « Œuvres complètes de Laplace ». — L. Leau : Sur les fonctions entières de genre fini. — S. Bernstein : Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre.

7 novembre. — Traynard : Sur une surface hyperelliptique.

14 et 21 novembre. — Pas de communications mathématiques.

28 novembre. — D. Pompeiu : Sur les singularités des fonctions analytiques uniformes.

5 décembre. — E. Picard : Sur la formule générale donnant le nombre des intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques. — V. Volterra : Sur les équations différentielles du type parabolique. — Potron : Sur les groupes d'ordre p^m (p premier, $m>4$) dont tous les diviseurs d'ordre p^{m-2} sont abéliens.

12 décembre. — P. Faton : Sur l'approximation des incommensurables et les séries trigonométriques. — L. Vavasseur : Sur les groupes continus, finis ou infinis, de l'espace. — Padé : Remarques sur une méthode pour l'étude de la convergence de certaines fractions continues.

19 décembre. — Prix décernés et prix proposés (voir plus haut, pp. 61 à 63).

26 décembre. — Painlevé : Sur le théorème des aires et des systèmes conservatifs.

Revue générale des sciences pures et appliquées, dirigée par L. Olivier, 15me année, 1904. Armand Colin, Paris.

15 décembre. — Em. Picard : Les principes de la mécanique (à propos d'un livre de M. Mach).

Revue de métaphysique et de morale, dirigée par Xavier Léon. 12me année, 1904. Armand Colin, Paris.

N° 4. Juillet. — L. Couturat : Les principes de mathématiques : IV. Le Continu ; V. L'idée de grandeur. — A. Rey : La philosophie scientifique de M. Duhem. — L. Weber : La question de l'Ecole polytechnique.

N° 5. Septembre. — Vailati : Sur une classe remarquable de raisonnements par réduction à l'absurde. — L. Couturat : Les principes des mathématiques ; VI. La Géométrie. — G. Lechalas : Une nouvelle tentative de réfutation de la Géométrie générale.

N° 6. Novembre. — E. Boutroux : Sur la notion de correspondance dans l'analyse mathématique. — Hartmann : Définition physique de la force. — L. Couturat et F. Rauh : La section de logique et philosophie des sciences au IIme Congrès international de philosophie.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, herausgegeben von F. Pietzker. X. Jahrg., 1904 ; Otto Salle, Berlin.

Nr. 1. — M. Latrille : Ist auch für Mathematiker und Naturwissenschaftler ein längerer Urlaub zur wissenschaftlichen Weiterbildung wünschenswert ? — Kurt Geissler : Eine neue Behandlung der Unendlichen im mathematischen Unterrichte. — F. Ebner : Die Schubkurbel. — Karl Bochow : Zur Behandlung der regelmässigen Vielecke (Fortsetzung). — Otto Schneider : Planimetrische Ableitung der cubischen Gleichung für die Winkeltrisection.

Nr. 2. — Kurt Geissler : Eine neue Behandlung des Unendlichen im mathematischen Unterrichte (Schluss). — K. Franz : Zur Frage des Unterrichtes in der Infinitesimalrechnung an den höheren Lehranstalten. — W. Brüsch : Informations-Kurse und -Reisen für Mathematiker und Naturwissenschaftler. — E. Puller : Elementare Behandlung von Maximum- und Minimum-Aufgaben.

Nr. 3. — E. Grimsehl : Ueber den Betrieb der Physik als Naturwissenschaft. — H. Bodenstedt : Geometrographische Fünf-und Zehneckscons-

tructionen. — F. Ebner und A. Schülke : Infinitesimalrechnung im Unterrichte.

Nos 4, 5 et 6. — M. Nath : Die Bildungsaufgabe der Mathematik im Lehrplan der höheren Schulen. — W. Koch : Weitere Untersuchungen über Näherungsformeln zur Berechnung der Ludolfschen Zahl. — K. Geissler : Der anschauliche Zusammenhang der Kegelschnitte durch die unendliche Kegelschnittkugel. — Diskussion über die Bildungsaufgabe der Mathematik.

2. Livres nouveaux :

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, begründet von Mor. Cantor ; B.-G. Teubner, Leipzig.

Heft xviii. — Heiberg : Mathematisches zu Aristoteles. — Conr. H. Müller : Studien z. Geschichte des math. Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrh. — Rich. Lindt : Das Princip der virt. Geschwindigkeit, seine Beweise und die Unmöglichkeit seiner Umkehrung bei Verwendung des Begriffes « Gleichgewicht eines Massensystems ». — Un vol. in-8o de 196 pages, prix : Mk 6.

Heft xix. — Heinr. Liebmann : N. J. Lobatschefskijs Imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale, aus dem Russischen übersetzt. — Un vol. in-8o de 188 pages avec 1 planche ; prix : Mk 8.

Annuaire pour l'an 1905, publié par le Bureau des Longitudes, avec une Notice de M.-P. Hatt : *Explication élémentaire des marées.* Prix : 1 fr. 50. Gauthier-Villars, Paris.

W.-M. Baker and A.-A. Bourne. — **Elementary Algebra.** Part ii, with or without Answers, 2 s. 6 d.; George Bell and Sons, London.

W.-M. Baker and A.-A. Bourne. — **Exemples in Algebra.** Extracted from the above. *Complete* with or without Answers 3 s.; *Part* i, without Answers, 1 s. 6 d.; Part ii, without Answers, 2 s.; George Bell and Sons, London.

Fr. Bremer. — **Leitfaden der Physik** für die oberen Klassen der Realanstalten, mit besonderer Berücksichtigung von Aufgaben und Laboratoriumsübungen. — Un vol. cart., 294 p., prix : Mk. 3,20. B. G. Teubner, Leipzig.

A.-H. Bucherer. — **Mathematische Einführung in die Elektronentheorie.** — Un vol. cart. in-8o, 148 p., prix : Mk. 3,20. B. G. Teubner, Leipzig.

E. Carvallo. — **Leçons d'Electricité.** — 1 vol. XIV, 259 p. ; prix : Fr. 10.—. Librairie polytechnique Ch. Béranger, Paris.

E. Cesaro. — **Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung,** mit zahlreichen Uebungsbeispielen. Deutsch von G. Kowalewski. — Un vol. relié, 894 p., prix : 15 M.; B.-G. Teubner, Leipzig.

J.-C. Classen. — **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus,** t. ii ; Sammlung Schubert. — Un vol. cart. 251 p.; prix : Mk. 7. — G. J. Gœschen, Leipzig.

L. Couturat et L. Leau. — **Extraits de l'Histoire de la langue universelle.** — Un vol. in-16, 82 p.; Librairie Hachette, Paris.

Irv. Fisher. — **Kurze Einleitung in die Differential und Integralrechnung,** deutsch von N. Pinkus. — Un vol. cart. 72 p.; prix : Mk. 1,80 ; B. G. Teubner, Leipzig.

A. Fuhrmann. — **Aufgaben aus der analytischen Mechanik.** I. Aufgaben

aus der analyt. Statik fester Körper. 3[te] verb. u. vermehrte Auflage. — Un vol. cart. m. f., 206 p.; prix : Mk. 3,60 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Frid. Kaucic. — **Georg Freiherr von Vega.** Zweite verbesserte illustrirte Auflage. 58 p. ; im Selbstverlage des Verfassers, Wien.

Georges Lechalas. — **Introduction à la Géométrie générale.** — Un vol. in-16, IX, 58 p.; prix : 1 fr. 75 ; Gauthier-Villars, Paris.

H. Müller u. M. Kutnewsky. — **Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie.** II Teil. Ausgabe A, für Gymnasien. Zweite verbesserte u. stark gekürzte Auflage. — Un vol. cart. in-8°, 273 p.; prix : Mk. 2,20 ; B.-G. Teubner, Leipzig.

Em. Picard. — **Sur le développement de l'Analyse** et ses rapports avec diverses sciences. Conférences faites en Amérique. — 1 vol., 168 p. ; prix : Fr. 3.50 ; Gauthier-Villars, Paris.

Salv. Pincherle. — **Lezioni di Analisi Algebrica** dati nella R. Università di Bologna e redatte per uso degli studenti. Fasc. I. — Un vol. 143 p.; prix : L. 4. — ; Zanichelli, Bologna.

Reusch. — **Planimetrische Konstruktionen** in geometrischer Ausführung. — Un vol. broché, prix : Mk. 1. — B. G. Teubner, Leipzig.

V[te] de Salvert. — Sur une classe de quadratures de fonctions elliptiques par rapport à leur module. — Un fasc. de 142 p., en vente à la Librairie Gauthier-Villars, Paris.

Fr. Schilling. — **Ueber die Anwendungen der darstellenden Geometrie** insbesondere über die Photogrammetrie, Vorträge gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern, 1904. — Un vol. br., 198 p. et 5 planches ; B.-G. Teubner, Leipzig.

O. Schlömilch. — **Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis.** Erster Teil : *Aufgaben aus der Differentialrechnung.* 5[te] Auflage, bearbeitet von E. Nætsch. — Un vol. cart. in-8°, 372 p.; prix : M. 8. — ; B. G. Teubner, Leipzig.

Rob.-Fors. Scott. — **The Theory of Determinants** and their applications. Second Edition, revised by G. B. Mathews. — Un vol. 288 p.; prix : 9 s. University Press, Cambridge ; Clay and Sons, Londres.

Dav.-Eug. Smith. — **The Outlook for Arithmetic in America.** — (Copies of this pamphlet will be sent postpaid on request.) — Une brochure de 11 pages. Ginn and Comp., New-York.

O. Stolz u. J.-A. Gmeiner. — **Einleitung in die Funktionentheorie.** In 2 Abteilungen. I. *Abteilung.* (Sammlung Teubner B. XIV). — Un vol. relié, 242 p.; prix : M. 6. — B. G. Teubner, Leipzig.

Jules Tannery. — **Introduction à la théorie des fonctions** d'une variable. Deuxième édition entièrement refondue. — T. I. Nombres irrationnels, ensembles, limites, séries, produits infinis, fonctions élémentaires, dérivées.— Un vol. gr. in-8°, 422 p.; prix : 14 fr.; Librairie Hermann, Paris.

W. Voigt. — **Thermodynamik,** II. Teil. (*Sammlung Schubert*). — Un vol. cart., 370 p. et une planche ; prix : Mk. 10. — G.-J. Gœschen, Leipzig.

H. de Vries. — **Die Lehre von der Zentralprojection** im vierdimensionalen Raume. — Un vol. 78 p.; prix : Mk. 3. — G. J. Gœschen, Leipzig.

E.-T. Whittaker. — **A Treatise on the analytical Dynamics** of Particles and Rigid Bodies ; with an Introduction to the Problem of three Bodies. — Un vol. gr. in-8°, relié, 414 p.; University Press, Cambridge ; Clay and Sons, Londres.

SUR LES FONDEMENTS DE LA LOGIQUE ET DE L'ARITHMÉTIQUE [1]

Si dans la recherche des fondements de la Géométrie nous sommes aujourd'hui d'accord, quant à l'essentiel, sur les voies à prendre et les buts à poursuivre, on ne saurait en dire autant des fondements de l'Arithmétique : ici les opinions les plus différentes se dressent encore en face les unes des autres.

Effectivement, lorsqu'on passe de la Géométrie à l'Arithmétique, on rencontre des difficultés qui sont en partie d'une espèce nouvelle. Dans l'analyse des fondements de la Géométrie on peut laisser de côté certaines difficultés, de nature purement arithmétique ; mais dès qu'il s'agit de fonder l'Arithmétique, il semble qu'on n'a pas le droit de s'appuyer sur une autre discipline. Pour mettre clairement en évidence les difficultés fondamentales qui se présentent, je ne saurais mieux faire que de soumettre à une brève revue critique les points de vue adoptés par divers savants.

L. Kronecker voyait, comme on sait, dans le concept de nombre entier le fondement propre de l'Arithmétique. Il considérait le nombre entier, en tant que concept général (valeur paramétrique) comme directement et immédiatement donné ; ce qui l'empêcha d'apercevoir que le concept de nombre entier doit, cependant, et peut être fondé. A cet égard, Kronecker est un *dogmatique*. Il reçoit comme un dogme le nombre entier doté de ses propriétés fondamentales et il ne cherche pas à remonter plus arrière.

H. Helmholtz représente le point de vue *empiriste*. Mais

---

[1] Communication faite par M. D. Hilbert (Göttingue), au IIIme Congres international des mathématiciens, à Heidelberg, le 12 août 1904 ; traduction de M. P. Boutroux (Paris).

toute tentative d'explication empirique me paraît échouer devant ce fait que jamais l'expérience ne saurait rien nous apprendre relativement à l'existence possible ou actuelle d'un nombre arbitrairement grand. Le nombre des choses qui sont objets de notre expérience reste en effet toujours, quelque grand qu'il soit, inférieur à une limite finie.

E.-B. Christoffel et quelques autres adversaires de Kronecker ont eu le juste sentiment que le concept de nombre irrationnel est nécessaire à l'Analyse, si l'on ne veut pas qu'elle soit tout entière frappée de stérilité ; dès lors, soit en s'efforçant de déterminer des caractères « positifs » de ce concept, soit par d'autres moyens analogues, ils ont tâché de sauvegarder le nombre irrationnel. Ce sont, à cet égard, des *opportunistes*. Ils n'ont toutefois pas réussi, selon moi, à ruiner radicalement le point de vue de Kronecker.

Parmi les savants qui ont pénétré plus avant dans l'essence du nombre entier, je citerai les suivants :

G. Frege se propose de fonder les lois de l'Arithmétique en s'appuyant sur la Logique (au sens usuel du mot). Il a eu le mérite de discerner les propriétés essentielles du concept de nombre entier, comme aussi la signification du principe de l'induction complète. Mais sa doctrine soulève quelques difficultés. Fidèle à son plan, il admet, entr'autres principes, qu'un concept (un ensemble) se trouve défini et immédiatement utilisable dès que l'on sait dire d'un objet quelconque s'il rentre ou ne rentre pas dans cet ensemble (le concept de « quelconque », lui non plus, n'est pas autrement déterminé). Mais alors Frege se trouve désarmé devant les paradoxes de la théorie des Ensembles, paradoxes dont la considération de l'Ensemble de tous les Ensembles nous fournit un exemple et qui établissent, selon moi, que les notions et les méthodes de la logique usuelle n'ont pas encore la précision et la rigueur réclamées par la théorie des Ensembles. *Or, ce devrait être, au contraire, l'un des objets principaux poursuivis, de prime abord, par celui qui étudie le concept de nombre, que d'échapper à ces contradictions et d'éclaircir ces paradoxes.*

R. Dedekind a clairement reconnu les difficultés d'ordre

mathématique que l'on rencontre lorsqu'on cherche à fondre le concept de nombre et, le premier, avec une rare pénétration, il a construit une théorie des nombres entiers. Je qualifierai, cependant, sa méthode de *transcendantale*, car, voulant prouver l'existence de l'Infini, Dedekind s'engage dans un raisonnement qui repose sur des idées métaphysiques comme en invoquent souvent les philosophes. C'est là une voie que je ne saurais regarder comme praticable, ni comme sûre ; car elle nous accule à une contradiction insurmontable en faisant appel au concept de « l'ensemble de tous les objets ».

G. Cantor a bien senti cette contradiction, et c'est ce qui l'a conduit à établir une distinction entre les Ensembles « consistants » et les Ensembles « non-consistants ». Mais il ne me paraît pas avoir fondé cette distinction sur un criterium suffisamment précis. Force m'est donc de déclarer que sur ce point, le point de vue de M. Cantor laisse encore place à l'appréciation *subjective* et qu'il ne saurait nous fournir une certitude objective.

J'estime, pour ma part, que toutes les difficultés ainsi soulevées sont surmontables et que l'on peut fonder le concept de nombre d'une manière parfaitement rigoureuse et satisfaisante. La méthode que j'emploie à cet effet est une méthode *axiomatique* dont je voudrais brièvement faire connaître le principe.

On regarde d'ordinaire l'Arithmétique comme une partie de la Logique et, lorsqu'on cherche à fonder cette science, on prend généralement pour point de départ les notions reçues dans la Logique usuelle. Cependant, si nous y regardons de près, nous constatons que dans les principes logiques, tels que l'on a coutume de les présenter, se trouvent impliquées déjà certaines notions arithmétiques, par exemple la notion d'Ensemble et, dans une certaine mesure, la notion de Nombre. Ainsi, nous nous trouvons pris dans un cercle, et c'est pourquoi, afin d'éviter tout paradoxe, il me paraît nécessaire de développer simultanément les principes de la Logique et ceux de l'Arithmétique.

Comment je me représente ce développement simultané,

je ne puis que l'esquisser dans ces quelques pages. Que l'on veuille bien m'excuser si je me borne à indiquer sommairement dans quelle direction j'ai poursuivi mes recherches. Encore, afin d'être plus facilement compris, ferai-je usage de la langue ordinaire ainsi que des lois logiques qui y sont impliquées; il faudrait procéder autrement si l'on voulait rendre parfaitement rigoureuse la construction synthétique qui va suivre.

Soit un objet de notre pensée que nous appellerons d'un seul mot : *Objet.* Nous le représenterons par un signe.

Prenons tout d'abord en considération l'Objet 1 (*un*). Les groupes formés avec cet Objet, deux, trois ou plusieurs fois répété, c'est-à-dire les groupes tels que :

$$11, \quad 111, \quad 1111,$$

sont appelés *Combinaisons* de l'Objet 1 avec lui-même. De même, toute combinaison de ces Combinaisons, par exemple :

$$(1)\,(11), \quad (11)\,(11)\,(11), \quad \big((11)\,(11)\big)\,(11), \quad \big((111)\,(1)\big)\,(1),$$

est également une Combinaison de l'Objet 1 avec lui-même. Les Combinaisons seront à leur tour regardées comme des Objets ; afin de distinguer l'Objet initial 1, nous l'appellerons *Objet simple.*

Donnons-nous maintenant, avec 1, un second Objet simple que nous représenterons par le signe $=$, et considérons les Combinaisons formées avec nos deux Objets, par exemple :

$$1=, \; 11=, \; (1)\,(=1)\,(===), \; \big((11)\,(1)\,(=)\big)\,(==), \; 1=1, \; (11)=(1)\,(1).$$

Nous dirons que la Combinaison *a* des Objets simples 1, $=$ *diffère* de la Combinaison *b*, si ces deux Combinaisons se distinguent de quelque manière (ne sont pas *identiques*), soit que l'ordre et l'arrangement de leurs termes soient différents, soit que les Objets 1 et $=$ n'y entrent pas de la même manière.

Cela posé, imaginons que les Objets 1 et $=$ et leurs Combinaisons soient, par un procédé quelconque, répartis entre

deux classes, la *classe des êtres* et la *classe des non-êtres*. Un Objet quelconque appartenant à la classe des êtres diffère d'un Objet quelconque appartenant à la classe des non-êtres. Toute Combinaison des deux Objets simples 1, = appartient à l'une ou à l'autre des deux classes.

Soit $\bar{a}$ une Combinaison des deux Objets fondamentaux 1 et = : nous désignerons également par a la *Proposition* affirmant que a appartient à la classe des êtres, et nous représenterons par $\bar{a}$ la *Proposition* affirmant que a appartient à la classe des non-êtres. Nous dirons que a est une Proposition *exacte*, si a appartient effectivement à la classe des êtres; de même $\bar{a}$ sera une Proposition *exacte*, si a appartient à la classe des non-êtres. Les Propositions a et $\bar{a}$ sont *contradictoires* entre elles.

L'ensemble de deux propositions A, B, que l'on représente par le symbole

$$A \mid B,$$

et qui s'énonce : « A entraîne B » ou « Si A est exact, B est exact », est à son tour une Proposition, dans laquelle A est la *prémisse* et B la *conclusion*. La prémisse et la conclusion peuvent elles-mêmes comprendre plusieurs Propositions, telles que A_1, A_2... ou B_1, B_2, B_3...; l'on a alors, par exemple :

$$A_1 \text{ et } A_2 \mid B_1 \text{ ou } B_2 \text{ ou } B_3$$

ce qui s'énonce : « A_1 et A_2 entraînent B_1, ou B_2, ou B_3 ».

L'emploi du symbole o. (*ou*) nous permettrait, puisque la négation a été également introduite, de nous passer du symbole | . Si je continue à faire usage de ce symbole, c'est uniquement afin de me rapprocher le plus possible du langage courant.

Par A_1, A_2,... nous désignerons les Propositions que l'on obtient en substituant à l'*indéterminée* x, dans une même Proposition A (x), les Objets 1, = et leurs diverses Combinaisons. Les Propositions

$$A_1 \text{ ou } A_2 \text{ ou } A_3, \ \ldots \qquad A_1 \text{ et } A_2 \text{ et } A_3, \ \ldots$$

seront aussi respectivement désignées par les symboles :

A $(x^{(o)})$, c'est-à-dire « au moins pour *un* x » ;

A $(x^{(u)})$, c'est-à-dire « pour un x *quelconque* » ;

c'est là une simple abréviation d'écriture.

Cela posé, avec les deux objets 1, = que nous nous sommes donnés, nous formons les Propositions suivantes :

$$(1) \qquad x = x$$

$$(2) \qquad \{x = y \text{ et } w(x)\} \mid w(y) .$$

Dans ces Propositions, x (mis pour $x^{(u)}$), représente l'un des deux Objets fondamentaux ou l'une quelconque de leurs Combinaisons. Dans (2), y (c'est-à-dire $y^{(u)}$) représente également l'un de ces deux Objets ou l'une de leurs Combinaisons, et $w(x)$ est une Combinaison arbitraire formée avec l'*indéterminée* x, (c'est-à-dire $x^{(u)}$). La Proposition (2) s'énonce en ces termes : Si l'on a $x = y$ et $w(x)$, on aura $w(y)$.

Les Propositions (1) et (2) constituent la *Définition du concept* = (*égal*), et sont pour cette raison appelées *Axiomes*.

Lorsque dans les Axiomes (1) et (2) on substitue aux indéterminées x et y les Objets simples 1 et = ou certaines de leurs Combinaisons, on obtient des Propositions que nous appellerons *Propositions déduites des Axiomes*. Soit une série de Propositions supposée telle que la dernière Proposition ait des prémisses identiques aux conclusions des précédentes : si nous prenons comme prémisse les prémisses des Propositions initiales et comme conclusion la conclusion de la Proposition finale, nous obtenons une nouvelle Proposition qui sera également considérée comme *Proposition déduite des Axiomes*. L'emploi répété du même procédé nous permettra toujours d'obtenir des Propositions nouvelles.

Parmi ces Propositions je choisis celles qui ont la forme d'une Proposition simple a (sans prémisse), et je les situe dans la classe des êtres ; je laisse de côté tous les autres Objets, lesquels pourront appartenir à la classe des non-êtres. Nous voyons que de (1) et (2) on ne pourra tirer que des Propositions de la forme $\alpha = \alpha$, où α est une Combinaison des

Objets 1 et $=$. Les Axiomes (1) et (2) doivent donc être considérés comme vrais relativement à la répartition adoptée entre la classe des êtres et celle des non-êtres; je veux dire que ces Axiomes sont des « Propositions exactes ». En conséquence, nous regarderons le concept de l'égalité, que définissent ces Axiomes, comme un concept *exempt de contradiction*.

Il est bon de remarquer à ce propos que dans les Axiomes (1) et (2) ne sauraient en aucun cas figurer des Propositions de la forme $\overline{a}$, c'est-à-dire des Propositions affirmant que telle ou telle Combinaison appartient à la classe des non-êtres. Nous pourrions donc satisfaire à ces deux Axiomes lors même que nous rangerions dans la classe des êtres toutes les Combinaisons des deux Objets simples 1 et $=$, et laisserions vide la classe des non-êtres. La répartition adoptée plus haut est cependant préférable, car elle montre comment on devra procéder lorsqu'on sera en présence de cas plus difficiles.

Nous allons maintenant poursuivre notre reconstruction logique de la pensée mathématique en adjoignant aux deux Objets 1 et $=$ trois nouveaux Objets représentés par les symboles suivants : u signifiant « infini » ou « ensemble infini », f signifiant « conséquent », et f' signifiant « opération correspondante ». Nous poserons relativement à ces Objets trois nouveaux Axiomes :

$$(3)\quad f(ux) = u(f'x)$$
$$(4)\quad f(ux) = f(uy) \mid ux = uy$$
$$(5)\quad \overline{f(ux) = u1}$$

Dans ces Axiomes, l'indéterminée x (au sens de $x^{(u)}$) représente l'un quelconque des cinq Objets fondamentaux dont nous disposons maintenant, ou l'une quelconque de leurs Combinaisons. Donnons au symbole u le nom d'*Ensemble infini*, et appelons *élément* de cet Ensemble u la Combinaison ux (par exemple, $u1$, ou u (11), ou uf). Alors l'Axiome (3) signifie que tout élément ux admet comme conséquent un Objet déterminé $f(ux)$, lequel est lui-même un élément de l'Ensemble u et est représenté par $u(f'x)$. L'Axiome (4) ex-

prime ce fait que si deux éléments de l'Ensemble u ont le même conséquent, ces deux éléments sont égaux entre eux. L'Axiome (5) nous apprend que l'élément $u1$ n'a pas de conséquent : l'élément $u1$ sera dès lors considéré comme étant le *premier* élément de u.

Cela posé, les nouveaux Axiomes doivent être soumis au même examen que tout à l'heure les Axiomes (1) et (2). Ces deux premiers Axiomes, eux aussi, doivent être éprouvés à nouveau, puisque nous avons accru leur extension en désignant désormais par x et y les Combinaisons formées avec cinq Objets simples au lieu de deux.

Demandons-nous donc s'il peut y avoir contradiction entre Propositions déduites des Axiomes (1,..., 5), ou si l'on réussira au contraire à répartir de telle manière (entre les classes des êtres et des non-êtres) les cinq Objets fondamentaux et leurs Combinaisons, que toute Proposition déduite des cinq Axiomes soit une « Proposition exacte » relativement à la répartition adoptée. Pour répondre à cette question, nous remarquerons que l'Axiome (5) est le seul qui ait la forme $\overline{a}$, c'est-à-dire le seul Axiome affirmant qu'une certaine Combinaison appartient à la classe des non-êtres. Une Proposition contredisant cet Axiome devrait donc être de la forme

$$(6) \qquad f(ux^{(o)}) = u1$$

Or, je vais montrer qu'on ne saurait déduire des Axiomes (1,.., (4) aucune Proposition de cette forme.

Je donnerai le nom d'égalité homogène (par égalité j'entends une Combinaison de la forme $a = b$) à toute égalité dans laquelle les deux membres a et b sont composés du même nombre d'Objets simples (deux, trois, quatre Objets simples, ou davantage). Par exemple, les égalités

$$(11) = (fu), \qquad (ff) = (uf'), \qquad (f\,11) = (u\,1 =),$$
$$(f\,1)\,(f\,1) = (1111), \qquad (f(ff'u)) = (1\,uu\,1)$$

sont des égalités homogènes. Des Axiomes (1) et (2) on ne saurait tirer, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, que des égalités de la forme $\alpha = \alpha$, c'est-à-dire des égalités homo-

gènes. De même l'Axiome (3), lorsqu'on y remplace x par un Objet quelconque, ne donne que des égalités homogènes. Et il en est encore ainsi de l'Axiome (4), à condition que la prémisse de cet Axiome soit elle-même une égalité homogène. Ainsi toute Proposition déduite des Axiomes (1),..., (4) est une égalité homogène. Au contraire l'égalité (6), qui seule pourrait contredire l'Axiome (5), n'est pas homogène, puisque l'on doit y remplacer x par une certaine Combinaison, en sorte que le côté gauche est une Combinaison de trois Objets simples au moins, tandis qu'au côté droit ne figurent jamais que les deux Objets simples u et 1.

Tel est le principe de la méthode qui me permet de démontrer la légitimité des Axiomes (1),..., (5). Pour donner une démonstration complète, il faudrait faire appel au concept de nombre ordinal fini et établir quelques propositions sur le concept d'égalité numérique (appliqué aux deux membres d'une égalité); au point où nous en sommes, nous n'aurions pas de difficulté à obtenir ces propositions. Il faudrait également, pour être complet, tenir compte de certaines considérations sur lesquelles je reviendrai à la fin de cet article (voir V).

Nous sommes ainsi conduits au résultat suivant : On obtient une répartition satisfaisant aux conditions voulues si l'on range dans la classe des êtres tous les Objets a qui sont des Propositions déduites des Axiomes (1),..., (4), et dans la classe des non-êtres tous les autres Objets, en particulier les Objets de la forme $f(ux) = u1$. Les cinq Axiomes posés plus haut jouissent, en conséquence, de cette propriété qu'ils ne sauraient conduire à aucune contradiction. C'est pourquoi les Objets définis par ces axiomes seront considérés comme des concepts ou opérations *exempts de contradiction;* ils seront regardés comme *existant*. En particulier, par la méthode qui vient d'être exposée, l'affirmation de l'*existence de l'Infini* u se trouve légitimée ; car elle acquiert une signification définie et un contenu auquel nous pourrons nous tenir désormais.

Les considérations que je viens d'esquisser sont le premier exemple d'une démonstration directe établissant qu'il n'y a pas contradiction entre différents Axiomes. La démonstration

directe s'imposait ici, puisqu'il était interdit de recourir à la méthode ordinaire — employée principalement en Géométrie — laquelle consiste à considérer des cas particuliers convenablement choisis, et à former des exemples.

Le succès de la démonstration directe tient ici principalement à cette circonstance que nous n'avons à considérer qu'une seule Proposition de la forme $\bar{a}$ (Proposition affirmant qu'une certaine Combinaison appartient à la classe des non-êtres) : c'est à savoir la Proposition qui figure dans l'Axiome (5).

Nous pouvons maintenant poursuivre notre synthèse. Exprimant toujours dans le même langage les Axiomes bien connus relatifs à l'Induction complète, nous constatons que ces Axiomes peuvent être, sans contradiction, adjoints aux précédents; ce qui établit que l'*Existence du plus petit Infini*[1] (c'est-à-dire du *type ordinal* défini par la suite 1, 2, 3...) est exempte de contradiction.

Il n'y a aucune difficulté à fonder le concept de nombre ordinal fini à l'aide des principes que nous avons posés. On s'appuiera pour cela sur l'Axiome suivant : Etant donné un Ensemble qui contient le premier élément du nombre ordinal, et qui, au cas où il en contient un élément (quelconque), contient aussi l'élément suivant, cet Ensemble contient nécessairement le dernier élément du nombre ordinal. Que cet axiome peut être sans contradiction adjoint aux précédents, la considération d'un exemple (soit du nombre *deux*) le montrera facilement. Il faudra montrer ensuite qu'il est possible d'ordonner les éléments du nombre ordinal fini de telle manière que tout Ensemble partiel formé avec ces éléments ait un premier et un dernier élément. Nous établirons ce point en définissant un nouvel objet $<$ au moyen de l'Axiome

$$(x < y \text{ et } y < z) \mid x < z ,$$

et en montrant que cet Axiome peut, sans contradiction, être joint aux précédents, lorsque x, y, z désignent des éléments

[1] Voir la communication que j'ai présentée au II[e] Congrès International des Mathématiciens, Paris, 1900 : *Problèmes mathematiques. 2° De la non-contradiction des Axiomes de l'Arithmétique.*

quelconques du nombre ordinal fini. Après quoi nous pourrons prouver, en nous appuyant sur l'existence du plus petit infini, qu'étant donné un nombre ordinal fini quelconque, il existe un nombre ordinal qui lui est supérieur.

J'énoncerai maintenant brièvement les principes que nous devrons prendre pour guides si nous poursuivons la reconstruction des lois de la pensée mathématique selon le point de vue que j'ai adopté.

I. Supposons que l'on soit arrivé à un stade déterminé de l'évolution de la théorie : la condition nécessaire et suffisante pour qu'une Proposition nouvelle soit considérée comme exacte est que, si on l'adjoint en tant qu'Axiome aux Propositions déjà reconnues exactes, on ne rencontre pas de contradiction. En d'autres termes, l'adjonction du nouvel Axiome doit conduire à des Propositions qui ne soient pas en contradiction avec la répartition de l'ensemble des Objets entre la classe des êtres et celle des non-êtres.

II. Les indéterminées qui figurent dans les Axiomes — en place du « quelconque » ou du « tous » de la logique ordinaire — représentent exclusivement l'ensemble des Objets et des Combinaisons qui nous sont déjà acquis en l'état actuel de la théorie, ou que nous sommes en train d'introduire. Lors donc qu'on déduira des Propositions des Axiomes considérés, ce sont ces Objets et ces Combinaisons seules que l'on sera en droit de substituer aux indéterminées. Il ne faudra pas non plus oublier que, lorsque nous augmentons le nombre des Objets fondamentaux, les Axiomes acquièrent du même coup une extension nouvelle et doivent, par suite, être de nouveau mis à l'épreuve et au besoin modifiés.

III. Nous avons défini l'Ensemble en général, en le considérant comme étant un Objet de la pensée, m. Les éléments de l'Ensemble sont les combinaisons mx ; en sorte que, contrairement à l'usage établi, nous regardons la notion d'Elément comme postérieure à la notion d'Ensemble.

Comme on a procédé avec la notion d' « Ensemble », on procédera avec les notions de « correspondance », de « transformation », d' « association », de « fonction ». On les regardera comme des Objets au sujet desquels on posera certains

Axiomes appropriés : si l'on ne rencontre pas d'impossibilité en cherchant à répartir les Combinaisons de ces Objets entre la classe des êtres et celle des non-êtres, on sera en droit de considérer les notions correspondantes comme « existant sans contradiction ».

Le Principe I est le principe fécond et créateur qui nous donne pleine liberté pour créer de nouveaux concepts, à la seule condition que nous évitions la contradiction. Les Principes II et III permettent d'échapper aux Paradoxes mentionnés au début de cet article, et de triompher, en particulier, du Paradoxe relatif à l'Ensemble constitué par tous les Ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes comme élément.

Afin de montrer que la notion définie dans III ne cesserait pas, dans une théorie plus complète, de coïncider avec la notion usuelle d'Ensemble, j'établirai le théorème suivant :

A un stade déterminé de l'évolution de la théorie, soient 1,.., α,.., k les Objets dont nous disposons, et soit a (ξ) une Combinaison de ces Objets, laquelle renferme une indéterminée ξ. Soit de plus a (α) une « Proposition exacte » (ce qui veut dire que a (α) appartient à la classe des êtres). Alors il existe sûrement un Objet m tel que a (mx) soit, quel que soit x, une Proposition exacte (c'est-à-dire que a (mx) appartienne, pour un x quelconque, à la classe des êtres), et tel que, réciproquement, tout Objet ξ pour lequel la Proposition a (ξ) est exacte, soit égal à une Combinaison $mx^{(0)}$. [En disant que ξ est égal à $mx^{(0)}$, j'entends que la Proposition

$$\xi = mx^{(0)}$$

est exacte, en d'autres termes que les Objets ξ pour lesquels a (ξ) est une Proposition exacte sont, selon la définition donnée plus haut, les éléments d'un Ensemble m.]

Pour démontrer ce théorème, nous procéderons comme il suit :

Nous poserons d'abord ce nouvel Axiome : « L'Objet m est tel que les deux Propositions

$$(7) \qquad a(\xi) \mid m\xi = \xi$$

$$(8) \qquad \overline{a(\xi)} \mid m\xi = \alpha$$

soient exactes. En d'autres termes, si $a(\xi)$ appartient à la classe des êtres, on aura, d'après le nouvel Axiome, $m\xi = \xi$; et, en cas contraire, on aura $m\xi = \alpha$. » Nous adjoindrons cet Axiome aux Axiomes antérieurement adoptés relativement aux Objets 1,.., α,., k, et nous imaginerons pour un instant que cette adjonction conduise à une contradiction; autrement dit, nous supposerons que nous puissions déduire de nos divers Axiomes deux Propositions de la forme

$$p(m) \quad \text{et} \quad \overline{p(m)},$$

$p(m)$ étant une certaine Combinaison des Objets 1,.., k, m.

Nous raisonnerons alors ainsi : Partout où, dans $p(m)$, l'Objet m figure combiné avec un Objet ξ, appliquons les Axiomes (7) ou (8), en tenant compte de (2), et remplaçons ainsi $m\xi$, soit par ξ, soit par α. $p(m)$ se transformera en $q(m)$, et dans $q(m)$ il n'y aura plus aucune Combinaison de la forme $m\xi$. Il en résulte que la Proposition $q(m)$ aurait pu être déduite des Axiomes relatifs aux seuls Objets 1,.., α,., k, dont nous disposions avant d'introduire (7) et (8). Dès lors, elle restera exacte si nous substituons à m l'un quelconque de ces Objets, soit, par exemple, 1. Le même raisonnement s'applique à $\overline{p(m)}$. Notre hypothèse initiale conduit donc à cette conclusion qu'au stade de l'évolution de la théorie où l'on se trouvait avant l'introduction de m, on devait rencontrer une contradiction de la forme

$$q(1) \quad \text{et} \quad \overline{q(1)},$$

ce qui ne pouvait avoir lieu, puisque l'existence (sans contradiction) des Objets 1,.., k a été admise. Nous devons donc rejeter notre hypothèse et admettre l'existence (sans contradiction) de l'Objet m.

IV. Éprouver la validité d'un système donné d'Axiomes revient à effectuer la répartition des Objets correspondants entre la classe des êtres et la classe des non-êtres, en considérant les Axiomes comme des règles auxquelles la répartition doit satisfaire. La difficulté consiste alors à reconnaître la possibilité d'une telle répartition. La question posée équivaut encore à la suivante : les Propositions que l'on peut dé-

duire des Axiomes, lorsqu'on les spécialise ou qu'on les combine d'après la méthode exposée plus haut, peuvent-elles oui ou non conduire à une contradiction? Cela, lorsque l'on adjoint aux Axiomes les règles logiques classiques telles que

$$\left\{ (a \mid b) \text{ et } (\bar{a} \mid b) \right\} \Big| \, b$$

$$\left\{ (a \text{ ou } b) \text{ et } (a \text{ ou } c) \right\} \Big| \left\{ a \text{ ou } (b \text{ et } c) \right\}$$

Il y aura deux manières de prouver qu'un système donné d'Axiomes est exempt de contradiction. Ou bien l'on montrera que s'il y avait contradiction à un moment donné, cette contradiction devrait déjà s'être manifestée à un stade antérieur de la théorie. Ou bien, supposant qu'il existe une déduction permettant de tirer une certaine contradiction des Axiomes donnés, on établira qu'une telle déduction implique elle-même contradiction et est par suite irrecevable. C'est de cette dernière manière que nous avons prouvé l'existence (sans contradiction) de l'Infini : nous avons montré qu'il était impossible de déduire l'égalité (6) des Axiomes (1), (4).

V. Lorsque dans les pages précédentes il était question de *plusieurs* Objets ou Combinaisons, de *plusieurs* indéterminées, de Combinaisons *multiples*, ces mots s'appliquaient toujours à un nombre limité de choses. Après avoir défini le « nombre fini », nous sommes en état de leur donner le sens général qu'ils comportent. De même, en nous appuyant sur la définition du nombre fini, nous pourrons, conformément au Principe de l'Induction complète, définir explicitement à l'aide d'une méthode récurrente ce qu'il faut entendre par « Proposition déduite *quelconque* » ou par « Proposition *différant* de toutes les Propositions d'une certaine espèce ». En particulier, nous pourrons compléter la démonstration donnée plus haut, laquelle tendait à prouver que la Proposition $f((ux)^{(o)}) = u1$ diffère de toute Proposition qui se laisserait déduire des Axiomes (1),..., (4) à l'aide d'un nombre fini d'opérations. A cet effet, nous regarderons la démonstration elle-même comme une notion mathématique : c'est un Ensemble fini dont les éléments sont reliés par des Propositions, lesquelles affirment que la dite démonstration permet de con-

clure des Axiomes (1),..., (4) à la Proposition (6). Tout revient alors à montrer qu'une semblable démonstration implique contradiction et ne saurait par suite, selon nos conventions, être considérée comme existante.

Comme on a prouvé l'existence du plus petit Infini, on prouvera l'existence de l'ensemble des nombres réels : les Axiomes relatifs aux nombres réels (tels que je les ai énoncés ailleurs [1]), se laisseront, en effet, représenter par des formules analogues à celles qu'on a vues plus haut. La méthode s'appliquera en particulier à l'*Axiome des Systèmes Complets* (Vollständigkeitsaxiom), d'après lequel l'ensemble des nombres réels se trouve contenir (en ce sens qu'il existe entre les éléments des deux ensembles une correspondance univoque et réciproque) tout Ensemble dont les éléments satisfont aux mêmes Axiomes. Cet Axiome des Systèmes Complets pourra être exprimé par des formules du type défini plus haut, et, d'une manière générale, les Axiomes relatifs à l'ensemble des nombres réels ne se distinguent pas qualitativement des Axiomes invoqués pour la définition du nombre entier. C'est là le fait qui me paraît porter un coup décisif à la doctrine de Kronecker sur les fondements de l'Arithmétique, doctrine qu'au début de cet article je qualifiais de dogmatique.

En employant toujours la même méthode, on établira que les notions fondamentales de la théorie des Ensembles de Cantor, en particulier, la notion d'Alef doivent être considérées comme existant sans contradiction.

D. HILBERT (Göttingue).

[1] *Grundlagen der Geometrie*, 2e Ed., Leipzig, 1903, pp. 24-26.

DÉFINITIONS ET DÉMONSTRATIONS MATHÉMATIQUES

Quand on demande si une notion est définissable ou si une proposition est démontrable, ces questions n'ont pas de sens, ou du moins elles sont indéterminées. Pour savoir si une notion est définissable, il faut savoir quelles sont les notions dont on dispose, soit comme indéfinissables, soit comme définies au moyen des indéfinissables. De même, pour savoir si une proposition est démontrable, il faut savoir quelles sont les propositions qu'on possède, soit qu'on les ait admises comme indémontrables, soit qu'on les ait démontrées au moyen des propositions premières. Ainsi une notion n'est définissable, une proposition n'est démontrable, que par rapport à un certain ordre assigné aux notions et aux propositions, et, en définitive, par rapport à un certain système de notions premières ou de propositions premières [1]. Une notion pourra être définissable, une proposition pourra être démontrable dans tel système, et ne pas l'être dans tel autre. Ainsi les propriétés d'*indéfinissable* et d'*indémontrable* ne sont pas intrinsèques et absolues, mais essentiellement relatives. On a donc le choix, théoriquement, entre une multitude de systèmes de notions premières et de propositions premières.

Quel système doit-on préférer? Le bon sens répond : celui où les notions premières sont les plus simples, et où les pro-

---

[1] Dans la logique symbolique, un symbole qu'on ne peut définir que d'une manière verbale (par des mots) est considéré comme indéfinissable. C'est que la traduction verbale qu'on en donne ne peut être qu'un nom équivalent (par exemple N = nombre entier) ou une paraphrase ; dans les deux cas, on ne peut pas réduire cette traduction en symboles, car, si on le pouvait, le symbole en question serait défini, et en fonction de nouveaux symboles qui, eux, seraient indéfinissables. Les traductions verbales des symboles non définis ne font qu'en donner une *interprétation ;* elles ne font pas partie de la théorie, comme les définitions symboliques.

positions premières sont les plus évidentes. Mais il n'y a pas de criterium logique de la simplicité des notions et de l'évidence des propositions. Pour pouvoir déterminer absolument les notions les plus simples, il faudrait que toutes les notions fussent composées d'une manière univoque de quelques-unes d'entre elles, comme les nombres entiers sont tous composés (et chacun d'une seule manière) de nombres premiers [1]. Mais il n'en est pas du tout ainsi, et, dans une certaine mesure, les notions simples peuvent se définir les unes par les autres. De même, pour pouvoir apprécier l'évidence des propositions autrement que par un sentiment tout subjectif, et par suite sujet à caution (car il peut être le produit de l'habitude), il faudrait que toutes les propositions fussent des conséquences de quelques-unes d'entre elles, bien déterminées, et c'est ce qui n'a pas lieu. Les notions premières et les propositions premières se relient et s'enchaînent, non dans un ordre linéaire (ramifié [2], mais dans un ordre circulaire, ou plutôt dans un réseau complexe où il n'y a ni premier ni dernier. C'est pourquoi on peut partir indifféremment d'un point ou d'un autre, c'est-à-dire choisir entre divers ordres également admissibles au point de vue logique.

Toutefois, à défaut de raisons strictement logiques, on peut avoir (et on a en général) des raisons méthodologiques de préférer tel ordre à tel autre. Ainsi, si la rigueur logique est satisfaite dès qu'on énumère explicitement toutes les notions premières et toutes les propositions premières dont on se sert pour définir et démontrer les autres, l'élégance logique demande que le nombre de ces notions et de ces propositions soit le plus petit possible ; elle demande aussi que ces notions et ces propositions soient, autant que possible, indépendantes entre elles (nous allons définir bientôt cette expression). Ce ne sont pas là des exigences absolues de la logique, comme l'indiquent les locutions mêmes : *le plus possible, autant que possible.* Ce sont simplement des desiderata d'ordre quasi esthétique, qui peuvent être *plus ou*

[1] Cette hypothèse, ou plutôt cette analogie, était le fondement (ruineux) de toute la logique de Leibniz. V. notre ouvrage sur *La logique de Leibniz*, chap. II.

[2] Analogue aux arbres généalogiques.

moins satisfaits sans que la valeur logique d'une théorie en soit affectée.

On dit que des notions sont *indépendantes entre elles*, quand aucune d'elles ne peut être définie au moyen des autres. On dit que des propositions sont *indépendantes entre elles*, quand aucune d'elles ne peut être démontrée au moyen des autres. Dans les mêmes cas, on dit que ces notions ou ces propositions forment un *système irréductible*. Il ne faut pas perdre de vue ce fait qu'une même théorie déductive peut être fondée sur plusieurs systèmes irréductibles de notions et propositions premières, de sorte que même cette condition peut ne pas suffire pour déterminer un système unique [1].

Pour prouver que dans un système de propositions premières l'une d'elles est indépendante des autres, il ne suffit pas d'alléguer qu'*on n'a pas pu* démontrer cette proposition au moyen des autres; un tel argument n'a évidemment aucune valeur logique, parce qu'il est empirique et ne peut justifier une proposition universelle négative. Il faut (et il suffit) qu'on trouve un cas (un seul) où la proposition en question soit fausse alors que toutes les autres sont vraies; car ce cas exclut l'hypothèse que celles-ci impliquent celle-là. Or, puisque le sens des notions premières est indéterminé, il suffit de trouver une interprétation des symboles non définis, qui vérifie toutes les propositions premières, moins celle dont on veut prouver l'indépendance. D'où cette règle:

Pour qu'un système de propositions premières soit irréductible, il faut et il suffit qu'on puisse trouver pour chacune d'elles une interprétation du système des symboles non définis qui vérifie toutes les propositions premières sauf celle-là.

Dans ce cas, on dit qu'on a démontré l'*indépendance absolue* des propositions premières entre elles. Il arrive en effet qu'on puisse seulement démontrer leur *indépendance ordon-*

[1] Il est clair que si une même théorie peut être fondée sur deux systèmes irréductibles de postulats, chacun de ces systèmes doit pouvoir se déduire de l'autre, puisqu'il contient en tout cas des propositions (premières ou non) de la théorie. En d'autres termes, les deux systemes doivent être logiquement équivalents (s'impliquer mutuellement). De même, si une théorie peut recevoir deux systèmes irréductibles de notions premières, chacun de ces deux systèmes doit pouvoir se définir au moyen de l'autre, puisque chacun d'eux permet de définir toutes les notions de la théorie qu'il ne contient pas.

née, c'est-à-dire que chacune d'elles est indépendante des précédentes. Cette démonstration a d'ailleurs lieu suivant la même méthode.

D'autre part, pour prouver que dans un système de notions premières l'une d'elles est indépendantes des autres, il ne suffit évidemment pas d'alléguer qu'on n'a pas pu la définir au moyen des autres. Bien entendu, on doit considérer ces notions comme liées entre elles par un ensemble de postulats qui déterminent leurs relations ; et quand on dit que l'une d'elles est indépendante des autres, il faut entendre que le système des postulats ne permet pas de la définir au moyen des autres. Par conséquent, ce système des postulats constitue une donnée du problème, et l'indépendance mutuelle des notions premières sera relative à ce système de postulats. Or, pour prouver qu'un symbole non défini est indépendant des autres, c'est-à-dire que son sens n'est pas déterminé par celui des autres, il suffit de trouver deux interprétations qui ne diffèrent que par le sens de ce symbole, *et qui vérifient toutes deux le système des postulats*, puisque ce système formule les conditions qui relient les unes aux autres les notions premières, et qui contribuent à déterminer à limiter leur sens. On aboutit ainsi à formuler la règle suivante :

Pour qu'un système de notions premières soit irréductible par rapport à un système de propositions premières, il faut et il suffit qu'on puisse trouver, pour chaque notion première, une seconde interprétation qui vérifie, comme la première, le système des propositions premières, toutes les autres notions conservant le même sens [1].

*
* *

Outre les définitions nominales, dont il a été question jus-

---

[1] A. PADOA, *Essai d'une theorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque*. ap. *Bibl. du Congrès de Philosophie*, 1900, t. III (Paris. A. Colin, 1901.) Cette méthode logique a été récemment appliquée par M. HUNTINGTON dans les mémoires suivants : *A complete set of postulates for the theory of absolute continuous magnitude : Complete sets of postulates for the theories of positive integral and positive rational numbers* (*Transactions of the American Mathematical Society*, t. III, 1902) ; *Two definitions of an Abelian group by sets of independent postulates* (*ibid.*, t. IV, 1903) ; *Sets of independents postulates for the Algebra of Logic* (*ibid.*, t. V, 1904) ; et par M. Oswald VEBLEN : *A system of axioms for Geometry* (*ibid.*, t. V, 1904).

qu'ici, on a trouvé en Mathématiques deux autres espèces de définitions qui semblent irréductibles à cette forme, à savoir : les *définitions par postulats* et les *définitions par abstraction* [1].

La *définition par postulats* s'applique, non à une seule notion, mais à un système de notions ; elle consiste à énumérer les relations fondamentales qui les unissent et qui permettent de démontrer toutes leurs autres propriétés : ces relations sont des postulats, c'est-à-dire les propositions premières d'une théorie. Or une telle définition n'est pas à proprement parler une définition, car elle suppose au contraire que les notions en question sont indéfinissables. Admettre que des postulats puissent *définir* les notions premières qui y figurent, c'est admettre que tout peut se définir ; car les notions définies seraient définies nominalement, et les notions non définies seraient définies par postulats. C'est donc là un abus du mot de *définition ;* tout ce qu'on peut dire, c'est que les postulats *déterminent* le sens des notions premières, au moins dans une certaine mesure ; car nous avons vu qu'en général ils ne le déterminent pas complètement, puisque le même système de postulats peut recevoir plusieurs interprétations.

S'il n'y avait qu'une seule notion à définir, on pourrait aisément transformer une définition par postulats en une définition nominale ; il suffirait de dire : « le terme à définir = un objet qui vérifie tels et tels postulats, » ce qui est toujours possible, au moyen du symbole : $x\ni(\ldots)$ [2]. Mais quand il y a plusieurs notions à définir, il n'est pas possible, en général, de « résoudre » ainsi le système des postulats par rapport à ces notions, et d'en tirer leur « valeur » sous la

---

[1] C. Burali-Forti, *Logica matematica*, cap. IV, §§ 6. 7 (Milan, Hœpli, 1894) ; *Sur les différentes méthodes logiques pour la définition du nombre réel*, § 1, ap. *Bibliothèque du Congrès de Philosophie*, t. III (Paris, A. Colin. 1901).

[2] C'est ce qui a lieu, par exemple, pour l'idée de grandeur. M. Burali-Forti a commencé par la « définir » au moyen de huit postulats qui portent sur cette notion (*Formulaire de Mathématiques*, t. I, ch. IV [1895] ; *Les propriétés formelles des opérations algébriques*, ap. *Revue de Mathématiques*, t. VI, p. 141 [1900]) ; puis il a défini nominalement la grandeur, ou plus exactement, la *classe de grandeurs homogènes*, comme un ensemble d'objets qui vérifie ces huit postulats (*Sulla Teoria generale delle Grandezze e dei Numeri*, ap. *Atti dell' Accademia delle Scienze di Torino*, t. 39 [1904]). Cf. notre ouvrage *Les principes des mathématiques*, chap. V.

forme explicite de définitions nominales. Toutefois, il suffira de les définir toutes, sauf une, pour avoir la définition nominale de cette dernière; car alors elle sera la seule, et l'on retombera dans le cas précédent. Les postulats deviendront de simples conséquences logiques de la définition, non pas que celle-ci puisse jamais être érigée en « vérité » ou en principe, mais parce que la notion définie vérifiera ces postulats *par définition*. C'est ainsi que l'on peut transformer les principes ou hypothèses d'une théorie en une définition de l'objet fondamental de cette théorie; par exemple, les axiomes de la géométrie, ou plutôt d'*une* géométrie, en une définition de l'espace correspondant [1].

La *définition par abstraction* s'applique à une fonction logique ou mathématique. Elle consiste, au lieu de définir nominalement cette fonction, à indiquer la condition nécessaire et suffisante à laquelle cette fonction prend la même valeur pour deux valeurs différentes de la variable [2]. Ce procédé est très fréquemment employé en mathématiques. Par exemple, beaucoup d'auteurs M. Georg Cantor définissent le *nombre cardinal* comme suit : « Deux ensembles ont des nombres cardinaux égaux, quand on peut établir une correspondance univoque et réciproque entre tous leurs éléments. » De même, on ne définira pas le *vecteur*, mais on dira : « Deux vecteurs sont égaux, lorsqu'ils ont même longueur, même direction et même sens. » On ne définira pas la *direction*, mais on dira : « Deux droites ont la même direction, lorsqu'elles sont parallèles. » De même en physique : on ne définit pas nominalement la *masse*, la *température*, le *potentiel*, mais on indique dans quelles conditions « on dira » que deux corps ont la même masse, la même température, le même potentiel [3]. En général, toutes les fois qu'on peut établir entre deux objets d'une certaine classe une relation symétrique et

---

[1] V. *Les principes des mathématiques*, chap. VI, § B, fin.

[2] V. Burali-Forti, *Sur l'égalité et sur l'introduction des éléments dérivés dans la science*, ap. *L'enseignement mathématique*, 1899.

[3] Les définitions par abstraction sont si fréquentes, que certains auteurs, par une généralisation excessive, affirment qu'il n'y en a pas d'autres en mathématique. En quoi ils se trompent ; car on définit nominalement beaucoup de notions, comme celles de *nombre premier*, de *limite*, de *dérivée*, d'*intégrale*, de *triangle*, de *cercle*, de *vitesse*, d'*accélération*, de *quantité de chaleur*, etc.

transitive (comme le parallélisme des droites, l'équilibre des corps sur une balance), on conçoit cette relation comme une espèce d'égalité, à savoir comme l'identité d'une propriété *abstraite* de ces deux objets [1]. On est ainsi conduit à déterminer et à définir cette propriété au moyen de la relation en question ; d'où le nom de *définition par abstraction*.

Au point de vue formel, une définition par abstraction s'énonce comme suit :

$$a \varepsilon \mathrm{Cls} . x, y \varepsilon a . \supset : \varphi x = \varphi y . = . p_{x,y}$$

« L'égalité $\varphi x = \varphi y$, où la fonction φ est la notion à définir et où x et y sont des éléments d'une même classe a, équivaut à la proposition p relative à x, y. »

Mais cette définition peut être ramenée à la forme d'une définition nominale de la manière suivante. La proposition $p_{x,y}$ est une relation entre x et y ; écrivons-la : xRy. Cette relation est symétrique et transitive par hypothèse ; et son champ est la classe a. En vertu du *principe d'abstraction* [2], on peut en conclure l'existence d'une relation uniforme S entre chacun des termes x, y et un même terme z, de telle sorte qu'on ait :

$$x\mathrm{R}y . = . x\mathrm{S}z . y\mathrm{S}z$$

Ce terme z est fonction de x et fonction de y ; c'est son existence et son identité qui fondent l'égalité : $\varphi x = \varphi y$. On peut donc définir *nominalement* la fonction φ comme suit : c'est la relation qui unit le terme z à chacun des éléments x, y,... de la classe a entre lesquels existe la relation R. Ainsi la logique des relations permet de réduire les définitions par abstraction à des définitions nominales.

*
* *

Pour illustrer ces considérations théoriques, nous ne pouvons trouver un meilleur exemple que la théorie du nombre

---

[1] C'est en cela que consiste le *principe d'abstraction*, qui peut s'énoncer comme suit : Toute relation symétrique et transitive peut se ramener à une espèce d'égalité.

[2] V. *Les principes des mathématiques*, chap. I, § C.

entier, où l'on verra le nombre entier défini tour à tour par postulats, par abstraction et enfin nominalement.

La définition par postulats[1] consiste à prendre 3 notions indéfinissables : N (nombre entier positif), 0 (zéro), et seq (le suivant de)[2] : N est une classe, 0 un individu et seq une fonction. Puis on pose les cinq postulats suivants :

I. $$0 \varepsilon N$$

« Zéro est un nombre[3]. »

II. $$x \varepsilon N . \supset_x . \mathrm{seq}\, x \varepsilon N$$

« Le suivant d'un nombre est un nombre[4]. »

III. $$x \varepsilon N . \supset_x . \mathrm{seq}\, x -= 0$$

« Zéro n'est le suivant d'aucun nombre. »

IV. $$x, y \varepsilon N . \mathrm{seq}\, x = \mathrm{seq}\, y . \supset_{x,y} . x = y$$

« Deux nombres, dont les suivants sont égaux, sont égaux[5]. »

V. $$0 \varepsilon a : x \varepsilon N \frown a . \supset_x . \mathrm{seq}\, x \varepsilon a : \supset_a . N \supset a$$

« Si une classe a contient 0, et si, dès qu'elle contient un nombre x, elle contient le suivant de x, elle contient tous les nombres. » Ce dernier postulat est ce qu'on appelle le *principe de l'induction complète*. On le formule d'ordinaire comme suit : « Si une proposition est vraie pour 0, et si, dès qu'elle est vraie pour n, elle est vraie pour $n + 1$, elle est vraie pour tous les nombres entiers[6]. »

---

[1] G. Peano, *Arithmetices principia nova methodo exposita* (Turin, Bocca, 1889) ; *Sul concetto di numero*, ap. *Rivista di Matematica*, t. 1 (1891) ; *Formulaire de Mathématiques*, toutes les éditions ; *Aritmetica generale e Algebra elementare* (Turin, Paravia, 1902).

[2] Ces notions sont indéfinissables, malgré la traduction verbale que nous en donnons parce que cette traduction n'est qu'une interprétation des 3 symboles N, 0, *seq*, et que leur sens doit être déterminé uniquement par les postulats suivants.

[3] Nous dirons « nombre » pour abréger, aucune confusion n'étant possible.

[4] Ceci implique que la fonction seq est uniforme, c.-à-d. que :

$$x, y \varepsilon N . x = y . \supset . \mathrm{seq}\, x = \mathrm{seq}\, y$$

(cf. le postulat IV).

[5] Autrement dit, la fonction seq est réciproque. (Cf. la note 2).

[6] L'équivalence des deux énoncés est évidente, si l'on remarque que toute proposition détermine une classe, à savoir l'ensemble des individus qui la vérifient.

De ces cinq postulats on peut déduire toutes les propositions de l'Arithmétique des nombres entiers positifs ; ils suffisent donc à « définir » les nombres entiers, c'est-à-dire qu'ils en expriment les propriétés fondamentales et caractéristiques. De plus, ils sont tous nécessaires, car ils sont indépendants les uns des autres. C'est ce qu'on peut prouver au moyen des interprétations suivantes, dont chacune vérifie tous les postulats, sauf celui dont elle porte le numéro :

I. La classe N (ordonnée par la fonction seq) se compose de tous les nombres entiers positifs non nuls : 1, 2, 3, 4, 5,... (Elle ne contient pas 0 [1].

II. La classe N se compose des 10 premiers nombres entiers : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (le nombre 9 n'a pas de suivant).

III. La classe N se compose des nombres 0, 1, 2, formant une période : 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2,... (le nombre 0 est le suivant d'un autre nombre).

IV. La classe N est 0, 1, 2, 1, 2, 1, 2,... (le suivant de 0 est 1, comme le suivant de 2.)

V. La classe N est la suite des nombres, mais seq $x = x + 2$ (et non plus $x + 1$). Le postulat V se trouve en défaut si l'on prend pour s l'ensemble des nombres pairs, car cette classe vérifie l'hypothèse, et non la thèse[2].

Ainsi le système des cinq postulats est irréductible. On peut dire que le système des 3 notions premières : N, 0, seq se trouve défini comme vérifiant le système de postulats. Mais, bien entendu, ce n'est pas là une définition nominale. On peut traduire le principe d'induction en disant que N est la plus petite classe qui vérifie les postulats I et II : en effet, elle est contenue dans toute classe qui vérifie ces deux postulats ($0 \varepsilon s$, et $x \varepsilon s . \supset . \mathrm{seq}\, x \varepsilon s$).

La définition par abstraction des nombres entiers est toute autre[3]. Elle consiste à considérer le nombre entier comme une propriété des classes (ce qu'on appelle leur *nombre car-*

[1] On peut évidemment faire commencer la suite des nombres à 1 (ou à un nombre quelconque), mais alors il faut substituer 1 à 0 dans les postulats I, III et V.

[2] A. Padoa, *Conférences sur la logique mathématique*, p. 51 (1898) ; G. Peano, *Formulaire* 1899, p. 30.

[3] G. Peano, *Formulaire* 1903, § 56.

dinal) et à définir par abstraction les nombres cardinaux comme des fonctions logiques (Num x) en définissant seulement leur égalité :

$$a, b \, \varepsilon \, \mathrm{Cls} \, . \supset : \mathrm{Num}\, a = \mathrm{Num}\, b \, . = . \, \exists (b f a) \, \mathrm{rep} \qquad \mathrm{Df}$$

« a et b étant des classes, on dit que leurs nombres cardinaux sont égaux, s'il existe entre ces classes une correspondance univoque et réciproque. »

On peut alors définir 0 comme suit :

$$0 = \mathrm{Num}\, \Lambda$$

« Zéro est le nombre cardinal de la classe nulle. »

D'où l'on peut déduire:

$$a \, \varepsilon \, \mathrm{Cls} \, . \supset : \mathrm{Num}\, a = 0 \, . = . \, a = \Lambda$$

Si l'on désigne (suivant la définition générale de cette notation) par « Num 'Cls », l'ensemble des nombres d'une classe quelconque, c'est-à-dire des nombres cardinaux, on pourra définir la somme de deux nombres cardinaux comme suit :

$$x, y \, \varepsilon \, \mathrm{Num}\,'\mathrm{Cls} \, . \supset . \, x + y = \imath z \, \varepsilon \, [a, b \, \varepsilon \, \mathrm{Cls} \, . \, \mathrm{Num}\, a = x \, .$$
$$\mathrm{Num}\, b = y \, . \, a \frown b = \Lambda \, . \supset_{a, b} . \, z = \mathrm{Num}\,(a \smile b)] \qquad \mathrm{Df}$$

« Si x et y sont les nombres cardinaux respectifs des classes a et b qui n'ont aucun élément commun, leur somme ($x + y$) sera, par définition, le nombre cardinal de la classe ($a \smile b$), somme logique des classes a et b. » Ainsi l'addition arithmétique se trouve définie, d'une manière générale, au moyen de l'addition logique.

Cela posé, on pourra définir seq n par $n + 1$, somme du nombre cardinal n et de 1. On aura en conséquence :

$$n \, \varepsilon \, \mathrm{Num}\,'\mathrm{Cls} \, . \, a \, \varepsilon \, \mathrm{Cls} \, . \supset .\because \mathrm{Num}\, a = n + 1 \, . = : \exists a : x \, \varepsilon \, a \, . \supset_x . \, \mathrm{Num}\,(a - \iota x) = n$$

« Dire que la classe a a pour nombre cardinal $n + 1$, c'est dire qu'elle n'est pas nulle, et que, si x est un de ses éléments, la classe des a différents de x a pour nombre cardinal n. » En d'autres termes, une classe a le nombre $n + 1$, quand on peut l'obtenir en ajoutant *un* élément à une classe qui a le nombre n.

On ne peut nier que cette manière de définir le nombre cardinal ne soit plus naturelle et plus conforme à la conception ordinaire ; elle donne aux symboles N, 0, seq un sens plus concret et plus immédiat que ne faisait la définition par postulats. Seulement cette définition s'applique à tous les nombres cardinaux, même infinis, et non pas seulement aux nombres de la suite naturelle (dits *finis*) que nous avons désignés jusqu'ici par N. Or l'essence des nombres finis consiste précisément dans le principe d'induction, car celui-ci équivaut à la définition qu'on donne des classes finies, par opposition aux classes infinies (qui peuvent être équivalentes à une de leurs parties intégrantes)[1]. On pourra donc définir les nombres entiers finis comme suit : « N est la classe des nombres cardinaux qui appartiennent à toutes les classes qui contiennent 0, et qui contiennent $(n + 1)$ dès qu'elles contiennent n. »

On a par là même une définition nominale du nombre entier fini ; seulement cette définition repose sur la notion de Num, qu'on n'a définie que par abstraction. Mais si l'on applique le principe d'abstraction à cette fonction, on pourra en conclure que la relation d'*égalité de nombre* ou d'*équivalence* entre deux classes se réduit à une relation uniforme de ces classes à un même terme, qui sera leur nombre cardinal. Et comme chaque concept est représenté par son extension, le nombre cardinal, conçu comme la propriété commune à toutes les classes *équivalentes*, sera représenté par la classe de ces classes. En d'autres termes, on peut répartir toutes les classes possibles en classes telles que, dans une même classe, toutes les classes ont le même nombre cardinal ; on a ainsi une correspondance univoque et réciproque entre les nombres cardinaux et les classes de classes, et l'on peut substituer ou identifier celles-ci à ceux-là. En résumé, on peut définir Num a nominalement comme suit :

$$a \varepsilon \mathrm{Cls} . \supset . \mathrm{Num}\, a = \mathrm{Cls} \frown x \ni [\exists (x f a) \mathrm{rep}]$$

« Le nombre cardinal de la classe a est la classe des classes

[1] WHITEHEAD, *On cardinal numbers*, ap. *American Journal of Mathematics*, t. XXIV (1902), sect. III.

équivalentes à a » ; et alors, dire qu'une classe b a le même nombre que la classe a, c'est dire qu'elle appartient à la classe des classes équivalentes à a :

$$\begin{aligned} \text{Num}\, b = \text{Num}\, a \,.=.\, b \,\varepsilon\, \text{Cls} \cap x \ni [\exists (x \text{f} a) \,\text{rep}] \\ = [\exists (b \text{f} a) \,\text{rep}] \end{aligned}$$

On peut donc se passer du symbole de fonction Num, de sorte qu'au lieu d'écrire (a étant une classe et n son nombre) : Num $a = n$, on écrira :

$$a \,\varepsilon\, n$$

c'est-à-dire : « la classe a appartient à la classe de classes n. »

On définira les nombres cardinaux eux-mêmes comme des classes de classes, sans le secours du symbole Num. On définira d'abord *zéro* comme suit :

$$0 = \iota \Lambda$$

« Zéro est la classe qui comprend la seule classe nulle. » Puis on définira le suivant d'un nombre :

$$n \,\varepsilon\, \text{N} \,.\supset.\, \text{seq}\, n = \text{Cls} \cap a \ni (\exists a : x \,\varepsilon\, a \,.\supset_x.\, a - \iota x \,\varepsilon\, n) \qquad \text{Df}$$

« n étant un nombre, $n + 1$ est la classe des classes a telles que, si x est un élément de a, la classe des a non égaux à x a le nombre n. »

Cette formule permet de définir progressivement tous les nombres cardinaux finis (puisque ceux-ci, par définition, sont ceux qu'on obtient en ajoutant toujours 1 au nombre précédemment obtenu). En particulier, 1 se définira comme le suivant de 0 :

$$1 = \text{Cls} \cap u \ni (\exists u : x \,\varepsilon\, u \,.\supset_x.\, u - \iota x \,\varepsilon\, 0)$$

Or :

$$u - \iota x \,\varepsilon\, 0 \,.=.\, u - \iota x = \Lambda \,.=.\, u \supset \iota x$$

Mais :

$$u \supset \iota x \,.=:\, y \,\varepsilon\, u \,.\supset_y.\, y = x$$

Donc :

$$\begin{aligned} x \,\varepsilon\, u \,.\supset_x.\, u - \iota x \,\varepsilon\, 0 : = : x \,\varepsilon\, u \,.\supset_x : y \,\varepsilon\, u \,.\supset_y.\, y = x : \\ = : x \,\varepsilon\, u \,.\, y \,\varepsilon\, u \,.\supset_{x,y}.\, y = x : = : x, y \,\varepsilon\, u \,.\supset_{x,y}.\, y = x \end{aligned}$$

Substituons dans la définition de 1 : il vient :

$$1 = \mathrm{Cls} \frown u \ni (\exists u : x, y \varepsilon u . \supset_{x,y} . y = x) \qquad \mathrm{Df}$$

On trouve ainsi la définition de la *classe singulière* : « 1 est la classe des classes u non nulles et telles que, si x, y sont des éléments de u, ils sont identiques. »

On définira de même :

$$2 = \mathrm{Cls} \frown u \ni (\exists u : x \varepsilon u . \supset_x . u - \iota x \varepsilon 1)$$
$$3 = \mathrm{Cls} \frown u \ni (\exists u : x \varepsilon u . \supset_x . u - \iota x \varepsilon 2)$$

et ainsi de suite. Enfin on pourra définir nominalement l'idée de nombre cardinal :

$$\mathrm{Nc} = \mathrm{Cls}'\mathrm{Cls} \frown z \ni [\exists \mathrm{Cls} \frown u \ni (z = \mathrm{Num}\, u)] \qquad \mathrm{Df}$$

« Un nombre cardinal est une classe de classes z telle qu'il y a des classes u qui ont pour nombre cardinal z. »

Et l'idée de nombre cardinal *fini* sera définie au moyen du principe d'induction :

$$\mathrm{Ncfin} = \mathrm{Nc} \frown u \ni [s \varepsilon \mathrm{Cls} . 0 \varepsilon s : m \varepsilon \mathrm{Nc} \frown s . \supset_m . m + 1 \varepsilon s : \supset . u \varepsilon s] \qquad \mathrm{Df}$$

« L'ensemble des nombres cardinaux finis est une classe u de nombres cardinaux qui vérifie le principe d'induction ; » et celui-ci pourra alors être affirmé de la classe Ncfin :

$$(\mathrm{Induc}) \qquad s \varepsilon \mathrm{Cls} . 0 \varepsilon s : m \varepsilon \mathrm{Nc} \frown s . \supset_m . m + 1 \varepsilon s : \supset . \mathrm{Ncfin}\, \varepsilon s$$

On peut démontrer que 0, 1, 2,... sont des nombres finis, et que, si n est un nombre fini, $n + 1$ l'est aussi [1].

* * *

Les considérations précédentes nous amènent à examiner ce qu'on appelle les *définitions* et les *démonstrations par induction*, ou encore *par récurrence*. Une *définition* par induction consiste à définir un concept (fonction d'un nombre entier indéterminé) pour le nombre 0 (ou 1, ou tel autre nombre entier déterminé), puis à définir le même concept pour le nombre ($n + 1$) en fonction de sa valeur (supposée connue) pour le nombre n ; on dit alors que ce concept est

[1] WHITEHEAD, *mémoire cité*.

défini pour tous les nombres entiers (à partir du premier nombre visé dans la définition)[1]. De même, une *démonstration par induction* consiste à démontrer une proposition (où figure un nombre entier indéterminé) pour le nombre 0 (ou 1, etc.), puis à démontrer que, si cette proposition est vraie pour le nombre n, elle est encore vraie pour le nombre $n + 1$; d'où l'on conclut qu'elle est vraie pour tous les nombres entiers (à partir du premier nombre visé dans la démonstration)[2]. Ces deux méthodes, dont l'analogie est mani-

---

[1] Exemples de définitions par induction :

I. Définition de la somme de deux nombres entiers :

$$\begin{cases} a \varepsilon N . \supset . a + 0 = a & (1) \\ a, b \varepsilon N . \supset . a + \text{seq}\, b = \text{seq}\, (a + b) & (2) \end{cases}$$

d'où : $a + 1 = \text{seq}\, (a + 0) = \text{seq}\, a$

et alors (2) devient : $a + (b + 1) = (a + b) + 1$

II. Définition du produit de deux nombres entiers :

$$\begin{cases} a \varepsilon N . \supset . a \times 0 = 0 & (1) \\ a, b \varepsilon N . \supset . a \times (b + 1) = (a \times b) + a & (2) \end{cases}$$

d'où : $a \times 1 = (a \times 0) + a = 0 + a = a$.

III. Définition des puissances entières d'un nombre entier :

$$\begin{cases} a \varepsilon N . \supset . a^0 = 1 & (1) \\ a, n \varepsilon N . \supset . a^{n+1} = a^n \times a & (2) \end{cases}$$

d'où : $a^1 = a^0 \times a = 1 \times a = a$.

[2] Exemples de démonstrations par induction :

I. Loi associative de l'addition :

$$a, b, c \varepsilon N . \supset . (a + b) + c = a + (b + c)$$

Dem : $\text{Hp} . c = 0 . \supset . \text{Ts}$

« Le théorème est vrai pour $c = 0$. »

$$\text{Hp} . (a + b) + c = a + (b + c) . \supset . (a + b) + (c + 1) = [(a + b) + c] + 1 = [a + (b + c)] + 1 = a + [(b + c) + 1] = a + [b + (c + 1)] \quad (2)$$

« En supposant le théorème vrai pour c, on démontre, par des transformations permises, qu'il est vrai pour $c + 1$. »

$$\text{Induct.}\ (1) . (2) . \supset . P$$

« En vertu du principe d'induction, (1) et (2) démontrent le théorème. »

feste, reposent sur le principe d'induction. Comme une définition joue dans les raisonnements le rôle d'une proposition, on comprend que le principe d'induction s'applique aux définitions comme aux propositions. Nous nous bornerons donc, pour simplifier, à étudier les démonstrations par induction.

Ce mode de raisonnement était considéré autrefois comme une *induction*, parce que, semblait-il, il permettait de conclure de quelques cas à tous ; mais, s'il en était vraiment ainsi, il ne serait pas logiquement probant. On a essayé de corriger cette conséquence en qualifiant cette induction de *complète*, pour indiquer qu'elle épuise tous les cas possibles. Mais il y a là une équivoque : tous les cas possibles figurent-ils dans les prémisses ou dans les conséquences ? S'ils ne figurent

---

II. Loi commutative de l'addition :

$$a, b \varepsilon N . \supset . a + b = b + a$$

Dem : $\text{Df} + . \supset . 0 + 0 = 0$ (1)

$$0 + a = a . \supset . 0 + (a + 1) = (0 + a) + 1 = a + 1 \quad (2)$$

$$\text{Induc. } (1) . (2) . \supset . 0 + a = a \quad (3)$$

$$\text{Df} + . \supset . 1 + 0 = 0 + 1 = 1 \quad (4)$$

$$1 + a = a + 1 . \supset . 1 + (a + 1) = (1 + a) + 1 = (a + 1) + 1 \quad (5)$$

$$\text{Induc. } (4) . (5) . \supset . 1 + a = a + 1 \quad (6)$$

$$a + b = b + a . \supset . a + (b + 1) = (a + b) + 1 = (b + a) + 1$$
$$= b + (a + 1) = b + (1 + a) = (b + 1) + a \quad (7)$$

$$\text{Induc. } (6) . (7) . \supset . P$$

Dans cette démonstration, on applique trois fois le principe d'induction : d'abord, pour conclure de (1) et (2) à (3) ; puis pour conclure de (4) et (5) à (6) ; enfin pour conclure de (6) et (7) le théorème à prouver ; (3) sert à prouver (4). La loi associative est employée pour prouver (2), (5), (7) : elle est invoquée 3 fois dans (7).

III. Loi distributive de la multiplication :

$$a . b, c \varepsilon N . \supset . (a + b) c = ac + bc$$

$$\text{Hp} . c = 0 . \supset . \text{Ts} \quad (1)$$

$$\text{Hp} . (a + b) c = ac + bc . \supset . (a + b)(c + 1) = (a + b) c + (a + b) =$$
$$ac + bc + a + b = (ac + a) + (bc + b) = a (c + 1) + b (c + 1) \quad (2)$$

$$\text{Induc. } (1) . (2) . \supset . P$$

On pourrait multiplier ces exemples ; la plupart des lois fondamentales de la théorie des nombres *finis* se démontrent par induction. V. le *Formulaire* de M. Peano.

que dans les conséquences, il y a inférence illégitime de quelques cas à tous, et par suite l'induction est ordinaire et incomplète. S'ils figurent aussi dans les prémisses, le raisonnement se réduit presque à une tautologie : « Si le théorème est vrai de chaque nombre entier (pris à part), il est vrai de tous les nombres entiers (en général). » Mais, en réalité, il n'est pas une induction : sans doute, que le théorème soit vrai pour 0 (ou 1), c'est là une vérité *particulière* ; mais que, si le théorème est vrai pour n, il soit vrai pour $n + 1$, c'est là une vérité *universelle*, puisque n peut prendre dans cet énoncé n'importe quelle valeur entière. C'est cette seconde prémisse qui fait l'universalité du théorème considéré ; et il n'y a là aucune inférence du particulier à l'universel.

On a prétendu[1] que le raisonnement par induction enveloppe « une infinité de syllogismes », et par suite repose sur quelque principe extra-logique « irréductible au principe de contradiction »[2]. On dit : Le théorème est vrai pour 0 ; s'il est vrai pour 0, il est vrai pour 1 ; s'il est vrai pour 1, il est vrai pour 2 ; et ainsi de suite indéfiniment[3]. Et il paraît que cette infinité échappe (on ne sait pourquoi) aux prises de la Logique, comme si le nombre infini (nombre cardinal des nombres entiers finis) n'était pas susceptible d'une définition logique. A cela on peut répondre d'abord que, pour prouver le théorème en question pour un nombre entier *quelconque*, il suffit d'un nombre fini de syllogismes, ou plutôt de déductions simples ; c'est ce qu'indique le nom de raisonnement *par récurrence*. Et si le théorème général enveloppe une infinité de cas particuliers (à savoir l'infinité des nombres entiers), c'est parce que la prémisse : « Si le théorème est vrai de n, il est encore vrai de $n+1$ », enveloppe cette même infinité, et possède exactement la même généralité. Tous les théorèmes généraux de l'Arithmétique ont la même portée infinie, en tant que tous valent pour *tous* les nombres entiers.

---

[1] H. Poincaré, *Sur la nature du raisonnement mathématique*, ap. *Revue de Métaphysique et de Morale*, t. II, p. 371 (1894) ; *La science et l'hypothèse*, p. 19 sqq.

[2] Comme si le principe de contradiction était le seul principe de la logique, selon un préjugé inexplicable qui a cours chez les philosophes.

[3] Ce ne sont pas là d'ailleurs des « syllogismes », mais des raisonnements hypothétiques enchaînés de telle sorte que la thèse du précédent est l'hypothèse du suivant.

Il n'y a là rien d'illogique ni de mystérieux, mais simplement ce fait qu'un concept (ici celui de nombre) peut avoir une extension infinie, sans que cela empêche de raisonner logiquement sur lui. Dans tous les cas, la conclusion n'est pas plus générale que la prémisse ; le passage de la prémisse à la conclusion est donc parfaitement logique[1], et il n'enveloppe pas « une infinité de syllogismes » : tout au contraire, la prémisse universelle : « Si le théorème est vrai pour n, il est vrai pour $n+1$ » dispense de cette prétendue suite infinie de déductions et les remplace par une seule, grâce au principe d'induction.

D'autre part, on a voulu voir[2], dans la démonstration par induction, le type du raisonnement mathématique, lequel serait étranger à la logique. Mais d'abord, le raisonnement par induction n'est nullement une méthode *générale* des mathématiques ; il est *spécial* à l'arithmétique des nombres entiers finis ; et pour s'en rendre compte, il suffit de remarquer qu'il repose sur le principe d'induction, lequel fait partie de la définition des nombres finis[3]. Il ne peut s'appliquer qu'aux propositions (ou définitions) où figure quelque fonction d'un nombre entier fini ; hors ce cas, relativement restreint, il n'a plus d'application ni même de sens. Cette opinion erronée n'a pu provenir que de l'*arithmétisation* excessive à laquelle on a soumis les mathématiques ; elle ne se justifierait que dans la thèse où non seulement l'Analyse, mais toute la Mathématique reposerait entièrement sur la seule notion de nombre entier. Mais cette thèse, qui a été assez longtemps à la mode, est à présent dépassée et réfutée[4] ; et en tout cas, il suffit (sans parler de la théorie des ensembles et des nombres infinis) de citer la Géométrie pour montrer un domaine où le raisonnement mathématique le plus

---

[1] D'ailleurs, c'est une erreur de croire que la déduction logique ne puisse passer du particulier au général ; nous l'avons montré au *Congrès de philosophie* de Genève (1904). V. les Comptes rendus du Congrès, et la *Revue de Métaphysique et de Morale*, novembre 1904.

[2] H. Poincaré, *ibid.*

[3] Cette remarque a été faite par M. Burali-Forti. *Le classi finite*, p. 3, note 5, ap. *Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino*, t. XXXII (1896) ; et mémoire déjà cité du *Congrès de Philosophie* (1900).

[4] V. notre ouvrage : *Les principes des mathématiques*.

rigoureux règne, sans prendre la forme de l'induction (si ce n'est dans les cas où un concept est fonction d'un nombre entier, comme le concept de polygone (*n*-gone), ce qui confirme notre thèse).

Enfin, et c'est là le point le plus important, le raisonnement par induction n'est nullement étranger ou réfractaire à la Logique ; et la preuve en est que nous avons pu le formuler symboliquement en termes purement logiques. Le principe d'induction n'est pas, comme on le croit, un principe original et extra-logique que les Mathématiques seraient obligées d'adjoindre aux principes de la Logique pour pouvoir démontrer leurs propositions : c'est, on l'a vu, une partie essentielle de la définition du nombre entier. Dira-t-on qu'il y a quelque chose d'artificiel et d'arbitraire à transformer un principe en une définition, ce qui semble lui enlever sa « valeur de vérité » et le réduire à une simple convention ? A cela il est facile de répondre que, si l'on retranchait le principe d'induction de la définition du nombre, le nombre ne serait plus défini, puisqu'on ne pourrait plus déduire ses propriétés de sa définition. Il faut donc bien que le principe d'induction soit incorporé à sa définition ; et il n'y a là rien d'arbitraire, si l'on veut définir, non un concept quelconque qu'on appellerait *nombre*, mais l'idée du nombre entier fini, qui est la base traditionnelle de l'Arithmétique ordinaire. Concluons donc que ni les Mathématiques en général, ni l'Arithmétique en particulier n'ont besoin, pour se constituer déductivement, de principes spéciaux, d' « axiomes propres », et que les principes généraux de la Logique leur suffisent, quand on leur adjoint, bien entendu, les définitions logiques des concepts propres aux mathématiques. La méthode mathématique n'est pas autre que la méthode logique, et la Mathématique elle-même n'est pas une science spéciale et autonome, mais une branche ou une application de la Logique. Telle est la conclusion philosophique la plus importante des recherches relatives à la Logique mathématique.

Louis Couturat (Paris).

LA LOI DES GRANDS NOMBRES

Pour la plupart, les idées philosophiques prêtent à discussion, donc au doute. Le mathématicien, lui, exclut le doute et nous verrons par quels procédés. Il construit une science logique, adéquate à la réalité jusqu'à preuve contraire, et de cette tour d'ivoire il descend, si nécessaire, mais par occasion seulement, à la réalité. Il se garde alors de conserver la belle assurance qui, tout à l'heure, l'élevait au-dessus du monde fuyant des contingences. Deux hommes sont en lui et des deux le logicien l'emporte.

Plus conséquent avec lui-même, le philosophe veut établir l'équilibre entre les deux hommes et, pour le faire, il tente de pénétrer l'inconnaissable. Nous ne le suivrons pas ici dans les tentatives qu'il a faites pour expliquer le HASARD; nous ne nous poserons pas avec lui ces questions : le hasard existe-t-il? qu'est-ce que le hasard? Nous tenterons seulement d'édifier avec le mathématicien une théorie purement logique du hasard et de conclure à la valeur morale de cette théorie.

Conséquence ou non de l'éducation, l'esprit cherche instinctivement la cause de tout événement : pas d'effet sans cause, dit l'adage, et au cas où deux événements se rencontrent sans que la cause de cette rencontre apparaisse, il y aura *hasard*. Pour certains esprits, le mot hasard est donc synonyme de « cause inconnue », mais existante : si nous connaissions parfaitement les lois qui régissent l'univers, disent-ils, le hasard ne serait plus qu'un mot. C'est fonder la philosophie sur un *déterminisme* incompatible avec le *libre arbitre*, car, dans l'ordre physique, le libre arbitre supprime la relation de cause à effet. Je ne veux pas dire cependant

que le libre arbitre soit l'unique loi du monde créé. Je ne conçois pas l'univers non régi par des lois. Mais on peut admettre que le libre arbitre soit le fait d'un choix possible entre plusieurs modes d'action définis au moins négativement — je puis aller de mille moyens différents de Paris à Versailles, je ne puis y aller par la poste — et laisser place ainsi au déterminisme. Dans ce déterminisme mitigé, la relation de cause à effet tient pour une part du libre arbitre et ne saurait plus, en conséquence, être constamment réduite en formules. Nul esprit, si puissant fût-il, ne pourrait dès lors conclure en toute circonstance de cause à effet ; tout au plus lui serait-il loisible de définir les effets possibles d'une cause donnée et de poser des inégalités, non des égalités, selon le langage des physiciens de l'Ecole moderne.

Pour d'autres le *hasard* est le résultat d'un concours de circonstances étrangères les unes aux autres....

J'en passe : il n'empêche que le mot hasard ne corresponde à un *sentiment* bien défini et que plusieurs *définitions* correspondant au *sentiment de hasard* soient également possibles : et je veux simplement remarquer ici que *les unes et les autres sont indifférentes au* Mathématicien, me réservant de reprendre et de développer dans la suite la théorie *philosophique* du hasard.

Le mathématicien, disions-nous, exclut le doute et il y parvient en construisant une science logique, algorithme plus ou moins parfait de la réalité. Que fera-t-il au sujet du hasard ?

J'ai besoin d'un point de comparaison.

Il est en mécanique rationnelle une notion qui a torturé bien des esprits : la notion de force.

Qu'est-ce qu'une force ?

Pour le philosophe stoïcien, la force est le principe universel des choses. Pour Büchner, la force est un attribut de de la matière. Spencer pense que la force est le principe indéfinissable qui, dans son évolution, produit tous les phénomènes de l'univers.

Ces conceptions métaphysiques n'offrent aucune prise à l'analyste. Aussi nous voyons Aristote, Archimède, Léonard

de Vinci et leurs successeurs immédiats fonder la Mécanique sur l'idée de *poids* qui, dérivée de l'idée de force, mais non adéquate à celle-ci, est du moins précise et féconde. Bientôt apparaît en Stévin l'idée du principe que nous appelons le « parallélogramme des forces », principe que Newton énonce enfin explicitement.

On connaît désormais une propriété fondamentale de la force. Quelle est, *sur l'idée de force*, l'influence de cette découverte ? que devient avec lui la notion de force ? Bernoulli tient le parallélogramme pour une vérité géométrique. Il en donne une démonstration *géométrique*. Toutefois, sa démonstration suppose *implicitement :* 1° que l'intensité et la direction de la force sont les causes déterminantes de son action ; 2° que plusieurs forces appliquées en un même point ont une résultante ; 3° que les forces considérées n'ont aucune influence les unes sur les autres, *propriétés qu'il faudrait tout d'abord établir*. Bernoulli préjuge donc de la nature de la force et, en fait, il se réfère à cette idée du temps que la force peut être assimilée à une traction qui, en toute circonstance, peut être remplacée par la traction que produirait un poids. »

Varignon, au contraire, remarque que les forces sont proportionnelles aux mouvements qu'elles produisent en des temps égaux et, définissant la force comme la *cause du mouvement*, il déduit la composition des forces de la composition des mouvements.

Voici que les idées se précisent. Désormais, le parallélogramme est un *principe d'expérience* en ce qui regarde les « tractions » ; que l'expérience soit directe ou qu'elle soit basée sur des expériences antérieures, telles que « l'indépendance des effets de tractions », il n'importe. Or le parallélogramme est une conséquence logique de cette autre expérience ; que les tractions sont proportionnelles aux accélérations qu'elles produisent. Nous définirons donc la force, généralisation de l'idée de traction, comme « la cause du mouvement » et nous justifierons cette définition en montrant que le principe du parallélogramme en est une conséquence.

Nous sommes partis d'un fait d'expérience, plutôt médiate qu'immédiate, il n'importe — le parallélogramme — et nous avons posé une définition qui en tient lieu.

Cette définition complète le principe et, féconde de sa nature, elle dépasse le principe. Elle permet en effet d'étudier des forces qui ne sont plus assimilables à des poids ou plutôt de faire abstraction de l'idée de poids.

Cette définition a cependant à sa base un point faible. Qu'est-ce qu'une cause ? que veut dire : la cause d'un mouvement ? Parler de la *cause* d'un mouvement nous renseigne-t-il sur ce mouvement ? Il semble bien que non. En fait, le mouvement nous est accessible, mais la cause du mouvement nous est cachée.

Aussi bien, dernier stade, *perdant de vue l'idée concrète de force et n'en retenant que le concept abstrait*, le géomètre définira la force qui produit un mouvement par l'accélération qu'il observe dans ce mouvement. Désormais, l'étude de la force sera conjointe à l'étude du mouvement, rien ne distinguera la force du mouvement.

Est-ce à dire que la mécanique est une science formelle et, par là, vaine ? Non.

J'ai défini une force par l'accélération du mouvement qu'elle produit et cette définition, excluant la métaphysique des considérations mathématiques, me permet d'édifier un système logique. Ce système est adéquat à la réalité pour autant que la définition de la force l'est et, si nécessaire, je passe sans effort de l'algorithme à la réalité.

La Mécanique est un schéma approximatif, mais logique de la réalité. Ce n'est donc pas une science *purement* formelle.

Ne suis-je pas résolu d'ailleurs à modifier l'algorithme qui représente l'insaisissable réalité, dès que le miroir déforme l'image ? La physique nous offre des exemples connus de ces modifications et si le jour est proche où la Mécanique rationnelle sera profondément remaniée, c'est que cette science s'éloigne en de trop nombreux points de la réalité.

J'ai retracé à grands traits l'histoire de la Mécanique, mon-

tré comment cette science se séparant peu à peu de la métaphysique est devenue science logique.

C'est l'histoire de toute science exacte et demain ce sera l'histoire du CALCUL DES PROBABILITÉS qui, lui, est encore discuté.

Il peut paraître étrange de vouloir codifier le *probable* et le ramener, dans une certaine mesure, au *certain*. Tel est cependant l'objet du *Calcul des probabilités*.

Voici un stratégiste en campagne. Il sait qu'il a devant lui un corps de l'armée ennemie et ses espions lui ont rapporté que le corps est cantonné à tel endroit. Il déploie sa carte, il étudie le terrain. L'ennemi a pour objet la ville qui s'étend vers la gauche, mais il en est séparé par un fleuve. Ici, cependant, est un gué, tandis qu'un peu plus bas les rives sont resserrées au point qu'on y peut jeter un pont volant. Quel point de passage choisira l'ennemi ? Quelle est la *probabilité* qu'il essayera de jeter un pont et non pas de franchir le gué ?

Tous les jours nous avons à résoudre des problèmes de ce genre et, d'ordinaire, nous nous décidons *au petit bonheur*. C'est ainsi qu'on remplace le tracé exact des dents d'un engrenage par un tracé approximatif, plus facile à établir.

Il est des cas, cependant, où il est possible de faire le calcul avec précision, de peser toutes les chances favorables et toutes les chances contraires, en un mot de *calculer une probabilité*. Les jeux de hasard, par exemple, se prêtent à ce calcul. Si l'on me promet dix francs chaque fois que je tirerai un roi d'un jeu de 32 cartes et qu'on ne me demande qu'un franc quand il sortira une autre carte, j'ai intérêt à souscrire aux conditions posées.

En effet, sur les 32 cartes, 4 sont des rois. J'ai donc 1 chance *sur* 8, une chance *contre* 7, de tirer un roi. On devrait donc, dans un jeu équitable, où les mises sont proportionnelles aux chances, me donner 7 francs et non pas 10 et si je joue *longtemps* à ce jeu je gagnerai : j'en suis sûr. Aujourd'hui, peut-être, perdrai-je, demain aussi, cette semaine encore. Mais dans un an, deux ans, j'aurai un bénéfice assuré. Nul ne sau-

rait contredire cette constatation, car c'est une constatation. Nous savons tous, *par expérience,* que la balance penche du côté où les chances sont les plus nombreuses.

Un examen attentif montre même de quel angle penche la balance. Dans le jeu précité je gagnerai, en moyenne, les $\frac{3}{8}$ des sommes totales que j'aurai jouées. Sur 32 coups, en effet, je gagnerai *en moyenne* 4 fois et je perdrai en moyenne 28 fois. Sur 32 coups, je paierai donc 28 francs, mais on me paiera 10×4 ou 40 francs ; j'aurai donc comme bénéfice *moyen* les $\frac{12}{32}$ ou les $\frac{3}{8}$ des 32 francs engagés et la loi étant évidemment générale, mon bénéfice *moyen* sera les $\frac{3}{8}$ de la somme totale engagée.

Je prends un livre où se trouvent des tables numériques, des statistiques, par exemple ; tel est l'Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'an 1903. A la page 438, est indiquée la superficie des arrondissements de France. La colonne de gauche ne renferme que les chiffres 0, 1, 2 : ces chiffres ne ressortissent donc pas du pur hasard. Le souci de former des divisions administratives d'étendues à peu près égales a fait que les arrondissements ont été limités à 300,000 hectares environ. La colonne qui suit, au contraire, renferme tous les chiffres de 0 à 10, mais j'admets, pour m'assurer un résultat exact, que ces chiffres sont, comme les précédents, soumis à une certaine loi, conséquence de la première.

D'autre part, dans les chiffres des unités, peuvent figurer certaines erreurs systématiques provenant des *équations personnelles* aux statisticiens, car ces chiffres ne sont qu'approximatifs et, pour la plupart, s'éloignent de la réalité. On le comprendra par la comparaison aux chiffres des unités relatifs à la Population. Chacun sait que les recensements ne se font que par à peu près et que les petites erreurs y sont fréquentes. Ces erreurs ne portent que sur des nombres peu élevés, mais enfin elles laissent place à l'équation personnelle relative à chacun des individus chargés du recensement, par exemple à la manie de tel ou tel d'*arrondir* les nombres.

Des chiffres donnés par l'Annuaire, je retiens donc seule-

ment comme soumis au pur hasard, ceux des dizaines, centaines, mille, dizaines de mille.

A priori, combien de ces chiffres seront pairs (0, 2, 4, 6, 8) *et combien seront impairs* (1, 3, 5, 7, 9) *ou, plutôt, quel sera le rapport du nombre des chiffres pairs au nombre des chiffres impairs ?*

Je ne crois pas m'avancer beaucoup en disant que pour tout esprit non prévenu — il semble que discuter le sujet l'obscurcisse parfois — ce rapport sera, à peu de chose près, 1, car je ne vois pas de raison pour que les chiffres pairs soient plus nombreux que les chiffres impairs. Il y aura cependant quelque différence de l'un à l'autre et, pour ce motif, le rapport ne sera pas exactement 1.

Cette idée que je prête à un esprit non prévenu lui vient d'une expérience de tous les jours. Il a pu constater, par exemple, que s'il jouait tous les jours la même somme avec des joueurs de la même force que lui, la perte d'un jour était compensée par le gain du lendemain ; qu'au jeu de roulette, la rouge sort à peu près aussi souvent que la noire ; que s'il marque habituellement la page de son livre de lecture, le chiffre en est tantôt pair, tantôt impair.... Il serait peut-être nécessaire de compter les chiffres de la statistique des superficies et de calculer le rapport que nous estimons devoir s'écarter peu de 1.... ce décompte n'a pas été fait. Je doute qu'on le fasse. Au fond je suis persuadé que le résultat serait celui que j'annonce et je suis même persuadé que le rapport du nombre des chiffres 3 au nombre total des chiffres serait environ $\frac{1}{10}$.

On a voulu compter des chiffres soi-disant pris au hasard : ceux qui interviennent dans les logarithmes et même ceux qui donnent l'expression approchée du nombre π. *Ces chiffres ne sont pas pris au hasard.* D'une part, la différence d'un logarithme à un autre est constante dans une échelle assez étendue, d'autre part, les chiffres qu'on rencontre dans le développement de π peuvent être soumis à une loi, puisque leur ensemble représente le rapport de la circonférence à son diamètre.

Que je compte ou non les chiffres de mon annuaire reconnus comme procédant du seul hasard, me voici, je suppose, persuadé que le rapport du nombre des chiffres pairs au nombre des chiffres impairs est à peu près 1, que le rapport du nombre des chiffres 3 au nombre total des chiffres est environ $\frac{1}{10}$. La question de cet *à peu près*, de cet *environ*, ne vient-elle pas dès lors se poser et son intérêt ne prime-t-il pas? Sans doute. Et comment la résoudre? Le principe de raison suffisante m'en donnera-t-il la solution? Je n'oserais l'affirmer. Qu'on en juge.

La différence entre l'unité et le rapport du nombre des chiffres pairs au nombre des chiffres impairs décroît et tend vers zéro à mesure que croît le nombre des chiffres décomptés. De même, la différence entre la fraction $\frac{1}{10}$ et le rapport du nombre des chiffres 3 au nombre total des chiffres décroît et tend vers zéro à mesure que croît le nombre des chiffres décomptés. Il y aura des exceptions à la règle, mais la règle s'affirmera dans le plus grand nombre des cas. Telle est la règle, règle que nous regarderons comme un principe d'expérience, au moins médiate, comme procédant d'une *induction* savante, basée sur l'expérience, comme un *fait*, analogue au principe du parallélogramme.

Que je vérifie d'ailleurs la règle sur 10, 100, 1000... suites de chiffres, pourrai-je l'affirmer *sans induction?* non, sans doute. Sans induction, je ne puis inférer du particulier au général, puisque, seul, le particulier est susceptible d'expériences. Sans induction, je n'aurais pu affirmer que si 10, 20, 50 « ronds » paraisssent jouir de cette propriété qu'ils ont même courbure en chacun de leurs points, *tous* les ronds ont partout même courbure. Si je vérifie qu'un cheval hâlant un bateau exerce un effort proportionnel au cosinus de l'angle que fait le câble avec l'axe du bateau, ce qui n'est qu'une manière d'énoncer le principe du parallélogramme, je ne puis non plus sans induction passer de là au principe *général* du parallélogramme. Ainsi du calcul des Probabilités.

Désormais, nous possédons une base d'opérations et le raisonnement logique va intervenir.

Je considère des événements *contradictoires* E_1, E_2, E_3, et je sais qu'il n'y a pas de raisons pour que l'un se produise plutôt que l'autre dans telle ou telle expérience. Que deviendra le principe relativement à ces événements ?

Faisant d'abord abstraction des événements E_3, qui n'influent pas sur les événements E_2, je sais, d'après le principe énoncé, que la différence entre l'unité et le rapport du nombre des arrivées des événements E_2 au nombre des arrivées des événements E_1 tend vers zéro. De même, la différence entre l'unité et le rapport du nombre des événements E_3 au nombre des événements E_1 tend vers zéro. Donc la différence entre deux fois l'unité et le rapport du nombre des arrivées des événements E_2 et E_3 au nombre des événements E_1 tend vers zéro et la différence entre 3 fois l'unité et le rapport entre du nombre total des événements au nombre d'arrivées de l'événement E_1 tend vers 1. Autrement dit, si les nombres d'arrivées des événements E_1, E_2, E_3, sont respectivement l_1, l_2, l_3 de ce que $1 - \frac{l_2}{l_1}$, $1 - \frac{l_3}{l_1}$ tendent vers zéro, je conclus que $2 - \frac{l_2 + l_3}{l_1}$ ou $3 - \frac{l_1 + l_2 + l_3}{l_1}$ tend aussi vers zéro et enfin que $\frac{l_1}{l_1 + l_2 + l_3}$ tend vers $\frac{1}{3}$; *le rapport du nombre des arrivées de l'événement* E_1 *au nombre total des événements tend vers* $\frac{1}{3}$. Nous sommes donc *logiquement* en mesure de donner au principe énoncé l'extension que voici : *Si des événements contradictoires* E_1, E_2,..., E_n *sont en présence et s'il n'y a pas de raison pour que l'un se produise plus souvent que l'autre, le rapport, dans un nombre donné d'épreuves, du nombre d'arrivées de l'un quelconque d'entre eux au nombre total des événements différera d'autant moins de la fraction* $\frac{1}{n}$ *que le nombre d'épreuves sera plus considérable.*

Cette proposition est connue sous le nom de LOI DES GRANDS NOMBRES. Elle a fait l'admiration des poètes qui ont voulu y voir une « loi immuable de la nature. » Elle a fait le désespoir des géomètres, qui ont voulu la démontrer *à priori*. Nous savons désormais qu'elle est un PRINCIPE D'EXPÉ-

RIENCE, c'est-à-dire un principe que l'induction déduit de quelques expériences particulières.

Nous ne sommes pas au terme. Le principe souffre une dernière extension *logique : Etant donné des événements contradictoires* E_1, E_2,..., E_n, *si les événements* E_1 *peuvent être partagés en classes* E_{11} E_{12},..., E_{1p} *contradictoires et ayant égale chance de se produire, si les événements* E_2 *peuvent à leur tour être partagés en classes* E_{21}, E_{22},..., E_{2q} *contradictoires aussi et ayant égales chances encore de se produire, et ainsi des autres, les événements* E_n *se partageant en classes* E_{n1}, E_{n2},..., E_{ns} *de même nature, si, de plus, les événements partiels* E_{11}, E_{12},.., E_{1p}, E_{21}, E_{22},..., E_{2q},... E_{n1}. E_{n2}.... E_{ns}, *qui sont contradictoires, ont égales chances de se produire, le rapport dans un nombre donné d'épreuves du nombre d'arrivées de l'événement* E_1 *au nombre total des événements différera d'autant moins de la fraction* $\frac{p}{p+q+\cdots+s}$ *que le nombre des épreuves sera plus grand et ainsi des autres événements* E_2, E_3,.., E_n *pour lesquels il faudra considérer les rapports* $\frac{q}{p+q+\cdots+s}$, ..., $\frac{n}{p+q+\cdots+s}$.

L'étude du problème que voici nous servira de démonstration. On lance deux dés sur une table. On peut amener ainsi les points 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Combien de fois sortira, *en moyenne* le point 8? vers quel nombre tendra le rapport du nombre d'arrivées du point 8 au nombre de coups joués?

L'événement E_8, c'est-à-dire la sortie du point 8 se décompose en les événements E_{81}, sortie des points 2 et 6. E_{82}, points 3 et 5, E_{83}, points 4 et 4, E_{84}, points 5 et 3, E_{85}, points 6 et 2 : on trouve ainsi 1 événement E_1, 2 événements E_3, 3 événements E_4, 4 événements E_5. 5 événements E_6, 6 événements E_7, 5 événements E_8, 4 événements E_9, 3 événements E_{10}, 2 événements E_{11}, 1 événement E_{12}, soit, en tout, 36 événements partiels également possibles. Le point 8 sortira donc, en moyenne, $\frac{5}{36}$ fois.

Nous sommes en possession du *principe*, principe d'expé-

rience. Ce n'est qu'au prix de vingt ans de réflexion que Jean Bernoulli le mit au jour. Nul ne saurait donc d'un coup s'élever à sa hauteur. Regardons le principe comme une vérité que tout jusqu'ici a tendu à confirmer et préoccupons-nous de fonder sur cette base le Calcul des Probabilités. Posons à cet effet une définition *renfermant le principe*.

Je remarque que sur les $p+q+\ldots+s$ événements contradictoires, mais également possibles E_{11}, $E_{12}, \ldots$, E_{1p}, E_{21}, $E_{22}, \ldots$, $E_{2q}, \ldots$, E_{n1}, $E_{n2}, \ldots$, E_{ns}, P sont favorables à E_1 : ce sont les événements E_{11}, $E_{12}, \ldots$, E_{1q} ; en sorte que le rapport $\frac{p}{p+q+\ldots+s}$ est *le rapport du nombre p des événements favorables à* E_1 *au nombre total* $p+q+\ldots+s$ *des événements différents qui peuvent se produire*. Je puis donc énoncer comme il suit la *loi des grands nombres : le rapport du nombre d'arrivées de l'événement* E_1 *au nombre total d'épreuves tend*, si le nombre des épreuves croît, *vers le rapport du nombre des cas favorables à* E_1 *au nombre des cas possibles*.

Sur N épreuves, l'événement E_1 devant se produire, d'après la loi de Bernoulli, $\frac{pN}{p+q+\ldots+s}$ fois, *le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles pourra donc servir à définir la probabilité*, définition qui viendra se substituer au Principe de Bernoulli. Elle le suppose d'ailleurs et c'est essentiel : si le rapport du nombre d'arrivées de l'événement E_1 au nombre total des événements ne tendait pas vers le rapport $\frac{p}{p+q+\ldots+s}$ du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles, la définition ne répondant à aucune réalité serait *sans objet*. Enfin cette définition doit contenir le Principe de Bernoulli, en ce sens qu'elle doit le restituer par voie logique. Il en est bien ainsi, mais là, je laisse la parole aux analystes.

L'induction, basée sur l'expérience, montre que si des événements contradictoires E_1, E_2 ont égale chance de se produire, le rapport du nombre d'arrivées de l'événement E_1 au nombre total d'épreuves tend vers la fraction $1/2$ et en diffère d'autant moins que le nombre d'épreuves est plus grand.

J'en déduis par un raisonnement logique que si des événements contradictoires $E_1, E_2, \dots, E_n$ ont égale chance de se produire, le rapport du nombre d'arrivées de l'événement E_1 au nombre total d'épreuves tend vers la fraction $\frac{1}{n}$ et en diffère d'autant moins que le nombre d'épreuves est plus grand, au point que, pour un nombre assez grand d'épreuves, la différence sera moindre que toute fraction, si petite qu'on puisse l'imaginer.

J'en déduis encore que si des événements contradictoires $E_1, E_2, \dots, E_n$ n'ont plus chances égales de se produire mais peuvent être partagés en classes d'événements contradictoires $E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1p}, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2q}, \dots, E_{n1}, E_{n2}, \dots, E_{ns}$ ayant, eux, égales chances de se produire, le rapport du nombre d'arrivées de l'événement E_1 au nombre total d'épreuves tend vers la fraction $\frac{p}{p+q+\dots+s}$, principe qui au cas de nombres égaux $p, q, \dots, s$, c'est-à-dire d'égale probabilité des événements $E_1, E_2, \dots, E_n$, se réduit au premier et par suite, est général.

J'infère de ce principe que le rapport du nombre d'arrivées de l'événement E_1 au nombre total d'épreuves est une quantité $\frac{p}{p+q+\dots+s}$ indépendante du nombre d'épreuves tentées et *je définis dès lors la probabilité de l'événement E_1 par cette quantité que j'observe être le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles.*

Cette définition, posée en vertu du principe, doit le renfermer. Sinon, elle n'aurait aucune raison d'être. *Le principe doit donc en être une conséquence logique et il l'est.*

Si le principe était reconnu inexact, la définition tomberait dans la mesure de cette inexactitude. Elle subsisterait dans les cas où le principe subsisterait, elle serait illusoire dans les autres cas.

Enfin, je note que la définition ne tient pas plus compte que le Principe des cas d'exception. J'en conclus que le calcul des Probabilités ne me renseigne que dans une certaine mesure, mesure que la définition même posée au début me permet d'apprécier en me donnant, par voie logique, la loi de

l'*écart*, c'est-à-dire la loi de la différence (du nombre probable d'arrivées $\frac{pN}{p+q+\cdots+s}$. De l'événement E_1, dans une suite de N épreuves, au nombre réel de ses arrivées).

Le Calcul des Probabilités atteint donc son but, qui est de donner des renseignements *moyens*. Si l'on se proposait d'obtenir des résultats exacts, le Calcul des Probabilités n'aurait plus sa raison d'être.

Est-il logiquement constitué ? Dois-je rappeler ici encore l'évolution de la Mécanique Rationnelle ? rappeler qu'en dernière analyse la notion de force : cause du mouvement, étant inaccessible à la pure logique, cette notion a cédé la place à celle-ci : la force est le produit de la masse par l'accélération, la masse même étant un nombre, un coefficient, disent les analystes ? *N'est-il pas clair que le Calcul des Probabilités présente encore un point qui* DÉFIE *la logique ?* Et qu'est-ce donc, *au point de vue logique*, que des événements ayant égale chance de se produire ? Des événements tels qu'il n'existe pas de raison pour que l'un se produise plutôt que l'autre ? Comment savoir qu'il n'est pas de raison en faveur de l'un ou l'autre ? Je ne vois pas de raison pour... est-ce à dire qu'il n'y a pas de raison pour ?

Newton ne voyait pas de raisons pour que la théorie de l'Emission fût contraire à la réalité. Newton cependant se trompait. Fresnel, lui, a trouvé ces raisons que Newton ne voyait pas.

C'est que le principe de raison suffisante, valable dans les circonstances ordinaires de la vie ou, à défaut d'autre base dans les sciences physiques, doit être rejeté des sciences mathématiques. Celles-ci doivent être uniquement fondées sur le principe de contradiction et l'induction savante.

Voici donc que le Calcul des Probabilités est édifié sur une appréciation à priori et par cela même *douteuse* des cas à examiner : si des événements E_{11}, E_{12},..., E_{ns}, disions-nous ont égale chance de se produire... Et quels seront ces événements connus ainsi qualitativement à priori ? Le dilemme est-il impossible à résoudre ? Non, sous condition de se

borner à l'étude d'événements *idéaux*, aussi peu matériels que le sont les lignes géométriques sans épaisseur.

Dès lors, la définition de la probabilité : *rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles* se réfère à un attribut qualitatif des événements étudiés, attribut qui, dans le cas présent, définit les événements. Je sais que tels et tels événements sont également possibles ; pourquoi ? il n'importe, je le sais ; cela suffit. Si l'on veut : *je définis les événements que j'étudie par cette condition qu'ils sont également possibles*, qu'il n'existe aucune raison permettant d'affirmer que l'un plutôt que l'autre se produira. Si je prends un billet de loterie, je ne choisirai pas le billet : aujourd'hui, tous les billets se valent,

Au reste le mot *Probabilité* posé au début est une cause de confusion en ce sens qu'il présuppose trop visiblement le théorème de Bernoulli. Je le remplacerai donc pour un temps par le mot *relativité* et désormais je dirai :

« I. Le calcul des Probabilités a pour objet l'étude d'événements ayant chance égale de se produire ou pouvant se ramener à des événements ayant chance égale de se produire, étant sous-entendu que de tels événements existent »

« II. Si p est le nombre des cas favorables à l'apparition de l'événement E, si P est le nombre des cas qui peuvent se produire, le rapport $\frac{p}{P}$ est appelé la *relativité* de l'événement ».

Théorème. « Le rapport du nombre d'arrivées de l'événement E au nombre des épreuves tentées tend vers un nombre fixe R indépendant du nombre des épreuves, quand le nombre des épreuves croît indéfiniment ».

En conséquence, ce nombre fixe R peut être regardé comme définissant la probabilité de l'événement E. En effet, sur N épreuves, l'événement E se produira, en moyenne, $R \times N$ fois.

Théorème. « Le nombre fixe R n'est autre que la relativité $\frac{p}{P}$ ».

En conséquence, la relativité, ou *le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles, définit la probabilité.* »

De la science *idéale*, ainsi constituée et basée enfin sur le seul principe de contradiction, nous passerons, quand il sera nécessaire, à la réalité, tout comme le géomètre qui applique au cours des astres les principes de la Mécanique Rationnelle; du moins nous serons assurés que la ruine du Principe de Bernoulli n'infirmerait plus le Calcul des Probabilités. Elle en supprimerait la raison d'être, elle ne ferait pas qu'il devînt science fausse.

Le Calcul des Probabilités a terminé son évolution. Il n'est plus qu'un chapitre de l'Algèbre.

Revenons à la question philosophique et tirons une conclusion de l'étude que nous avons faite. Voici le Calcul des Probabilités fondé sur la « loi des grands nombres, » regardée comme principe d'expérience, en ce sens que j'ai admis comme plus probable, dans un choix d'événements, l'arrivée de l'événement qui, sur un grand nombre d'épreuves se produit le plus souvent.

Et d'abord quelle est la raison d'être de la loi des grands nombres ? simplement ceci : que dans une série suffisamment étendue d'événements, comparables les uns aux autres, les causes déterminantes se neutralisent. Dans l'ensemble des propriétés foncières, les parcelles de telle ou telle étendue prédominent en vertu de ces causes que j'appelle déterminantes, ici les degrés de richesse des propriétaires et aussi les degrés de leur affection au sol. Groupez ensemble toutes les propriétés qui ont même superficie, à un hectare près, cela de 1 à 100 hectares : ces dernières seront encore en nombre assez grand et cela nous importe, nous allons en effet prendre des moyennes : comparez ensuite les chiffres des dizaines des 100 nombres obtenus par addition des superficies de mêmes espèces : vous trouverez à peu près autant de chiffres impairs que de chiffres pairs. Les chiffres des dizaines n'ayant rien à voir avec les causes déterminantes, rien d'étonnant à ce résultat.

Quelquefois même, les causes déterminantes n'existent pas. La subdivision régionale en arrondissements ne s'est nullement préoccupée, par exemple, du chiffre des dizaines

des superficies. Tout au plus a-t-elle voulu que les superficies totales soient comprises entre certaines limites qui ne peuvent affecter que les chiffres de rang élevé des nombres en question.

Dans l'un et l'autre cas, la loi des grands nombres s'impose en ce sens qu'on ne voit pas pourquoi elle ne serait pas vérifiée. Principe de raison suffisante? Sans doute, mais *principe aussi d'expérience* et cela est *mieux*.

Que conclure ?

Je joue tous les soirs au baccara. J'ai intérêt à connaître les résultats que me donne le Calcul des Probabilités quant à l'opportunité de tirer à 7 ou à 8 et encore je dois combiner ces résultats avec la méthode de jeu de mon adversaire; mais si, égaré par hasard dans la salle de jeu, je joue pour la première fois, étant décidé, au surplus, à ne plus jamais prendre une carte en mains tous les coups ne sont-ils pas d'égale valeur, puisque le Calcul des Probabilités ne s'applique qu'aux suites étendues d'événements ?

La question est oiseuse. Mille événements se rencontrent où la loi des grands nombres intervient et ces événements sont, dans une certaine mesure, comparables les uns aux autres. Le joueur qui, chaque jour, jouerait à un jeu différent aurait intérêt à jouer chaque jour les coups que la théorie donne comme les plus favorables : son gain serait la moyenne des gains théoriques relatifs à chaque coup.

Je conclus donc qu'il existe des suites d'événements dont les causes se neutralisent; ces suites d'événements obéissent en conséquence à la loi des grands nombres ou loi des moyennes.

Je pars de cette conclusion pour m'imposer comme règle de conduite le choix de la détermination que le Calcul des Probabilités m'indique correspondre à l'événement qui, sur une suite étendue, se présente le plus souvent.

Je reconnais donc au Calcul des Probabilités une valeur morale.

Pratiquement, une suite relative à deux événements contradictoires tombe sous le coup de la loi des grands nombres quand le nombre d'épreuves atteint 40. On dit qu'à Monaco

la série de 30 rouges ou 30 noires consécutives n'est pas encore sortie. De fait la probabilité de l'événement est $\frac{1}{1\,073\,741\,824}$ et il y a peu de chances qu'il se produise avant qu'on ait joué un nombre de coups comparable au chiffre 1 073 741 824, disons égal au quotient 1 073 741 824 : 40.

R. de Montessus

Maître de Conférences à la Faculté Libre
des Sciences de Lille.

SUR LE NOMBRE DES TANGENTES

QU'ON PEUT MENER A UNE COURBE PAR UN POINT SITUÉ SUR LA COURBE

1. — Le problème qui a pour but la détermination du nombre des tangentes qu'on peut mener à une courbe algébrique par un point situé sur la courbe se résout d'une manière presque intuitive quand on considère seulement les tangentes réelles, comme on peut voir dans l'ouvrage de Basset, *An elementary Treatise on cubic and quartic curves* (Cambridge, 1901, p. 17). Mais, quand on veut étudier cette question d'une manière générale, en considérant les tangentes réelles et imaginaires, sa résolution est moins facile. C'est à ce point de vue général que s'est placé Salmon dans son ouvrage sur les *courbes planes* (édit. française, Paris, 1884, p. 89), où il a donné à cet égard un théorème important, qu'il a obtenu par une élégante méthode algébrique.

Or, nous allons nous occuper de cette question, en nous plaçant aussi au point de vue algébrique général, pour donner une démonstration, que nous croyons nouvelle, condui-

sant par une méthode plus élémentaire au résultat obtenu par l'éminent géomètre anglais.

2. — Soit :

$$f(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe considérée et m son degré.

L'équation de sa première polaire, par rapport au point (x_1, y_1), est, comme on le sait, la suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_1) = 0,$$

et son degré est égal à $m - 1$.

Cela posé, nous allons démontrer le lemme suivant :

Si (x_1, y_1) est un point multiple d'ordre k de la courbe considérée, il est aussi un point multiple de même ordre de sa polaire, et les k branches de la courbe qui se coupent en ce point sont tangentes aux k branches de la polaire qui s'y coupent aussi.

On peut considérer comme compris dans cet énoncé le cas où (x_1, y_1) est un point simple de la courbe, en supposant alors $k = 1$.

Pour démontrer le lemme précédent, écrivons l'équation de la courbe de la manière suivante :

$$f(x_1 + x - x_1, y_1 + y - y_1) = 0,$$

et ensuite développons son premier membre suivant les puissances de $x - x_1$ et $y - y_1$; ce qui donne

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x - x_1) + \frac{\partial f}{\partial y_1}(y - y_1) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x - x_1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1}(x - x_1)(y - y_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}(y - y_1)^2\right] + \ldots = 0,$$

ou *symboliquement*

$$\sum_{n=1}^{n=m} \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x - x_1) + \frac{\partial f}{\partial y_1}(y - y_1)\right]^{(n)} = 0.$$

L'équation de la polaire de cette courbe peut être écrite de la

manière suivante, en ordonnant aussi son premier membre suivant les puissances de $x - x_1$ et $y - y_1$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x - x_1) + \frac{\partial f}{\partial y_1}(y - y_1) + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x - x_1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1}(x - x_1)(y - y_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}(y - y_1)^2\right] + \ldots = 0 ,$$

ou *symboliquement*

$$\sum_{n=1}^{n=m}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x - x_1) + \frac{\partial f}{\partial y_1}(y - y_1)\right]^{(n)} = 0 .$$

Ces équations montrent, en premier lieu, que si (x_1, y_1) est un point simple de la courbe considérée, la droite dont l'équation est

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x - x_1) + \frac{\partial f}{\partial y_1}(y - y_1) = 0$$

est tangente à cette courbe et à sa polaire.

On voit ensuite que, si (x_1, y_1) est un point double de la courbe considérée et si, par conséquent, ses coordonnées x_1 et y_1 satisfont aux équations $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, les deux droites représentées par les équations

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x - x_1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1}(x - x_1)(y - y_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}(y - y_1)^2 = 0$$

sont tangentes au point (x_1, y_1) à la courbe et à sa polaire.

En continuant de la même manière on démontre le lemme énoncé précédemment.

3. — En nous basant sur le lemme ci-dessus, nous allons déterminer le nombre des tangentes qu'on peut mener à une courbe donnée par le point (x_1, y_1).

Supposons d'abord que la courbe a seulement un point multiple, qui coïncide avec (x_1, y_1), et que l'ordre de ce point est égal à k.

La courbe donnée et sa polaire se coupent alors en $m(m-1)$ points et l'un de ces points coïncide avec (x_1, y_1).

Or, ce point étant multiple d'ordre k sur la courbe et sur la polaire, il compte pour k^2 intersections. Mais, comme les k branches de la courbe sont tangentes aux k branches de la polaire, chaque branche de celle-là a encore un autre point, consécutif à (x_1, y_1), en commun avec la polaire. Donc le nombre des intersections de la courbe et de sa polaire, distinctes de (x_1, y_1), est égal à

$$m(m-1) - k(k+1) .$$

Or, ces points coïncident avec les points de contact des tangentes à la courbe menées par (x_1, y_1) ; et on a, par conséquent, en représentant le nombre de ces tangentes par t,

$$t = m(m-1) - k(k+1) ,$$

résultat qui coïncide avec celui qui a été obtenu par Salmon.

Si (x_1, y_1) est un point simple, cette formule a encore lieu, en supposant alors $k = 1$.

Si la courbe donnée a δ points doubles et ν points de rebroussement, distincts de (x_1, y_1), la valeur de t peut être encore obtenue facilement, en employant la méthode dont on fait usage habituellement pour démontrer celle des formules de Plücker qui détermine la classe de la courbe (Salmon, *l. c.*, p. 77-78) et le lemme précédemment démontré. On trouve ainsi,

$$t = m(m-1) - 2\delta - 3\nu - k(k+1) .$$

F. Gomes Teixeira (Porto).

CHRONIQUE

Le Congrès international des Sciences; St-Louis, Etat-Unis.

Section de Géométrie. — Pour compléter le compte rendu que nous avons publié [1] sur les travaux mathématiques du Congrès de St-Louis, nous avons à donner encore un court aperçu des séances de la Section de Géométrie. Les rapports, au nombre de deux, comme pour toutes les autres sections, ont été présentés, l'un par M. Darboux (Paris) *sur le développement des méthodes géométriques*, l'autre par M. Kasner (Columbia Un., New-York) *sur les problèmes actuels de la Géométrie*.

La conférence de M. Darboux vient de paraître en librairie [2] et nous ne saurions trop recommander la lecture de cette magistrale étude qui donne, sous une forme très élégante, un aperçu des progrès de la Géométrie pendant le siècle qui vient de finir. Après avoir jeté un coup d'œil rapide sur l'état des Sciences mathématiques au commencement du XIXme siècle, le savant conférencier montre comment la Géométrie moderne est venue contribuer dans une large mesure au renouvellement de la Science mathématique tout entière. Il passe en revue les principaux travaux des mathématiciens illustres qui ont pris part au mouvement géométrique et dont les uns, tels que Poncelet, Chasles, Poinsot, Steiner, v. Staudt, etc., se rattachent plus spécialement aux méthodes de la Géométrie pure, tandis que les autres, tels que Monge, Dupin, Gauss, Plücker, etc., adoptent des méthodes mixtes qui ont contribué au développement des Géométries analytique et infinitésimale. Voici le passage concernant les *éléments de Géométrie* :

« Ils ont reçu depuis cent ans des accroissements qu'il convient de ne pas « oublier. La théorie des polyèdres s'est enrichie de belles découvertes de « Poinsot sur les polyèdres étoilés et de celles de Möbius sur les polyèdres « à une seule face. Les méthodes de transformation ont élargi l'exposition. « On peut dire aujourd'hui que le premier Livre contient la théorie de la « translation et de la symétrie, que le deuxième équivaut à la théorie de « la rotation et du déplacement, que le troisième repose sur l'homothétie et « l'inversion.

« Mais il faut bien reconnaître que c'est grâce à l'Analyse que les *Éléments* se sont enrichis de leurs plus belles propositions. C'est à l'Ana-

[1] L'*Ens. math.*, 7me année, p. 52-54, nº du 15 janvier 1905.
[2] 1 broch. in-8º de 34 p.: prix 1 fr. 50. Librairie Gauthier-Villars, Paris.

« lyse la plus haute que nous devons l'inscription des polygones réguliers « de 17 côtés et des polygones analogues. C'est à elle que nous devons les « démonstrations si longtemps cherchées de l'impossibilité de la quadra- « ture du cercle, de l'impossibilité de certaines constructions géométriques « à l'aide de la règle et du compas. C'est à elle enfin que nous devons les « premières démonstrations rigoureuses des propriétés de maximum et de « minimum de la sphère. Il appartiendra à la Géométrie d'intervenir sur ce « terrain où l'Analyse l'a précédée.

« Que seront les éléments de la Géométrie au cours du siècle qui vient de « commencer ? Y aura-t-il un seul Livre élémentaire de Géométrie ? C'est « peut-être l'Amérique avec ses écoles affranchies de tout programme et de « toute tradition, qui nous donnera les meilleures solutions de cette impor- « tante et difficile question. On a quelquefois appelé v. Staudt, l'*Euclide du* « *XIX*e *siècle;* je préférerais l'appeler l'*Euclide de la Géométrie projective:* « mais cette Géométrie, quelque intéressante qu'elle puisse être, est-elle « appelée à fournir la base unique des futurs éléments ? ».

Les *communications*, d'une durée de dix minutes chacune, étaient au nombre de sept :

1. H.-F. Blichfeldt (Standford Un., Cal.) : Sur quelques propriétés géométriques des surfaces de révolution.
2. G.-A. Bliss (Un. of Missouri) : Sur un problème du calcul des variations d'après la méthode géométrique de Jacobi.
3. L.-W. Dowling (Un. of Wisconsin) : Sur la génération de certaines courbes unicursales.
4. Arn. Emch (Un. of Colorado) : Sur les points d'inflexion d'une cubique plane et ses polaires.
5. G.-B. Halsted (Kenyon College, Ohio) : La sphérique non euclidienne.
6. H. Hancock (Purdue University, Ind.) : Surfaces minima algébriques.
7. H.-P. Manning (Brown University) : Représentation des variables complexes dans l'espace à quatre dimensions.

L'étude de M. Halsted sur *la sphérique non euclidienne* a un intérêt direct pour l'enseignement ; nous en donnerons le résumé[1] ci-après :

Ce mémoire traite un point déjà abordé par l'auteur dans sa *Rational Geometry*[2]. L'indépendance de la trigonométrie sphérique à l'égard du postulat des parallèles ayant été mise en évidence par la création de la géométrie non euclidienne, la sphérique pure, qui est si importante, ne doit pas être euclidienne. Ceci montre la nécessité de s'affranchir, pour la traiter convenablement, de tout théorème de géométrie solide que l'on transporterait ensuite

[1] Rédigé par notre distingué collaborateur, M. P. Barbarin (Bordeaux), d'après le manuscrit de l'auteur.
[2] Voir l'analyse dans la *Bibliographie* de ce N°, p. 160-162.

à la surface de la sphère. Donc, plus de ligne droite, plus de grand cercle, mais à leur place un être géométrique nouveau qui n'est autre que la géodésique sphérique et que M. Halsted nomme *straightest.* On pourrait la définir comme la ligne que déterminent deux points suffisamment rapprochés, mais ce dernier terme n'étant pas clair, l'auteur préfère lui substituer l'axiome d'association.

I. A tout point A on peut associer un point B et un seul qui avec A ne détermine pas une droite sphérique. B est dit *opposé* à A.

Les trois points A, B, C d'un certain circuit présentent ou ne présentent pas d'ordre déterminé selon que le circuit est ouvert ou fermé. De là les trois axiomes d'ordre :

II. 1. Aucun point de la sphère n'est *entre* deux points opposés ;

2. Aucun point n'est entre son opposé et un troisième point ;

3. Entre deux points non opposés il y a toujours un troisième point. — Notion du segment.

III. Axiomes de congruence, suivant les idées de M. Hilbert ; on peut prouver qu'un segment est congruent à lui-même. Figures symétriques. M. Halsted fait une distinction entre la symétrie sur le plan et celle sur la sphère ; mais on peut l'annihiler en plaçant la sphère dans un espace approprié où elle est retournable.

Reste l'axiome de continuité ; il paraît plus nécessaire sur la sphère que sur le plan, pourtant l'auteur a réussi à s'en affranchir dans sa *Rational Geometry* qui est une œuvre fort intéressante.

Distinction. — Le Jury international de l'Exposition universelle de St-Louis a décerné à M. Ernest Lebon (Paris) une Médaille d'Argent pour l'ensemble de ses Publications Mathématiques.

Jubilé Lejeune Dirichlet.

Après les jubilés d'Abel et de Jacobi, c'était le tour de Lejeune Dirichlet (1805-1859), dont les profondes recherches n'ont cessé d'exercer une influence sur le développement de la Théorie des nombres, de l'Analyse et de la Physique mathématique. Après avoir fait ses études à la Sorbonne et au Collège de France, Dirichlet professa successivement les mathématiques à l'Ecole militaire de Berlin, à l'Université de Berlin, puis à Gœttingue où il fut appelé à succéder à son illustre maître Gauss.

Les mathématiciens de Gœttingue ont commémoré le centenaire de la naissance de leur éminent compatriote, le 13 février dernier, en une séance, organisée par la Société mathématique, et dans la-

quelle M. le Prof. MINKOWSKI a donné un aperçu de la vie et des travaux de Dirichlet.

D'autre part, le *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, qui comptait Dirichlet au nombre de ses collaborateurs, a consacré le premier fascicule du tome 129, « à la mémoire de Lejeune Dirichlet » (voir le sommaire à la fin de ce numéro).

Monument Lalande.

Il vient de se former un comité[1] dans le but d'élever, à Bourg-en-Bresse, un monument à JÉRÔME LALANDE (1732-1807), à l'occasion du centenaire de sa mort. Les services rendus à la science par ce grand astronome sont considérables. Grâce à ses nombreux écrits et à ses tables, il est encore aujourd'hui universellement connu dans le monde des astronomes et des mathématiciens.

Né en Bourg-en-Bresse en 1732, Lalande fut reçu à l'Académie des Sciences de Paris déjà en 1753 et devint professeur au Collège de France en 1762. Parmi ses nombreux travaux, rappelons son *Traité d'astronomie*, plusieurs fois réimprimé ; son *Histoire céleste française*, sa *Bibliographie astronomique* et ses *Tables de logarithmes à cinq décimales*.

Réunion des maîtres de mathématiques des Ecoles moyennes autrichiennes.

Le 17 décembre 1904 a eu lieu à Vienne, sous la présidence de M. H. JANUSCHKE, une réunion commune des sociétés « Ecole moyenne » et « Ecole réale », ayant pour objet une conférence de M. le Prof.-Dr C. ZAHRADNICEK *sur la nécessité d'introduire les éléments de calcul infinitésimal dans les programmes de l'enseignement secondaire supérieur*[2]. Le conférencier a insisté sur les avantages qu'en retirerait l'enseignement de la Physique, dans lequel bien des notions, telles que la vitesse, l'accélération, gagneraient en précision ; beaucoup de démonstrations pourraient être considérablement simplifiées, par exemple tout ce qui concerne le centre de gravité, le moment d'inertie. Il a donné ensuite quelques indications sur ce qui se fait dans ce domaine dans les éta-

[1] Les souscriptions seront reçues par le trésorier, M. Huteau, 20, boulevard Victor-Hugo, à Bourg-en-Bresse (Ain), France.

[2] Il est à remarquer qu'à la même date du 17 déc., la même question a été traitée à Zurich, à la réunion annuelle des maîtres de mathématiques des Ecoles moyennes suisses, dont nous avons rendu compte dans notre dernier numéro. Cette coïncidence montre bien que les vœux émis de part et d'autre résultent d'un besoin qui se fait sentir dans l'enseignement secondaire supérieur des divers pays. A tous ceux qui s'intéressent à ce mouvement, nous signalerons à nouveau les divers articles de M. F. Klein. Voir notamment les *Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen, gesammelt von* F. KLEIN u. E. RIECKE, Leipzig, 1904.

blissements allemands, anglais et américains. Dans la discussion, M. Dr Ign. Wallentin, inspecteur, fit remarquer qu'en réalité, déjà maintenant, quelques notions de mathématiques supérieures se sont glissées, sous une forme déguisée, dans l'enseignement des Mathématiques et de la Physique. Sauf une certaine opposition provenant de représentants des gymnases, l'assemblée était favorable à un remaniement des programmes; elle a accepté le principe de l'introduction des éléments de Mathématiques supérieures, et elle a nommé une commission chargée d'examiner dans quelle mesure cette introduction est désirable et réalisable.

Cours de vacances pour les maîtres de l'enseignement secondaire en Autriche.

Le ministre autrichien de l'Instruction publique vient de décider la création de cours de vacances pour les maîtres de sciences de l'enseignement secondaire. Ces cours seront organisés d'une manière analogue à ceux qui existent déjà dans divers pays. Leur but est de permettre aux maîtres de compléter et d'approfondir leurs connaissances conformément à l'état actuel de la science. Ils auront lieu dans plusieurs villes universitaires et comprendront des cours théoriques et des exercices pratiques. Pour cette première année, les cours seront organisés à Graz, Prague et Lemberg.

Nominations et distinctions.

M. Em. Borel, chargé d'un cours de théorie des fonctions à la Faculté des Sciences de Paris, est nommé professeur-adjoint.

M. Mor. Cantor est nommé membre honoraire de la Royal Society d'Edinbourg.

M. L. Courvoisier, de l'Observatoire de Heidelberg, est nommé astronome à l'Observatoire de Berlin.

M. Esclangon est nommé astronome-adjoint à l'Observatoire de Bordeaux, en remplacement de M. Péraud, décédé.

M. H.-B. Evans est nommé professeur-adjoint de mathématiques à l'Université de Pensylvanie.

M. E.-D. Erant est nommé professeur-adjoint de mathématiques à l'Ecole des Mines de Michigan.

M. E. Jahnke est nommé professeur de mathématiques à l'Ecole des Mines de Berlin, en remplacement de M. Kneser, nommé à Breslau.

M. E. Janisch, prof. extr., est nommé professeur ordinaire à l'Université de Prague.

M. M. Lerch, professeur à l'Université de Fribourg (Suisse), est nommé Membre correspondant de la Société royale des Sciences de Liège.

M. W.-F. Meyer et A. Schœnflies, professeurs à l'Université de Königsberg, sont nommés Membres correspondants de la Société royale des Sciences de Liège.

M. Painlevé, répétiteur d'Analyse à l'Ecole polytechnique de Paris, est nommé professeur de Mécanique, en remplacement de M. Léauté, retraité, et nommé professeur honoraire.

M. J. Stebbins est nommé professeur-adjoint d'Astronomie à l'Université de l'Illinois.

M. C.-P. Weston est nommé professeur-adjoint de Mécanique à l'Université du Maine.

M. H.-R. Williard est nommé instructeur à l'Université du Maine.

M. A.-H. Wilson est nommé instructeur de mathématiques à l'Université de l'Illinois.

M. Zsigmondi est nommé prof. ord. à l'Ecole techn. sup. allem. de Prague.

Nécrologie.

J.-C.-V. Hoffmann. — Le 21 janvier dernier est mort à Leipzig, l'un de nos anciens confrères qui, par ses écrits et son journal, a rendu de grands services à l'enseignement scientifique en Allemagne. Nous voulons parler de M. J.-C.-V. Hoffmann, fondateur de la *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, dont il fut le directeur pendant trente-deux ans : il prit congé de ses lecteurs à Noël 1901 et remit la direction du journal à M. H. Schotten, directeur de l'Ecole réale supérieure de Halle. Hoffmann est mort dans sa quatre-vingtième année, après une carrière bien remplie.

L. v. Tetmajer. — L'Ecole technique supérieure de Vienne vient d'être douloureusment frappée par la mort de deux de ses plus illustres professeurs, MM. L. v. Tetmajer, recteur, et L. Ditscheiner, décédés à la fin de janvier 1905.

Né en Hongrie le 14 juillet 1850, v. Tetmajer fit ses études 1868-1872 à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich où il fonctionna ensuite successivement comme assistant et comme privat-docent, après avoir pris contact avec la pratique en qualité d'ingénieur au chemin de fer du N.-E. En 1881, il fut nommé professeur de Technologie à l'Ecole polytechnique de Zurich et, grâce à ses importants travaux et à son brillant enseignement, il ne tarda pas à être placé parmi les meilleurs professeurs de cet établissement. Ses recherches sur la résistance des matériaux sont bien connues des ingénieurs ; elles lui valurent, en 1901, un appel à l'Ecole technique de Vienne. Tetmajer accepta cet appel et ne tarda pas à entreprendre la création d'un laboratoire d'essai, analogue à celui qu'il avait installé à Zurich.

L. Ditscheiner. — Le 31 janvier, le lendemain de la mort de M. v. Tetmajer, mourut son collègue, M. Léandre Ditscheiner, professeur de Physique mathématique et de Cristallographie à l'Ecole technique supérieure de Vienne. Ditscheiner était né le 4 janvier 1839; c'était un savant très estimé et très populaire; ses principaux travaux appartiennent au domaine de la théorie des ondes et de la théorie optique des couleurs.

Nous apprenons, d'autre part, la mort de :

M. Fr. Chizzoni, professeur de Géométrie à l'Université de Modena, décédé à l'âge de 56 ans;

M. Féraud, astronome-adjoint à l'Observatoire et professeur-adjoint de mathématiques à la Faculté des Sciences de Bordeaux, décédé subitement le 7 janvier dernier;

M. Folie, ancien directeur de l'Observatoire de Bruxelles;

M. Guido Hauck, professeur de Géométrie descriptive à l'Ecole technique supérieure de Berlin, décédé le 25 janvier 1905, dans sa 60[me] année;

M. James-W. Mason, ancien professeur au College of the City of New-York;

M. Rob. Tucker, ancien secrétaire (de 1867 à 1901) de la Société mathématique de Londres.

NOTES ET DOCUMENTS

Sous ce titre nous publions des renseignements relatifs à l'organisation de de l'enseignement : créations nouvelles, programmes et règlements d'un intérêt général, liste des cours des principales Universités et Ecoles supérieures, etc.
La Rédaction.

FRANCE

Projet de programme pour la classe de mathématiques spéciales[1]

publié par la *Revue de Mathématiques spéciales*.

A. — ALGÈBRE ET ANALYSE

Nombres imaginaires. — Calcul algébrique. Applications à la racine carrée d'un nombre négatif, à la résolution de l'équation du second degré et à la résolution de l'équation bicarrée.

---

[1] Ce projet émane de notre éminent confrère M. L. Humbert, professeur de spéciales au Lycée Louis-le-Grand, à Paris. Nous serons reconnaissants à nos lecteurs des réflexions et des remarques qu'ils jugeraient utiles de nous communiquer à ce sujet.

Arrangements, permutations et combinaisons sans répétition.

Polynômes entiers. — Addition et soustraction. — Multiplication.

Formule du binôme dans le cas de l'exposant entier et positif.

Division des polynômes entiers. — Plus grand commun diviseur de deux polynômes. — Conséquences relatives à la théorie de la divisibilité. — Identité $Au + Bv \equiv 1$ ou $Au + Bv \equiv 0$.

Division par $x - a$. — Conséquences. — Polynômes identiques.

Enoncé du théorème de d'Alembert. — Décomposition d'un polynôme entier en facteurs primaires. — Nombre des racines. — Relations entre les coefficients et les racines.

Diviseurs d'un polynôme entier. — P. g. c. d. et p. p. c. m. de plusieurs polynômes.

Racines imaginaires des polynômes à coefficients réels. — Indication que fournissent les signes des résultats de la substitution de deux nombres réels.

Fonctions. — Définition d'une fonction. — Exemples.

Limites. — Limites d'une somme, d'un produit, d'un quotient.

Continuité et représentation graphique d'une fonction.

Fonction croissante ou décroissante dans un intervalle (définitions). — Exemples.

Fonction exponentielle. — Calcul des radicaux arithmétiques. — Exposants fractionnaires, négatifs. — Propriétés de la fonction a^x. — Limite du rapport $\frac{x^p}{a^x}$ $(a > 1)$ pour x infini et positif.

Fonction logarithmique. — Propriétés. — Les diverses fonctions logarithmiques. — Logarithmes vulgaires.

Etude sommaire des fonctions e^u, $\log u$, x^m, u^m, x^x, u^v.

Séries. — Séries absolument convergentes. — Convergence d'une série alternée dont le terme général décroît constamment en valeur absolue et tend vers zéro.

Séries à termes positifs : caractères de convergence ou de divergence tirés de l'étude des expressions $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, $\sqrt[n]{u_n}$, $n^p u_n$.

Calcul des k premiers chiffres du développement décimal de la somme d'une série numérique.

Addition, soustraction, multiplication des séries.

Nombre e. — Limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ pour m infini. — Logarithmes népériens.

Infiniment petits. — Ordre relatif de deux infiniment petits. — Partie principale. — Infiniment petits équivalents.

Dérivée d'une fonction. — Différentielle première. — Représentation géométrique. — Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une fonction de fonction. — Dérivées des fonctions simples : x^m, a^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\cot x$, $\operatorname{arc} \sin x$, $\operatorname{arc} \cos x$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc} \cot x$.

Théorème de Rolle, formule des accroissements finis. — Fonction constante, croissante ou décroissante dans un intervalle (a, b). — Etude d'une fonction en un point. — Maximum, minimum.

Étude des variations d'une fonction. — Exemples variés.

Fonctions de plusieurs variables indépendantes. — Dérivées partielles, notations.

Dérivée et différentielle d'une fonction composée. — Dérivée des divers ordres, cas où les composantes sont linéaires.

Différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables. — Transformer son expression quand on effectue un changement de variables.

Dérivée d'une fonction implicite (on admettra sans démonstration l'existence de cette fonction et de sa dérivée).

Théorème des fonctions homogènes.

Fonctions primitives d'une fonction donnée, leur représentation par l'aire d'une courbe. — Intégrale définie. — Symboles $\int_a^b f(x)\,dx$ et $\int f(x)\,dx$. — Tableau des intégrales immédiates.

Valeur moyenne d'une fonction dans un intervalle. — Changement de la variable. — Intégration par parties. — Applications simples.

Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples. — Intégration des différentielles rationnelles en x et de celles qui s'y ramènent[1].

Dans la suite du cours, on appliquera les quadratures à la rectification des courbes, au calcul d'un volume décomposé en tranches par des plans parallèles, au calcul des moments d'inertie du cylindre de révolution, de la sphère et du parallélépipède rectangle par rapport à leurs axes de symétrie.

Séries entières. — Intervalle de convergence. — Intégration et dérivation d'une série entière à l'intérieur de son intervalle de convergence. (On ne s'occupera pas de ce qui se passe aux limites de cet intervalle).

Développement en série de

$$\frac{1}{1-x}\,;\ \frac{1}{1+x^2}\,;\ \mathrm{L}\,(1-x)\,;\ \text{arc tang}\ x\,;\ \mathrm{L}\,\frac{1-x}{1+x}\,.$$

Série exponentielle, série du binôme; on peut trouver leurs sommes à l'aide des équations

$$y' = y \text{ et } y'\,(1+x) = my$$

Développement en série de a^x et arc sin x.

Formules de Taylor et de Maclaurin. — Développements en séries. — N'appliquer qu'à e^x, sin x, cos x.

Appliquer la formule de Taylor à l'étude d'une fonction en un point; à l'étude du quotient de deux fonctions qui s'annulent pour une même valeur de x au voisinage de cette valeur. — Diverses formes d'indétermination.

Formule de Taylor dans le cas de plusieurs variables indépendantes. — Insister sur le cas où la fonction est un polynôme entier.

Déterminants. — Définition, développement suivant les éléments d'une même ligne. — Échange des lignes avec les colonnes. — Permutation de deux lignes. — Addition de lignes.

Équations linéaires.

Formes linéaires. — Conditions d'indépendance. — Multiplication des déterminants.

Homogénéité. — Rendre un système d'équations entières homogène. —

[1] Chacune de ces questions sera traitée à la place toute marquée qu'elle a dans le cours.

Solution finie, solution infinie d'un système. — Définition générale du résultant d'un système de $n+1$ équations entières à n inconnues.

Application de ce qui précède aux équations linéaires.

Fonctions symétriques et rationnelles des racines d'une équation entière. — Leur calcul à l'aide des sommes des puissances semblables des racines. — Notion de poids.

Élimination d'une inconnue entre deux équations entières au moyen des fonctions symétriques. — Théorème de Bezout, sans examen d'aucun cas particulier.

Racines égales. — Conditions pour qu'un nombre a soit racine multiple d'ordre p d'un polynôme entier. — Discriminant.

Abaissement d'une équation entière ayant des racines multiples.

Autre exemple d'abaissement : équations réciproques.

Théorème de Descartes.

Recherche des racines commensurables.

Résolution numérique des équations algébriques ou transcendantes. — Méthodes d'approximation de Newton et des parties proportionnelles expliquées par des considérations géométriques.

II. — TRIGONOMÉTRIE

Vecteurs. — Somme géométrique de vecteurs. — Valeur algébrique d'un vecteur. — Théorème des projections.

Arcs positifs, arcs négatifs. — Diverses valeurs de l'arc AB.

Définition du cosinus, du sinus d'un arc. — Projection orthogonale d'un vecteur sur un axe. — Produits géométriques.

Formules d'addition : $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$.

Fonctions circulaires. — Relations qui existent entre elles. Variation des fonctions circulaires.

Résolution des équations $\sin x = a$, $\cos x = a$, etc.

Formules relatives aux arcs $\frac{\pi}{2} - x$, $\frac{\pi}{2} + x$, $\pi + x$, $\pi - x$, $\frac{3\pi}{2} \pm x$, etc. — Ramener un arc au premier quadrant. — Limite du rapport $\frac{x}{\sin x}$ (pour $x = 0$).

Addition, soustraction des arcs (deux ou trois). — Multiplication des arcs. — Cas où l'on multiplie par 2 et par 3.

Division des arcs. — Cas où l'on divise par 2 et par 3. — Résolution trigonométrique de l'équation du troisième degré.

Usage des tables de logarithmes. — Formules logarithmiques.

Résolution des triangles rectilignes. — Équivalence des systèmes de formules.

Forme trigonométrique et représentation géométrique de l'imaginaire.

Addition, soustraction, multiplication et division des imaginaires.

Formule de Moivre.

Séries imaginaires. — Fonctions e^z, $\cos z$ et $\sin z$.

Somme de sinus ou de cosinus de n arcs en progression arithmétique.

Expression de $\sin^n x, \cos^n x$ en fonction des sinus et cosinus des multiples de x. — Applications au calcul intégral et aux développements en séries.

Addition, soustraction, multiplication et division des arcs.

Résolution trigonométrique de l'équation binôme.

III. — GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1° *Géométrie plane.*

Coordonnées rectilignes. — Représentation d'une ligne par une équation. — Exemples simples.

Homogénéité. — Construction d'expressions algébriques.

Formules fondamentales : cosinus directeurs d'une direction, paramètres directeurs. — Angle d'une droite avec ox. — Cosinus de l'angle de deux directions. — Distance d'un point à l'origine.

Transformation des coordonnées. — Distance de deux points. — Ordre d'une courbe algébrique. Equation de la droite.

Mouvements dans un plan : translation, rotation, glissement.

Coordonnées homogènes et points à l'infini.

Ligne droite. — Équation. — Parallélisme. — Angle d'une droite avec ox, angle de deux droites. — Distance d'un point à une droite. — Applications. — Problèmes simples relatifs à la détermination d'une droite. — Intersection de deux droites. — Faisceau linéaire.

Aire d'un triangle. — Signes des aires. — Evaluation algébrique d'une aire centrée. Applications aux polygones.

Notions sur les éléments imaginaires.

Systèmes de droites issues de l'origine. — Droites isotropes. — Faisceau de droites joignant l'origine aux points de rencontre de deux lignes.

Rapport anharmonique. — Le rapport anharmonique est projectif. — Expression algébrique du rapport anharmonique. — Rapport anharmonique de quatre nombres. — C'est un invariant. — Condition pour que quatre éléments soient harmoniques. — Applications.

Correspondance entre les points de deux séries, les rayons de deux faisceaux, les points d'une série et les rayons d'un faisceau. — Relation homographique. — Séries et faisceaux homographiques (étude sommaire).

Cercle (coordonnées rectangulaires[1]. — Involution.

Généralités sur les lieux géométriques.

Etude simultanée des courbes définies par deux équations paramétriques $x = f(t)$, $y = g(t)$, ou bien dont l'équation est résolue par rapport à l'une des coordonnées. — Définition des courbes unicursales. — Ordre. — Tangente ; normale. — Problèmes simples relatifs aux tangentes et aux normales. — Sous-tangente, sous-normale, tangente et normale. — Les cubiques à point double et les quartiques ayant trois points doubles sont unicursales.

Construction de ces lignes. — Concavité, convexité, points d'inflexion. — Asymptotes.

Arc d'une courbe. — Orientation d'une ligne. — Cosinus directeurs de la tangente.

Courbure. — Rayon de courbure, centre et cercle de courbure. — Développée.

Courbes algébriques. — Généralités sur les courbes du second degré : dérivées partielles ; discriminant ; mineurs du discriminant ; solutions doubles ; conditions pour qu'une courbe du second ordre se réduise à deux

[1] Je n'ai pas détaillé les questions à traiter dans ce chapitre, parce qu'il m'a semblé qu'une étude sommaire du cercle ne prête à aucune confusion. — Même remarque pour la sphère. (Voir plus loin.)

droites distinctes, à deux droites confondues ; la forme adjointe ; intersection d'une conique avec une droite ; points à l'infini ; tangentes en ces points ; les trois genres de coniques. — Intersection d'une courbe algébrique avec une droite. — Point simple. — Point double. — Tangente en un point simple. — Problèmes sur les tangentes. — Équation tangentielle. — Normales. — Appliquer ce qui précède aux coniques et donner la classification à l'aide des points doubles.

Enveloppes. — Ce que représente une équation tangentielle.

Étude très sommaire d'une courbe autour d'un de ses points. — Tangentes à l'origine.

Recherche des asymptotes sur des exemples simples.

Courbes du second ordre. — Classification en appliquant la méthode de décomposition en carrés ; formes réduites ; exemples numériques. — Pôle et polaire. — Discussion. — Transformation par polaires réciproques. — Centres. — Diamètres. — Directions conjuguées, diamètres conjugués. — Directions principales, axes principaux en supposant les axes rectangulaires. — Recherche des formes réduites ; calcul des coefficients de ces formes dans le cas où les coordonnées sont rectangulaires.

Foyers et directrices. — Excentricité. — Paramètre. — Recherche des foyers et des directrices sur les équations réduites en coordonnées rectangulaires. — Équation focale. — Sécante envisagée par rapport à un foyer et à la directrice correspondante. — Polaire d'un point de la directrice.

Étude des courbes du second ordre sur leurs équations réduites. — Diamètres, diamètres conjugués, théorèmes d'Apollonius. — Cordes supplémentaires. — Tangentes, problèmes sur les tangentes. — Normales. — Propriétés focales et tracés qui en résultent. — Tracés spéciaux relatifs à l'ellipse envisagée comme projection orthogonale du cercle. — Tracés spéciaux relatifs à l'hyperbole définie par ses asymptotes et un point. — Propriétés spéciales de la parabole relativement aux diamètres, à la sous-tangente et à la sous-normale.

Rapport anharmonique de quatre points ou de quatre tangentes d'une conique. — Divisions homographiques et divisions en involution sur une conique.

Une conique est déterminée par cinq points ou par cinq tangentes. — Théorèmes de Pascal et de Brianchon.

Deux coniques se coupent, en général, en quatre points, réels ou imaginaires, distincts ou confondus, à distance finie ou infinie. — Notions succinctes sur les coniques d'un faisceau linéaire ponctuel. — Théorème de Desargues.

Homothétie et similitude.

Coordonnées polaires. — Équation de la droite. — Tangente à une courbe. — Asymptote. — Construction d'une courbe dont l'équation est résolue par rapport à ρ.

Aire décrite par un rayon vecteur qui tourne autour de l'origine et dont l'extrémité glisse sur une courbe

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2\, d\omega \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (xy' - yx')\,dt.$$

2. Géométrie dans l'espace.

Coordonnées rectilignes. — Représentation d'une surface par une équation, d'une ligne par deux équations.

Formules fondamentales. — Les trouver avec des axes quelconques et insister sur le cas où les axes sont rectangulaires.

Transformation des coordonnées. — Distance de deux points. — Ordre d'une surface algébrique. — Équation du plan. — Formules d'Euler.

Coordonnées homogènes et points à l'infini.

Plan. — Équation du plan. — Parallélisme. — Angle de deux plans. — Intersection de deux plans. — Faisceau linéaire. — Intersection de trois plans. — Condition pour que quatre plans passent par le même point. — Problèmes simples de détermination. — Distance d'un point à un plan (toutes les questions relatives aux angles et aux distances se traiteront avec des axes rectangulaires). — Applications. Rapport anharmonique de quatre plans appartenant à un même faisceau linéaire.

Volume du tétraèdre. — Signe d'un tel volume.

Ligne droite. — Équation. — Parallélisme. — Angle de deux droites. — Angle d'une droite et d'un plan. — Applications. — Intersection d'une droite et d'un plan. — Condition pour que deux droites se rencontrent. — Distance d'un point à une droite. — Perpendiculaire commune à deux droites, plus courte distance.

Étude sommaire de la sphère (axes rectangulaires).

Courbes gauches. — Ordre d'une courbe algébrique. — Courbes unicursales. — Cône projetant une ligne d'un point de l'espace. — Cubique gauche. — Tangente. — Plan osculateur. — Courbure. — Plan tangent à une surface en un point.

Surfaces algébriques. — Intersection d'une surface algébrique avec une droite qui tourne autour d'un point. — Point simple. — Point double ou conique. — Plan tangent en un point simple, tangentes inflexionnelles. — Applications aux surfaces du second ordre. — Problèmes simples relatifs aux plans tangents. — Cône ou cylindre circonscrit. — Applications aux surfaces du second ordre et, en particulier, les classer à l'aide des points doubles qu'elle peuvent avoir.

Génération des surfaces. — Quelques généralités. — Enveloppes. — Notions sur les surfaces réglées et les surfaces développables. — Cylindres. — Cônes. — Surfaces de révolution.

Surfaces du second ordre. — Intersection avec une droite. — Points à l'infini. — Plans asymptotes. — Cône directeur. — Homothétie. — Sections planes. — Classification en genres d'après la nature du cône directeur. — Classification en espèces par la décomposition en carrés. — Équations réduites. — Construction des cinq formes principales.

Pôle et plan polaire. — Discussion. — Points conjugués. — Plans conjugués. — Droites conjuguées.

Centres. — Discussion. — Distribution des plans asymptotes.

Plans diamétraux. — Discussion. — Diamètres. — Directions conjuguées. — Diamètres conjugués. — Formes des équations réduites.

Directions principales ; plans principaux. — Axes principaux. — Équation en S. — Calcul des formes réduites principales par une transformation de coordonnées (axes rectangulaires).

Conditions pour qu'une surface du second ordre soit de révolution.

Plans cycliques.

Étude des surfaces du second ordre sur les équations réduites. — Construction. — Sections planes. — Sections circulaires. — Plans diamétraux. — Diamètres. — Théorèmes d'Apollonius. — Plan polaire. — Plan tangent.

— Normale. — Problèmes relatifs aux plans tangents. — Génératrices rectilignes. — Les surfaces du second ordre sont unicursales.

Étude géométrique de l'intersection de deux quadriques.

Problèmes simples de détermination.

IV. — MÉCANIQUE

Cinématique du point.

Idée de mouvement, système de comparaison, relativité du mouvement. — Temps positifs et négatifs.

Mouvement rectiligne d'un point, uniforme, varié, uniformément varié. — Vitesse. — Accélération. — Mouvement vibratoire simple.

Mouvement curviligne. — Vitesse. — Hodographe. — Vecteur accélération.

Accélérations tangentielle et centripète. — Diagrammes des espaces, des vitesses, des accélérations tangentielles.

Mouvement rapporté à des axes de coordonnées rectangulaires ou obliques et à des coordonnées semi-polaires.

Changement du système de comparaison. — Composition des vitesses; composition des accélérations bornée au cas où le mouvement du système de comparaison est un mouvement de translation.

Dynamique.

Point matériel libre. — Principe de l'inertie. — Définition de la force et de la masse : $F = m\gamma$. — Relation entre la masse et le poids. — Invariabilité de la masse. — Unités fondamentales. — Unités dérivées.

Équations fondamentales de la dynamique. — Mouvement d'un point soumis à l'action d'une force constante en grandeur et en direction. — Mouvement d'un point sous l'action d'une force issue d'un centre fixe : 1° proportionnelle à la distance; 2° en raison inverse du carré de la distance.

Principe de l'indépendance des effets des forces. — Composition des forces appliquées à un point matériel.

Travail d'une force, travail d'une résultante, d'une force pour un déplacement résultant. — Théorème de la force vive. — Surfaces de niveau. — Champs et lignes de force. — Énergie cinétique et énergie potentielle d'un point placé dans un champ de force.

Point matériel non libre. — Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné avec et sans frottement, la vitesse initiale étant dirigée suivant la ligne de plus grande pente. — Pression totale sur le plan; réaction du plan. — Petites oscillations d'un pendule simple sans frottement; isochronisme.

Homogénéité. — Dimensions d'une vitesse, d'une accélération, d'une force, d'un travail, d'une quantité de mouvement, d'une force vive.

Statique.

Statique du point. — Équilibre d'un point matériel libre, d'un point matériel assujetti à rester sur une courbe fixe ou sur une surface fixe, avec ou sans frottement.

Statique du corps solide — Systèmes en équilibre. — Systèmes équivalents. — On peut appliquer à un corps solide, sans changer son état, deux

forces égales, opposées et ayant la même ligne d'action. — Déplacement du point d'application d'une force. — Forces équivalentes.

Composition des forces parallèles. — Centre des forces parallèles. — Centre de gravité. — Moments par rapport à un plan. — Conditions d'équilibre d'un système de forces parallèles.

Théorie des couples.

Moment vectoriel d'une force par rapport à un point. — Moment par rapport à un axe. — Moment résultant d'un système.

Réduction des forces appliquées à un corps solide. — Résultante générale, couple résultant ou moment résultant. — Conditions d'équilibre. — Conditions d'équivalence. — Réduction à deux forces.

Équilibre d'un solide invariable qui n'est pas libre. — Cas d'un point fixe, d'un axe fixe avec ou sans glissement le long de cet axe, de un, deux ou trois points de contact avec un plan. — Réactions.

E. H.

Cours universitaires.

Paris; Faculté des siences (Cours du 2me semestre, à partir du mercredi 1er mars 1905). — E. Picard : Des fonctions de plusieurs variables (2 leçons par semaine). — Goursat : Des Equations différentielles et des Equations aux dérivées partielles (2 leçons et une conférence). — Paul Painlevé : Lois générales du mouvement des systèmes, la mécanique analytique, l'Hydrostatique et l'Hydrodynamique (2 leçons). — P. Appell : Eléments de la mécanique (1 leçon), (progr. du certif. de math. génér.). — M. L. Raffy : Les méthodes d'Intégrations (quadratures et équations différentielles), et leurs principales applications (2 leçons). — Andoyer : Ensemble des matières comprises dans le programme du Certificat d'Etudes supérieures d'Astronomie (2 leçons). — J. Boussinesq : De l'Equilibre de l'Elasticité de la sphère. Propagations du mouvement à partir d'un centre dans un milieu élastique et homogène indéfini (2 leçons). — G. Kœnigs : Des principes de l'Elasticité. Essais mécaniques et résistances des matériaux (2 leçons).

Hadamard : Conférence sur le calcul différentiel et le calcul intégral (une leçon). — Raffy ; Conférence sur la Géométrie supérieure en vue du certificat (1 leçon). — Hadamard : Conférence sur l'analyse supérieure en vue du certificat (1 leçon). — Hadamard et Borel : Conférence sur la mécanique rationelle (2 leçons). — Blutel : Conférence de mathématiques préparatoires au certificat des Siences physiques. — Servant : Conférence et travaux pratiques de mécanique physique et expérimentale.

Copenhague; Université (1re semestre de 1905, 1 février au 9 juin). — T.-N. Thiele : Astrophysique, 2 h. ; Calcul numérique, 4 h. — C. Christiansen : Capillarité, 2 h. — H.-G. Zeuthen : Calcul infinitésimal, 6 h. ; Coordonnées homogènes, 1 h. ; Excercices sur l'histoire des Mathématiques, 1 h. — Julien Petersen : Théorie générale des groupes, 4 h. — Niels Nielsen : La fonction gamma, 4 h. — C. Juel : Courbes algébriques et graphiques, 2 h. — P. Hegard : Hydrodynamique, 2 h. — M.-C. Engell : Relevés de plans et arpentages anciens du Danemark, 1 h.

BIBLIOGRAPHIE

Atti del Congresso internazionale di Scienze storiche (Roma, 1-9 Aprile 1903) Vol XII. Atti della Sezioni VIII : Storia delle Scienze fisiche, matematiche, naturali e mediche. — Un vol. in 8°, XXIV 330 p., ; prix : L. 10. — ; Tipografia d. R. Accademia dei Lincei, Revue, 1904.

L'Enseignement mathématique a publié un rapport très complet sur *les travaux mathématiques au Congrès des Sciences historiques, tenu à Rome en 1903;* il avait été rédigé par notre distingué collaborateur M. Ernest Lebon, Délégué par le ministre français de l'Instruction publique. Nous pouvons donc nous borner à signaler simplement par leur titre les mémoires mathématiques contenus dans le t. XII des Comptes rendus du Congrès. Nous relevons d'abord dans les rapports les titres suivants :

Tannery : Propositions ayant pour but d'activer le progrès de l'Histoire des sciences.

Barduzzi, Giacosa, Loria : In quale modo ed in quale mesura la Storia della science possa costituire oggetto di un corso universitario.

Loria : Un' impresa nazionale di universale interesse (publicazione delle opere di Ev. Torricelli).

Dans les communications :

Cantor (Moritz) : Hieronymus Cardanus, ein wissenschaftliches Lebensbild aus dem XVI. Jahrhundert.

Darvai (M.) : Vita di Giovanni Bolyai.

Vacca (Giov.) : Sulla Storia della numerazione binaria.

Lebon (Ern.) : Plan d'une bibliographie analytique des écrits contemporains sur l'histoire de l'Astronomie.

Lampe (Em.) : Das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik ; Rückblick u. Ausblick.

Müller (Felix) : Ueber mathematische Zeitschriften.

Loria & Eneström : Ueber kulturhistorische und rein fachmässige Behandlung der Geschichte der Mathematik.

Tannery (P.) : Sur l'Histoire des mots *analyse* et *synthèse* en mathématiques.

Vailati : La dimostrazione del principio della leva data da Archimede nel libro primo sull' equilibrio delle figure piane.

Pittarelli : Intorno al libro « De perspettiva pingendi » di P. dei Franceschi.

v. Braunmühl : Beiträge zur Geschichte der Integralrechnung.

H. F.

Eugenio Beltrami. — **Opere Matematiche**, publicate per Cura della Facultà di Scienze della R. Università di Roma. Tomo secondo. — 1 vol. gr. in-4°, 486 p. ; prix L. 25.— ; Ulr. Hœpli, Milan, 1904.

Le tome II des Œuvres de Beltrami contient les mémoires publiés par le savant géomètre de 1867 à 1873 dans divers périodiques, principalement

dans les *Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, dans le *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo*, dans le *Giornale di Matematiche*, etc .... Ces mémoires, au nombre de dix-neuf, peuvent être répartis en trois catégories. Les uns, et ce sont les plus nombreux, ont pour objet la Géométrie des surfaces, où Beltrami a laissé tant de beaux travaux. On y trouve notamment quelques-unes des remarquables recherches sur les paramètres différentiels. D'autres mémoires traitent de la théorie des formes algébriques ; c'est d'abord le grand travail intitulé *Ricerche sulla Geometria della forma binarie cubiche*, puis un mémoire *sulle funzioni bilineari*. Mais on sait que Beltrami a également laissé d'importants travaux appartenant au domaine de la Physique mathématique. On trouvera réunis dans ce volume une série de belles recherches sur la cinématique des fluides et divers mémoires d'électrodynamique.

H. F.

C. Block (zu Cöpenick). — **Lehr-und Uebungsbuch für den planimetrischen Unterricht** an höheren Schulen. I. Teil ; Quarta, 1 vol. cart., 70 p., prix : M. 1.— ; B. G. Teubner, Leipzig, 1904.

Le petit manuel, très soigné au point de vue typographique, l'est également pour ce qui est de la coordination et de l'exposition des matières qu'il renferme. Il comprend : I. Notions fondamentales (revision des notions étudiées dans la classe V) ; II. des angles et couples d'angles ; III. le triangle ; IV. le quadrilatère. Le texte, à la fois clair et concis et sans développements inutiles, est accompagné d'un grand nombre (691) d'exercices et de problèmes. La notation est uniforme et appliquée d'une manière logique ; toutefois nous ne comprenons pas l'avantage qu'il y a décrire « *compl.* α » et « *suppl.* β » à la place de « $90°-\alpha$ » et de $180°-\beta$ » (p. 6). Il est regrettable d'autre part que les récents manuels de Géométrie aient amené une certaine confusion dans la dénomination des divers groupes d'angles déterminés par deux parallèles et une transversale. Ainsi, M. Block désigne sous le nom de « Stufenwinkel » les angles généralement appelés « Gegenwinkel » (angles correspondants), tout en conservant ce terme dans une signification nouvelle. Quant au reste, ainsi que nous l'avons dit au début, ce petit manuel est très bien conçu et rendra de grands services dans les classes auxquelles il est destiné.

Ernest Kaller (Vienne).

E. Carvallo. — **Leçons d'électricité**. 1 vol. XIV, 259 p., 203 fig., Prix 10 fr. ; Librairie polytechnique Ch. Béranger, Paris, 1904.

Parmi toutes les branches de la Physique, l'Electricité est incontestablement la plus importante à l'heure actuelle au point de vue des applications. De là, pour les jeunes gens qui se destinent à la carrière d'électricien, résulte l'impérieuse nécessité de s'assimiler les éléments de la science qui les intéresse. La chose ne va pas sans quelque difficulté ; une préparation mathématique préalable est assurément nécessaire ; mais il ne s'agit pas de former des savants, et ce n'est pas à des savants qu'on s'adresse. Le but est de former des ingénieurs capables de comprendre et de résoudre les problèmes que la pratique leur posera ; ils ne doivent être, ni de simples praticiens, ni des savants de laboratoire.

Or, dans la littérature pourtant si considérable de l'électricité, depuis quelques années, il serait bien difficile de signaler un ouvrage d'enseignement qui réponde véritablement au besoin que nous venons de signaler.

Plusieurs sont fort remarquables ; mais les uns doivent être regardés comme des livres de haute science, exigeant des connaissances antérieures dépassant de beaucoup la moyenne des lecteurs auxquels ils s'adressent ; d'autres se présentent comme de simples manuels, utiles assurément, mais insuffisants pour former des ingénieurs.

Le livre de M. Carvallo vient combler la lacune. Il a deux grands mérites, à notre avis ; le premier, c'est de présenter le tableau d'un enseignement *effectif*, car les *Leçons* dont il s'agit ont été professées et non pas seulement écrites ; le second, c'est d'inaugurer une méthode nouvelle qui — nous citons les expressions mêmes de l'auteur — « cherche la clarté dans une exposition « bien ordonnée des lois expérimentales, et dans leur identification avec les « lois de la mécanique ».

Cette méthode est suivie d'un bout à l'autre de l'ouvrage avec une attention soutenue qui se révèle dès les premières pages. Le chapitre de début, intitulé « Le courant électrique », commence en effet par un paragraphe, *les Lois de la Mécanique*, auquel on se référera sans cesse ensuite. La préoccupation d'établir un rapprochement, une identification pour ainsi dire, entre le fonctionnement d'une installation électrique et celui d'une machine, est constamment visible.

Une analyse minutieuse apprendrait peu de chose au lecteur, et ne tarderait pas à présenter un caractère fastidieux. Il nous paraît préférable d'appeler l'attention sur un certain nombre d'observations pouvant avoir une certaine utilité.

La première a trait à l'ensemble du premier chapitre, dont nous venons de dire un mot. Il faut y voir une sorte d'introduction générale, et ne pas se laisser rebuter par quelques passages dont la concision pourrait laisser du doute dans l'esprit à une première lecture. Tout s'élucidera, tout s'éclairera ensuite. Et il faut bien reconnaître qu'en procédant autrement, l'auteur n'aurait pu jeter dès le début sur l'ensemble cette lumière philosophique qui l'éclaire, si je puis ainsi parler. Pour trop soigner les détails, il eût plus ou moins sacrifié l'ensemble.

Il est bon d'avertir aussi les lecteurs en possession de la Mécanique rationnelle, qui pourraient se sentir dès l'abord un peu dérangés de leurs habitudes classiques. Ils ne retrouveront pas ici le point matériel, on ne leur définira pas la masse comme un quotient ; mais ce qui fait le fond de la Mécanique reste solide et inattaquable. La forme seule est changée — heureusement changée à notre avis. C'est ici une Mécanique de bon sens, vraiment *rationnelle* celle-là, fondée sur l'expérience, sur l'observation des faits, et appelant le calcul à son aide quand elle en a besoin.

Les mathématiciens se sentiront particulièrement intéressés par la lecture du § 1er du Chapitre III, intitulé *vecteurs, cycles et flux*. On y trouve en quelques pages les éléments essentiels d'un calcul géométrique inspiré à la fois des idées de Hamilton et de Grassmann, et sous lequel certains chapitres de la Physique ne peuvent guère être soumis à l'analyse mathématique sans s'exposer à de grandes et inutiles complications.

J'ai, à ce sujet, retrouvé (p. 95) une notion que j'avais indiquée moi-même il y a quelques années, celle d'un cycle gauche. Je la croyais alors nouvelle, et je me trompais ; d'autres, avant et après moi, ont commis la même erreur. L'idée, intéressante au point de vue purement géométrique, d'attacher à toute courbe fermée une grandeur et une orientation qui viennent se confondre avec l'aire si la courbe devient plane, me semble plus qu'utile dans

les théories physiques qu'étudie M. Carvallo; il la présente en quelques lignes avec une simplicité et une clarté extrêmes.

En terminant, je me bornerai à reproduire les titres des cinq chapitres qui composent l'ouvrage: I Le courant électrique; — II Distribution des courants et des forces électro-motrices; — III Electromagnétisme; — IV Induction électro-dynamique; — V Electrostatique.

Je souhaiterais que ces rapides réflexions pussent amener des lecteurs à une œuvre originale, bien ordonnée, et qui m'a paru correspondre aux besoins d'un enseignement nouveau. Avec un peu d'attention et de persévérance, ils trouveront, je le crois, grand profit à cette méthode d'exposition, et il est souhaitable que l'auteur puisse faire école, que d'autres n'hésitent pas à suivre le sillon qu'il vient de tracer. C.-A. LAISANT.

George Bruce HALSTED. — **Rational Geometry**, a Text-book for the Science of Space. — Un vol. in 12, VIII + 285 pages, 247 figures, John Wiley & Sons, New-York, 1904.

Les récents et si remarquables travaux de M. Hilbert sur les fondements de la géométrie, magistralement analysés par M. Poincaré dans ses articles de la Revue des Sciences et dans son Rapport sur le 3e concours du prix Lobatschefsky (1903), ne pouvaient manquer à bref délai d'éveiller l'attention des géomètres et d'exercer une influence profonde et décisive sur leurs ouvrages. On devait certainement s'attendre à voir publier des Traités didactiques dont les hardis et érudits auteurs, rompant résolument avec les habitudes et traditions de plus de vingt siècles, essaieraient d'harmoniser l'enseignement de la géométrie avec les idées nouvelles. Malgré que M. Hilbert eût pris déjà lui-même soin d'indiquer et de jalonner d'une manière précise la route à suivre, la tâche était loin d'être aisée. Elle devait attirer particulièrement M. George Bruce Halsted, le savant professeur de Kenyon College, un des plus ardents défenseurs de la géométrie générale aux États Unis, bien connu par ses nombreuses publications dans les Revues « *Science* » et « *American Mathematical Monthly* », et surtout par ses belles traductions anglaises de Saccheri, Bolyai et Lobatschefsky. La « *Rational geometry* » de M. Halsted, encouragée par M. Hilbert, marque une époque dans l'histoire des livres destinés à l'enseignement. Nous allons analyser en détail les chapitres de cet ouvrage.

Pour constituer une géométrie vraiment rationnelle, deux choses étaient indispensables: en premier lieu, établir une liste complète des axiomes en s'efforçant de n'en oublier aucun; ensuite, supprimer totalement le rôle de l'intuition qui a occupé jusqu'ici une place telle en géométrie que nous faisons dans cette science presque à chaque instant usage de propositions intuitives sans nous en apercevoir le moins du monde. Dans ce but, les axiomes qui expriment les relations mutuelles pouvant exister entre les êtres géométriques, point, droite, plan, espace, ont été suivant la méthode de M. Hilbert, répartis en cinq groupes: Connexion ou association, ordre, congruence, axiome des parallèles ou d'Euclide, axiome d'Archimède ou de continuité.

Dans le chapitre I, M. Halsted définit les êtres géométriques et expose les sept axiomes de connexion. De ces axiomes découlent naturellement les propositions habituelles.

Deux droites distinctes ne peuvent avoir deux points communs.

Deux droites distinctes ont un point commun ou n'en ont aucun.

Deux plans distincts ont en commun une droite ou n'ont aucun point commun.

Un plan et une droite qui n'y est pas située ont un point commun ou aucun.

Par une droite et un point, ou deux droites qui ont un point commun, on peut faire passer un plan et un seul.

Dans le chapitre II viennent, au nombre de quatre, les axiomes de l'ordre qui précisent l'arrangement des points caractérisé par le mot *entre*. Ces axiomes sont complétés par la définition du segment qui ne doit éveiller aucune idée de mesure : Deux points A et B de la droite A définissent le segment AB ou BA ; les points de la droite *situés entre* A et B sont les points du segment. De là la distinction entre les deux *rayons* d'une droite séparés par un point, entre les deux régions du plan séparées par une droite. — Points intérieurs et extérieurs à un polygone. — Notons pour mémoire l'axiome 4 ou axiome de Pasch. *Si* A, B *et* C *sont trois points non collinéaires et* a *une droite du plan ne passant par aucun d'eux, lorsque* a *renferme un point du segment* A B, *elle en a un autre sur* B C *ou sur* A C. Il est évident que si le plus petit rôle était laissé à l'intuition, on ne songerait pas à énoncer cette proposition dont on fait inconsciemment un si fréquent usage.

Le chapitre III développe les axiomes de congruence : segments, angles, triangles, et l'auteur y formule en ces termes précis le théorème général de congruence.

Si A B C.... A′ B′ C′... *sont deux figures congruentes, et que* P *désigne un point quelconque de la première, on peut toujours trouver de façon univoque dans la deuxième un point* P′ *tel que les figures* A B C ... P, A′ B′ C′ .... P′ *soient congruentes.*

Ce théorème exprime l'existence d'une certaine transformation unique et réversible qui nous est familière sous le nom de déplacement. La notion de déplacement est donc basée sur celle de congruence, ce qui est absolument logique.

Le chapitre suivant est consacré à l'axiome de la parallèle unique et aux propositions qui en sont la conséquence. La plupart sont classiques, nous n'y insistons pas ; mais il en est d'autres que nous avons eu jusqu'ici l'habitude de considérer comme intuitives et qui ne le sont pas. M. Halsted les démontre avec raison ; ce sont celles-ci : *Tout segment a un point milieu ; tout angle a un rayon bissecteur.*

Chapitre V. — Circonférence.

Chapitre VI. — Problèmes de Construction. Toutes les constructions découlant des théorèmes basés sur les cinq groupes d'axiomes peuvent être graphiquement résolues par la règle et le transporteur de segments (Streckenüberträger de M. Hilbert) et ramenées à ces deux tracés fondamentaux : Tracer une droite ; prendre sur une droite donnée un segment donné.

Chapitre VII. — Egalités et inégalités entre côtés, angles et arcs.

Chapitre VIII. — Calcul des Segments. En se basant sur les axiomes des groupes I, II, IV et en mettant systématiquement de côté l'axiome d'Archimède dont on s'est passé dans ce qui précède et dont on peut également se passer dans ce qui suit, on arrive à créer, indépendamment de toute préoccupation métrique, un calcul de segments où les opérations sont identiques

à celles des nombres. Sommes et produits de segments. Sommes d arcs et d'angles.

Chapitre IX. — Proportions et similitudes. Deux triangles sont dits semblables quand leurs angles sont respectivement congruents. Il eût fallu dire là un mot de l'existence de tels triangles ; c'est une lacune bien facile à combler. La similitude conduit naturellement au théorème de Thalès et aux proportionnalités qui en découlent.

Chapitre X. — Equivalence dans le plan. La mesure des aires planes peut être obtenue sans le secours de l'axiome d'Archimède parce que deux polygones équivalents peuvent être considérés comme sommes algébriques de triangles élémentaires en même nombre et deux à deux congruents, quoique de dispositions différentes. *Par définition* l'aire d'une triangle égale le demi produit de la base par la hauteur ; deux polygones équivalents ont même aire et réciproquement. Théorème de Pythagore et carrés construits sur les côtés d'un triangle. Le chapitre se termine par une note historique courte, mais intéressante sur le nombre π.

Chapitre XI. — Géométrie du plan, différant peu de notre cinquième livre usuel.

Le chapitre XII est consacré aux polyèdres et volumes. M. Halsted commence à bon droit pas le théorème d'Euler ; il appelle *par définition* volume du tétraèdre le tiers du produit de la base par la hauteur, et prouve que le volume d'un tétraèdre égale la somme des volumes des tétraèdres en lesquels on le partage d'une façon quelconque. L'auteur examine quatre méthodes de division particulières, la division la plus générale peut être obtenue au moyen de ces dernières, et il en est de même pour un polyèdre.

Les chapitres XIII et XIV nous donnent l'étude de la sphère, du cylindre et du cône, avec le mesure de leurs surfaces et volumes. Pour le volume de la sphère, l'on fait usage de l'axiome de Cavalieri : *Si deux solides compris entre deux plans parallèles sont coupés par un plan quelconque parallèle aux deux premiers suivants des aires égales, ils ont même volume.*

Chapitre XV. Sphérique pure ou Géométrie à deux dimensions sur la sphère : Ce Chapitre ne pouvait manquer de trouver ici sa place. M. Halsted y précise d'abord ce que deviennent à la surface de la sphère les axiomes d'association, d'ordre et de congruence, il en déduit simplement et naturellement les propriétés élémentaires, trop négligées dans l'enseignement, des triangles sphériques.

Trois notes terminent l'ouvrage, et sont relatives ; l'une à un théorème de l'ordre, la deuxième au compas, et la troisième à la solution des problèmes.

Ainsi qu'on le voit par cette analyse, le livre de M. Halsted constitue une innovation et une tentative de vulgarisation des plus intéressantes. Pour lui donner plus de poids auprès des étudiants à qui il est destiné, l'éminent professeur de Kenyon College y a ajouté 700 exercices formant un choix excellent et varié. Nous souhaitons à cet ouvrage de notre distingué ami tout le succès qu'il mérite.

P. Barbarin (Bordeaux).

R. Marcolongo. — **Teoria matematica dell' equilibrio dei corpi elastici.** n°s 348-349 des *Manuali Hœpli.* — I vol. in 16°, prix L. 3.— ; Hœpli, Milan, 1904.

Ce n'est que depuis peu d'années que la théorie de l'équilibre des corps élastiques a commencé à se rendre pratiquement utile ; dans le passé, à

cause des méthodes mêmes qui la gouvernaient, elle était à peu près réduite à une spéculation théorique, à une succession de tentatives qui avaient pour but la recherche des valeurs de résistance de certains corps. Et cela devait certainement se prolonger jusqu'au moment dans lequel la mécanique analytique n'aurait trouvé une base rationnelle, quittant toute discussion oisive sur l'Ecole et le Cartésianisme, sur les théories atomistiques et celles péripatéticiennes. Beaucoup de savants se consacrèrent à l'étude des doctrines physiques de l'élasticité pour les acheminer sur une voie qui pouvait les amener au progrès ; mais nous devons arriver jusqu'à Poisson pour apercevoir une tendance capable de donner des résultats utiles. La définition des pressions comme résultantes des actions moléculaires exercées sur une partie des points matériels qui composent un système par les autres points matériels du même système donnée par ce savant à propos de la tension des membranes élastiques (*Mémoire sur les surfaces élastiques*, 1814) fut celle qui contribua surtout aux progrès de la théorie. Cette définition, développement d'une pensée de Laplace, permit à Navier d'énoncer pour la première fois les conditions de l'équilibre élastique des corps (*Académie des Sciences de Paris*, 1821) et à Cauchy d'étendre aux corps non isotropes les résultats obtenus par Navier, bien que, au sujet des pressions, ce savant ne laisse de manifester sa tendance à retenir équivalentes les idées de Poisson avec celles plus anciennes de Lagrange. Jusqu'à nos jours cette conviction fut maintenue par beaucoup de savants : Saint-Venant ne cessa jamais de la défendre et M. Boussinesq, son disciple fidèle, ne considère en mécanique que les résultantes des actions moléculaires et non les forces de liaison (*Leçons synthétiques de Mécanique générale*, Paris, 1889). De nos jours cette théorie a fait des progrès très grands, s'acheminant rapidement au perfectionnement des méthodes qu'on applique à l'étude de la résistance des corps : elle forme pour ce motif un cours des plus utiles pour les ingénieurs.

Mais telle qu'on la trouve dans les recherches classiques de Saint-Venant sur la flexion et la torsion des prismes, de Boussinesq et de Hertz sur la dureté des corps, ou dans celles plus récentes de Cerruti, Levi-Civita, Somigliana, Morera, etc., elle ne peut pas former un cours ordonné et utile : le besoin d'un traité résumant en même temps les recherches classiques et les travaux modernes se faisait vivement sentir ; il était surtout désirable que ce traité se rende particulièrement utile aux ingénieurs dont les connaissances mathématiques ne sont pas très étendues. La tâche bien difficile fut entreprise par M. Marcolongo, le savant professeur de l'Université de Messine, et le résultat fut ce livre d'une valeur scientifique et didactique très remarquable.

Celui qui jette ses regards sur les titres des chapitres peut tout de suite voir que l'auteur a tenu peu de compte du développement historique du sujet, et j'estime qu'en raison même du but de ce manuel il a bien fait de préférer l'ordre logique à l'ordre historique.

Les corps élastiques traités dans ce volume sont ceux à trois dimensions ; et comme l'auteur désire que le lecteur puisse recouvrer le plus grand profit de la lecture du livre, il a consacré trois chapitres, les trois premiers, à des théories mathématiques qui, quoique de la plus grande importance en physique, ne sont pas assez développées dans les cours universitaires : ce sont les théories des fonctions harmoniques et polyharmoniques. Les lemmes de Gauss et de Green sont développés seulement dans ce qui peut intéresser le reste du volume, c'est-à-dire seulement jusqu'à la détermination

de la fonction de Green dans des cas simples et à la solution de la question des valeurs sur le contour pour le cercle, pour la sphère, pour un demi-plan et pour un demi-espace indéfini. La transformation de l'équation $\Delta_{2n} = 0$, fait l'objet d'une étude très approfondie. Puis l'auteur passe rapidement en revue quelques-uns des principaux résultats obtenus par des géomètres et physiciens modernes, signalant particulièrement la question proposée et résolue par M. Painlevé[1] (déterminer trois fonctions x_1, y_1, z_1, de x, y, z et une fonction F de u, x, y, z, avec la condition que substituant x_1, etc. aux x, y, etc. dans u, qui vérifie $\Delta_2 = o$, la fonction F vérifié aussi l'équation $\Delta_2 = o$ qui a conduit lord Kelvin à la propriété $F = \frac{u_1}{r_1}$, r_1 étant la distance d'un point de l'origine, et à la généralisation suggérée par M. Volterra d'un intéressant théorème de M. Levi-Civita, si u est une fonction des n variables $x_1, \ldots, x_n$ harmonique du degré m, et si l'on fait une inversion définie par les équations $x'_i = x_i : r^2$, la fonction $u = u : r^{2m-n}$ sera elle-même harmonique du degré m par rapport aux x' (*Atti R. Ist. Veneto*, 1897-98).

Le deuxième chapitre est consacré à la théorie de la *fonction potentielle* de Green[2], et que Gauss[3] appelle tout simplement *potentiel*. Cette théorie, d'importance capitale dans toute la physique mathématique et qui doit son origine à Laplace, comme Legendre l'affirme dans le *t.* X des *Mémoires des savants étrangers*, est singulièrement négligée par le plus grand nombre des traités d'Analyse et dans les cours universitaires. Il en résulte que beaucoup d'ingénieurs ne connaissent rien d'une telle fonction, pas plus que des fonctions harmoniques, ce qui les empêche de tirer parti des théories modernes de la Physique. Des formules fondamentales, l'auteur passe rapidement et directement aux relations les plus remarquables, parmi lesquelles je veux rappeler celle donnée par M. Morera qui conduit directement à la célèbre formule de Poisson,

$$\Delta_2 V_i = \Delta_2 V_0 = -4 \pi k_0 ,$$

et au théorème classique de Dirichlet. Cela permet à l'auteur d'amener le lecteur par une voie plus simple que celle qui est suivie ordinairement, à l'étude de la fonction potentielle d'un ellipsoïde homogène par rapport à un point intérieur ou extérieur, obtenu par E. Beltrami (*Mémoires de l'Académie de Bologne*, I. 1880) et qui a donné lieu à de remarquables mémoires de MM. Pizetti et Morera (*Rend. Ac. d. Lincei*, 1894). La fonction potentielle d'une couche simple et d'une couche double donne aussi lieu à l'auteur de signaler les belles recherches de Poincaré et Liapounoff et des Italiens Lauricella et Morera.

Mais de même que l'auteur a justement estimé nécessaire de parler avant tout de la fonction potentielle, il était logique qu'il dût de même s'arrêter sur un autre point, également indispensable au développement de la théorie des corps élastiques, et c'est pour cela qu'il a voulu consacrer le troisième

[1] *Travaux et Mémoires de la Faculté des Sciences de Lille*, I. 1889.

[2] *An Essay on the application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism.* — Nottingham. 1820. — Réimprimé dans le Journal de Crelle, t. XLIV et XLVII.

[3] *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte.* Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre. 1879.

chapitre à la mécanique des corps continus. Ce chapitre, avec le deuxième, sont les plus remarquables du livre pour le soin tout particulier avec lequel l'auteur expose dans l'ensemble et dans les détails les plus remarquables, des théories qui ordinairement demandent bien plus de connaissances mathématiques.

En parcourant ces trois premiers chapitres, le lecteur constatera combien l'auteur a su présenter d'une manière à la fois claire et simple des questions qui ne se prêtent guère à une exposition élémentaire. Ces trois chapitres suffiraient pour assurer le succès scientifique du traité.

Mais nous voici enfin au sujet du livre, à la théorie mathématique de l'équilibre élastique des corps isotropes (*ch.* IV) et anysotropes (*ch.* V) dont le principe fondamental, « *ut tensio sic vis* », complètement expérimental, fut donné par Hooke en 1660 et que Wertheim, Morin, Edlung, etc., assujettirent à de nombreuses expériences. J. O. Thomson, qui dans ces derniers temps s'en occupa aussi, suggéra d'introduire des termes du troisième degré dans les composantes de déformation. M. Marcolongo déduit les équations de l'équilibre des corps isotropes suivant les mémoires classiques de Navier, Lamé, Poisson, Cauchy, c'est-à-dire en fonction des deux constantes λ et μ (*constantes de Lamé*). Tout récemment M. le professeur Cerruti a substitué deux nouvelles constantes Ω et ω définies par les relations

$$\Omega^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\gamma}, \qquad \omega^2 = \frac{\mu}{\gamma},$$

qui ont un sens physique très important. — Quant aux corps anysotropes, la détermination des équations de leur équilibre peut se faire par un procédé dû à Cauchy et qui est une extension de celui de Navier, ne présupposant ni l'analyse des pressions, ni celle des déformations : mais l'auteur préfère une méthode plus en relation avec l'expérience et commune à plusieurs théories physiques. D'après cette méthode les lois de l'élasticité sont déduites suivant un procédé indiqué par Green, c'est-à-dire de l'idée de potentiel d'élasticité et des principes de la thermodynamique. Ce chapitre contient un résumé de la théorie moléculaire du professeur Voigt qui suppose la matière formée d'un ensemble de corps très petits, c'est-à-dire discontinue. M. Marcolongo place à la fin du chapitre le théorème de réciprocité de M. Betti (*Théorie de l'élasticité*, chap. IV) dans la forme que lui a donnée M. Levy : « si un corps élastique est assujetti à deux systèmes de forces, le travail accompli par les forces du premier, lorsque les déplacements sont ceux qui appartiennent au deuxième, est égal au travail accompli par les forces du deuxième lorsque les déplacements sont ceux qui appartiennent au premier ». Ce théorème est l'un des plus importants dans la théorie de l'élasticité pour ses nombreuses applications et amène à une méthode remarquable pour intégrer les équations de l'équilibre des corps isotropes et qui prend le nom de ce savant.

Dans ses lignes générales est aussi considéré le problème de l'équilibre élastique quand les déplacements ou les pressions superficielles sont données : pour l'étude complète de la question, dans ce cas et dans beaucoup d'autres on peut voir la thèse de doctorat de M. le professeur Lauricella. M. Cerruti a aussi obtenu un théorème, mentionné à la page 236, et qui apporte de notables simplifications dans plusieurs cas particuliers. Ce théorème, tout à fait nouveau, qui fait dépendre tout problème d'équilibre, de la détermi-

nation de trois fonctions harmoniques, peut s'énoncer en disant que « les composantes de déplacement d'un corps élastique isotrope peuvent toujours s'exprimer à l'aide de trois fonctions harmoniques seulement ». — Le lecteur trouvera encore dans ce même chapitre un résumé très bien fait de certaines recherches modernes sur les équations de l'élasticité, dues à MM. Lauricella, E. et F. Goursat, J. Fredholm, Somigliana, Gebbia et à M. Marcolongo lui-même.

Nous voilà maintenant au problème très intéressant de Boussinesq et Cerruti (page 245) : déterminer la déformation d'un solide isotrope indéfini lorsqu'on donne sur le plan limite, 1° les déplacements ; 2° les forces ; 3° les déplacements normaux et les forces tangentielles, ou réciproquement. — Ce problème avait été résolu par MM. Lamé et Clapeyron au moyen des séries ; dans ces dernières années MM. Boussinesq et Cerruti ont présenté des nouvelles solutions par des formules plus simples et plus élégantes. L'auteur de ce traité indique encore deux autres méthodes de solution, dont l'une est de M. Somigliana qui en fit l'application à des questions nouvelles. Toutefois celles-ci pouvaient aussi se résoudre par des intégrations, comme l'a montré M. Marcolongo (*Rend. Ac. Lincei*, 1902).

Au chapitre VIII est traitée une autre question qui depuis Lamé a attiré l'attention des physiciens ; celle de la déformation d'une sphère isotrope. La première solution avait conduit Lamé à mettre en vue plusieurs propriétés des séries doubles qui trouvèrent ensuite de remarquables applications dans certains problèmes d'astronomie. Lord Kelvin, et peu après M. Chree ont considéré la question plus générale de la sphère assujettie à l'action de forces dérivables d'un potentiel qui satisfait à l'équation de Laplace, exprimant les composantes orthogonales du déplacement par des séries simples. La solution par des intégrales définies fut donnée pour la première fois en 1873 par M. Borchardt et après par MM. Somigliana et Cerruti, qui indiquèrent des méthodes particulières d'importantes applications. M. Marcolongo a lui aussi, indiqué d'élégantes solutions des problèmes composés, lorsque, sur la surface limite on donne une partie des déplacements et une des forces, ou les déplacements et les forces normales, et réciproquement. La méthode de résolution, simple et directe, que l'auteur expose dans ce traité, est celle que M. Almansi a indiqué dans son mémoire « *Sur la déformation de la sphère élastique* » (*Mém. Ac. de Turin*, XLVII, 1897) ; mais il signale aussi en peu de mots la solution donnée par M. Lauricella et celle plus récente donnée par M. Tedone. — Les nombreuses indications bibliographiques données dans ce chapitre comme aussi dans les autres, sont un guide très utile à ceux qui désirent recourir aux sources des théories ou approfondir davantage les questions traitées.

Un autre problème d'élasticité d'une grande importance par ses applications pratiques, mais qui présente de remarquables difficultés, est celui de la déformation d'une pièce cylindrique. Le cas général avec l'hypothèse que le cylindre est sollicité par des forces distribuées arbitrairement sur les deux bases, n'a pas encore été résolu. L'attention des savants s'est limitée à la considération de certains cas particuliers, dont l'un porte le nom de *problème de Saint-Venant*. La solution indiquée par M. Marcolongo dans son traité est modelée sur celle donnée par Clebsch (*Theorie der Elasticität fester Körper*, 1862), mais simplifiée et adaptée à ceux qui ont en vue les applications pratiques. La question de la déformation des plaques cylindriques, que l'auteur appelle *le problème complémentaire de celui de Saint-*

Venant et qui avait été proposé et résolu par Clebsch, forme l'objet du dixième chapitre. Enfin le dernier chapitre est entièrement consacré aux problèmes de M. le professeur Voigt. Ces problèmes sont une généralisation de celui de Saint-Venant ; ils permettent d'assigner des méthodes générales à la détermination des constantes élastiques des cristaux et ont des applications très importantes dans l'étude des phénomènes prézoélectriques d'un cylindre cristallin.

Dans ce compte rendu, je me suis efforcé à mettre en évidence l'importance des questions abordées par M. Marcolongo et l'excellente coordination didactique avec laquelle elles ont été étudiées. Je suis certain que son ouvrage sera accueilli avec beaucoup de faveur par les mathématiciens et les ingénieurs.

Cr. Alasia (Tempio, Sard.)

J. Tropfke. — **Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung.** Erster Band, 8°, VIII-332 p., 1902 ; Mk. 8.—. Zweiter Band, VIII-496 p., 1903 ; Mk. 12.— ; Veit & Co., Leipzig.

Le Tome Premier de cet Ouvrage comprend deux parties : le *Calcul* et l'*Algèbre;* le Tome II en comprend douze : *Géométrie, Logarithmes, Trigonométrie plane, Sphérique et Trigonométrie sphérique, Séries, Intérêts composés, Analyse combinatoire et calcul des probabilités, Fractions continues. Stéréométrie, Géométrie analytique. Sections coniques, Maxima et Minima.* Sur ces quatorze parties les six premières embrassent 612 pages, tandis que les huit dernières n'occupent que 160 pages. Comme on le voit, ces différentes parties n'ont pas été traitées de la même manière, tout au moins au point de vue quantitatif. Nous reconnaissons qu'il est juste que la plus grande place soit accordée au *Calcul*, à l'*Algèbre* (étude des équations), à la *Planimétrie* (c'est ainsi que devrait être intitulée la 3me partie, et non pas « Géométrie ») et à la *Trigonométrie,* mais nous n'en estimons pas moins que la plupart des autres parties sont trop restreintes par rapport aux premières. Quant à l'ordre adopté par l'auteur, il soulèvera également des critiques de la part de bien des lecteurs. On comprend que les *Logarithmes* précèdent la *Trigonométrie ;* mais on ne s'explique pas pourquoi les *Séries*, les *Intérêts composés*, l'*Analyse combinatoire* et les *Fractions* ont été intercalés entre la *Trigonométrie sphérique* et la *Stéréométrie*.

Quant à la façon dont sont traitées ces différentes parties, notamment les six premières, nous ne pouvons exprimer que des éloges ; pour tous ceux qui voudront glisser quelques notes historiques, çà et là, dans leur enseignement, cet Ouvrage constitue une mine très précieuse ; ils s'orienteront très facilement dans les différents chapitres. L'auteur a d'ailleurs eu soin d'ajouter une table alphabétique et une analytique ; toutefois celle-ci pourrait être encore plus riche ; on y omet, entre autres, l'indication des démonstrations à induction complète.

Le mode d'exposition adopté par l'auteur devait inévitablement donner lieu à des répétitions ; mais, il eût été possible d'en diminuer le nombre et, par ce fait, l'étendue du volume. Ainsi, on retrouve dans la section C (le développement de la notion de nombre) de la deuxième Partie les chapitres « le nombre un », « le nombre zéro », « le nombre fractionnaire », qui figurent déjà dans la première Partie, section A (les noms de nombres, les chiffres) et dans la section D (les fractions). Il eût donc suffi de faire entrer les nombres négatifs, irrationnels et complexes dans la section C de la deuxième

Partie, et de réunir dans la première Partie (le Calcul) tout ce qui concerne le zéro, le nombre un et les nombres fractionnaires. En outre l'auteur reprend à la p. 180 (T. I), sous une forme plus réduite il est vrai, le développement de l'Algèbre depuis Diophante aux Cossistes de l'Occident en passant par les Hindous, tandis que cette question a déjà été examinée p. 123 à 130, puis de nouveau p. 146-151 ; aux pages 246 et 247 revient, sous la même forme, l'*aldjebr walmukâbala* déjà mentionné p. 152, etc.

Nous avons enfin à critiquer la façon dont sont rappelées les notes biographiques des mathématiciens ; nous nous bornerons à indiquer quelques exemples : pour L. Euler on retrouve 22 fois la note (1707 Basel-1783, Petersburg, Berlin, Petersburg), rédigée de sept manières différentes ; pour Lambert on a 12 fois la note : (1728-1777, Oberbaurat u. Akademiker in Berlin), mais on ne voit nulle part où il est né, et ce n'est que dans II. p. 133, que figure la mention des prénoms « Joh. Heinrich » ; pour Diophante on lit 21 fois : (drittes bis viertes Jahrh. n. Chr.), même deux fois de suite p. 158 et 159 ; pour Grammateus on apprend seulement p. 190 qu'en réalité il s'appela Heinrich Schreiber et qu'il était d'Erfurt, bien qu'il ait déjà été cité 18 fois. On voit, par ces exemples, qu'une meilleure disposition dans les notes eût permis de diminuer sérieusement l'étendue du volume. L'auteur aurait pu se borner à donner *une seule fois* les renseignements biographiques, éventuellement un peu plus complets, et d'indiquer ceux-ci dans la table alphabétique en accompagnant par exemple le numéro de la page d'un astérisque.

On comprend aisément que dans un Ouvrage tel que celui-ci où sont accumulés tant de renseignements historiques, il devait se glisser inévitablement quelques erreurs. Outre celles qui ont déjà été signalées par M. G. Eneström et que le lecteur trouvera dans *Bibliotheca mathematica* 1903, p. 213-218, et 1904, p. 404-412, j'ai relevé encore les suivantes :

Tome I. *p. 8 :* « le symbole pour le zéro est d'origine hindou-arabe » ; il y a lieu de supprimer « arabe ».

P. 35 : Ici l'auteur parle d'un Manuel de calcul de Mohammed ibn Mousâ Alchwarizmi et cite au bas de la page dans la note 119 une traduction anglaise : The algebra of Mohammed ben Musa, ed. F. Rosen, etc. : cette note n'appartient pas à cette place.

P. 41. etc. : « Pergæ » n'est pas correct : en grec ce nom de lieu s'écrit περγη, en lat. Perga ou Perge : dans l'Ouvrage de Cantor on trouve également la forme incorrecte.

P. 81 : « La dénomination de Fraction (*Bruch*) remonte au *numerus ruptus* de Leonard » ; les Arabes possédaient déjà le terme *kesr* = fraction, et c'est à eux que l'a emprunté Leonard.

P. 163 : Gerhard de Cremona a utilisé, déjà avant Leonard, le terme de *communicans* pour commensurable, et pour irrationnel le mot *surdus* (ce dernier point a déjà été cité par Eneström l. c. p. 216).

P. 187 : Nous ne nous expliquons pas la note biographique sur Gerhard de Cremona « 1114 Andalousie — 1187 Tolède » ; d'après une source ancienne et non contestée Gerhard est de Cremona en Italie.

P. 209 : Nous ne comprenons pas pourquoi l'auteur donne pour l'extraction de la racine cubique d'après Héron la formule incorrecte $\sqrt[3]{A} = q + \frac{b\sqrt{a}}{A + b\sqrt{a}}$ (avec 6 au lieu de b) donnée par Curtze (Zeits. f. Math. u. Phys. Bd. 42, p. 119) au lieu de donner la formule correcte de Wertheim (ibid Bd. 44, p. 2).

P. 212 : Gemma Frisius n'est pas le premier qui, dans l'extraction de la racine carrée, forme l'expression $(2a + b) b$ en écrivant le quotient b à la droite du diviseur et en multipliant le nombre obtenu par ce quotient; c'est ce que fit déjà un Arabe de l'Occident, Abû Zakarîjâ al Hassâr, probablement au XII[e] siècle (v. Biblioth. Mathem. 1901, p. 22 et 23).

P. 213 : « Avant Stifel, on ne trouve pas de racines portant sur des sommes algébriques » ; on en rencontre cependant déjà dans l'Algèbre intitulée Al-Fakhrî et due à Al-Karchî (v. l'édition publiée par F. Wœpcke, Paris, 1853, p. 54 et 55).

P. 215 : Il faut lire *ghana mûla* au lieu de *varga ghana*.

Ibid. : « *Gubâr* = Calculer » n'est pas correct ; gubâr signifie « poussière » et hisâbl-gubâr veut dire « calcul sur le tableau à poussière ».

P. 255 : La mention d'après laquelle des auteurs arabes racontent que l'astronome Hipparque aurait écrit un mémoire sur les équations du second degré, est vague, sinon incorrecte : d'abord dans les écrits arabes il n'est pas question d'équations quadratiques, mais d'un « Livre sur l'Algèbre » ; en second lieu, on donne des interprétations très variées pour le nom d'Hipparque dans Ibn al-Qiftî et dans le Fihrist, on peut aussi bien lire « Ibn Iahjâ » que « Hipparque » ; enfin, en troisième lieu, l'article consacré à Hipparque dans le Fihrist est entièrement gâté, en ce qu'il a été fondu en *un seul* avec un article sur Diophante (v. Bibl. Mathem. 1903, p. 298 et 299, Abhandlgn. z. Gesch. d. mathem. Wissenschaften, VI, p. 54 et 55).

P. 268 et 269 : En parlant de la marche suivie par Viète dans la résolution des équations $x + y = a$ et $xy = b$, l'auteur aurait dû rappeler qu'elle avait déjà été suivie par Diophante, d'autant plus qu'il en est précisément question à la page 248.

P. 282 : L'auteur dit que l'on n'est pas parvenu à reconstruire le procédé de Gijât ad-dîn al-Kâschî pour la détermination des racines numériques approchées d'une équation du 3[e] degré ; il est cependant fort probable que ce procédé ait été reconstitué dans le mémoire de J.-P. Gram, Essai sur la restitution du calcul de Léonard de Pise sur l'équation $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ (dans Owersigt over det K. D. Videnskab. Selskabs, 1893, p. 18-28).

P. 296 : Après avoir mentionné 37 fois le nom de « Diophante » l'auteur ne devrait plus écrire « nous devons à *un* mathématicien grec Diophante, etc.

P. 304 : « ou p est soumis à la condition d'être un nombre impair » n'est pas correct.

P. 305 : La remarque que « dans trois nombres de Pythagore l'un est divisible par 3, l'autre par 4 et le 3[e] par 5 », n'est pas correcte ; par ex. 5, 12, 13 !

Ibid. : Il y a lieu de préciser le théorème d'après lequel « il n'y a pas de triangle rectangle dont l'aire soit exprimée par un nombre carré parfait » ; il s'agit naturellement d'un triangle rectangle de Pythagore ou à côtés rationnels ».

Tome II. *P. 43* : En parlant de la résolution de la trisection de l'angle par Jordanus Nemorarius, l'auteur aurait dû dire qu'elle est empruntée presque textuellement au Liber trium fratrum de Geometria, cité immédiatement au-dessus.

P. 44 : Si d'autre part (I, p. 50 etc.) Jost Bürgi est mentionné comme suisse, l'auteur aurait pu le faire ici pour J. Steiner ; on apprend seulement que « le grand géomètre allemand » était à Berlin, mais on ne lit pas où il est né, ni où il est mort.

P. 53 : Les cinq espèces de pentagones que l'auteur indique ici d'après R. Wolf ne sont nullement les seuls ; il manque par exemple le pentagone ayant trois couples de côtés qui se croisent ; à ce point de vue le mémoire cité de Wolf est incomplet.

P. 59 : « D'après Proclus c'est à Thalès qu'il faut attribuer la découverte qu'un cercle est partagé en deux parties égales par tout diamètre ; » ce passage de Proclus ne devrait plus être cité, car il est évident qu'une vérité aussi élémentaire était connue déjà longtemps avant la culture grecque.

P. 71 : « Pour ce qui est de deux droites auxiliaires qui fournissent les deux triangles égaux dans la démonstration du théorème de Pythagore, des auteurs arabes ont montré plus tard qu'elles sont perpendiculaires entre elles » ; mais cela n'est pas démontré à l'endroit cité (Anaritius edid. Curtze, p. 78 et suiv.).

P. 73 : Il y aurait lieu de mentionner ici que la démonstration arabe du théorème de Pythagore d'après Anaritius est due à Tâbit b. Qorra.

P. 114 : Après proportion III il faut lire : « le rapport du rayon au demi-côté, etc. ».

P. 191 : A côté des traductions arabes et hébraïques de la Sphérique de Menelaüs, il y a lieu de citer aussi des traductions latines.

P. 210 : Ici l'auteur parle d'un « ouvrage de Sphérique » de Maurolykus ; il aurait dû ajouter que c'est la sphérique de Menelaüs.

P. 211 : D'après nos connaissances actuelles, on ne trouve chez lui (Abû'l-Wafa) aucune table (des sécantes et des cosécantes) pas plus que chez les autres, auteurs arabes » ; cela n'est pas juste d'après les recherches récentes de C. A. Nallino (Edition d'Al-Battânî, Milan, 1903, T. I, p. 182), car dans les tables de Ahmed b. Abdallah al-Habasch il y a une table des cosécantes.

P. 214 : Il n'est pas juste de dire : « Pour le sinus de l'angle complémentaire les Hindous possédaient le terme Kotijyâ ; on cherche en vain un pareil terme chez les Arabes et les mathématiciens du Moyen âge jusqu'au 16me siècle. » Cette erreur repose sur ce que l'auteur semble ignorer d'une part la signification du mot Kotijyà, d'autre part la terminologie mathématique arabe. Ce terme est un mot composé hindou et signifie « sinus de la fin (de l'arc) » ou « sinus du complément (de l'arc pour 90°) » ; ceci a été traduit par les Arabes d'une manière tout à fait correcte, par « watar (corde) at-tamâm » (Al-Battânî), ou djaib (sinus) at-tamâm » (Nassir addîn) = corde ou sinus de la fin ou du complément (de l'arc) ; et à son tour vient la traduction exacte, au moyen âge, en « sinus complementi ». Il n'y a pas de meilleure preuve du passage de la Trigonométrie des Hindous aux Arabes, puis de ceux-ci à l'Occident, que la parfaite coïncidence dans leur signification des trois termes :

Kotijyâ = djaib at-tamâm = sinus complementi (= cosinus).

P. 234 : On a cru jusqu'ici que le principe des sinus dans le cas d'un triangle plan remonte seulement à Nassîr-ad-dîn ; mais, d'après C. A. Nallino, dans son édition du Battânî, on voit que ce théorème est signalé comme connu déjà dans la Chronologie de Birûnî (mort en 1048). (Trad. angl. de Sachau, p. 166), il est probable que Al-Battâni le possédait déjà (v. Bibl. math., 1904, p. 81 et 82).

P. 253 : Il n'est pas aussi évident, comme l'auteur le croit, que la méthode numérique dans la résolution des problèmes de la sphérique soit due aux Babyloniens.

P. 326 : L'affirmation suivant laquelle Omar Alkhayyâmê aurait connu les

puissances supérieures de $a + b$ ne peut pas être acceptée en toute certitude.

P. 369-404 : Ces pages sont consacrées à la Stéréométrie ; l'auteur a encore pu tenir compte de la récente édition de la Metrica de Heron (Edid. Schöne, Leipzig, 1903), tout au moins pour les annotations ; mais il a omis de citer différents points de cet intéressant ouvrage, par ex. les jolies applications entièrement exactes, au sabot cylindrique (p. 131) et à la détermination du volume commun à deux cylindres dont les axes sont perpendiculaires (p. 133) ; toutes deux ont été empruntées par Héron à un écrit d'Archimède intitulé Ephodicon, mais qui a été perdu.

P. 447 : Il y a lieu de mentionner qu'il existe aussi des écrits arabes sur les propriétés optiques des foyers des coniques : par ex. ceux de Ibn al-Haitam (mort en 1039).

C'est par ces notes que nous terminerons notre compte rendu de cet ouvrage qui rendra de grands services à tous ceux qui, reculant devant le prix élevé des trois volumes de l'Œuvre de Cantor, désirent avoir sous la main un ouvrage sur le développement historique des mathématiques élémentaires : d'une consultation très facile, l'ouvrage de M. Tropfke offre d'une manière générale d'excellents renseignements.

H. Suter (Zurich).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaire des principaux périodiques :

Acta Mathematica, Journal rédigé par G. Mittag-Leffler. T. xxix. Beijer, Stockholm.

Fasc. 1. — G. Hessenberg : Ueber einen geometrischen Calcül (Verknüpfungs-Calcül). — L. Hanni : Ueber die Beziehungen zwischen der Darstellung eines eindeutigen Zweiges einer monog. Function durch H. Mittag-Leffler, der Methode der Mittelwerte des H. Borel und der Transformation des H. Lindelöf. — A. Gullstrand : Zur Kenntniss der Kreispunkte.

Fasc. 2. — Mittag-Leffler : Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (cinquième note). — E. Lindelöf : Remarques sur un théorème fondamental de la théorie des ensembles. — A. Wiman : Ueber den Fundementalsatz in der Theorie der Funktionen Ex (x). — J. Malinquist : Etude d'une fonction entière.

Annals of the mathematics, published under the Auspices of Harward University, second series, Cambridge. Mass.

Vol. 5, nº 4. July 1904. — B.-O. Peirce : Some Elementary Theorems Concerning the Steady Flow of Electricity in Solid Conductors. — R.-E. Allarcide : On a Linear Transformation, and some Systems of Hypocycloids. — G.-D. Birkhoff and H.-S. Vandiver : On the Integral Divisors of A^n-B^n. — Kennely : Two Elementary Constructions in complex Trigonometry. — S.-A. Corey : Note on Stirling's Formula. — G.-A. Miller : Note on Sylow's Theorem. — P. Saurel : The Condition for a Plait Point.

Vol. 6, n° 1, October 1904. — G.-A. Miller : On the subgroups of an Abelian Group — W.-P. Fite : Note on the continued Product of the Operators of any Group of Finite Order. — N.-R. Wilson : Reduction of an Elliptic Integral to Legendre's normal Form. — A.-B. Pierce : The Necessary and sufficient Condition under wich two linear homogeneous differential Equations have Integrals in common. — G Macloskie : A General Method of Evaluating Determinants. — L.-E. Dickson : Application of Groups to a Complex Problem in Arrangements. — B. Porter : On Formations Defined by an Infinite Series of Analytic Functions of a Complex Variable.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Anno CCCI, Rendiconti. Vol. XIII. Juillet-décembre 1904, Rome.

N° 1. — Almansi : Sopra i conduttori, cavi.

N° 2. — Barbieri : Sulla rappresentazione in modo conforme-coniugato di due superficie di rotazione l'una sull'altra. — Fubini : Sui gruppi di proiettivita.

N° 3. — Somigliana : Le deformazioni ausiliarie nei problemi alterni d'equilibrio elastico.

N° 5. — Severi : Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della seconda specie. — Fubini : Sui gruppi di proiettivita.

N° 6. — Bianchi : Sulle equazioni di Moutard con gruppi di soluzioni quadratiche. — Pascal : Sulle equazioni differenziali per i risultanti e discriminanti di forme binarie.

N° 8. — Dell'Agnola : Sulla distribuzione delle radici della derivata di una funzione razionale intiera.

N° 9. — Pascal : Sopra le equazioni differenziali relative a certi covarianti di forme algebriche (estensione di alcune ricerche di *Brioschi e Betti*).

N° 10. — Boggio : Sulla deformazione delle piastre elastiche cilindriche di grossezza qualunque. — Grocco : Sulla stabilita dei dirigibili.

N° 11. — Millosewich : Osservazioni della cometa di Encke. — Orlando : Sulla deformazione d'un diedro isotropo d'ampiezza sottomultipla di π. — Nielsen : Sur la multiplication de deux séries de coefficients binomiaux.

N° 12. — Ern. Pascal : Sul sistema di certe formole di Betti estese. — Lauricella : Sulle formole che danno deformazione di una sfera elastica isotropa. — G. Fubini : Una questione fondamentale per la teoria dei gruppi e delle funzioni automorfe. — G. Picciati : Sulle funzioni potenziali elicoidali.

Bibliotheca Mathematica, Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften ; herausgegeben von G. Eneström, in Stockholm. B.-G. Teubner, Leipzig. 3. Folge, 5. Band.

2. Heft. — H.-G. Zeuthen : Sur l'arithmétique géométrique des Grecs et des Indiens. — C.-R. Wallner : Entwickelungsgeschichtliche Momente bei Entstehung der Infinitesimalrechnung. — G. Loria : Luigi Cremona et son œuvre mathématique. — G. Eneström : Ist es zweckmässig, dass mathematische Zeitschriftenartikel datiert werden !

3. Heft. — F. Hultsch : Die Sexagesimalrechnungen in den Scholien zu Euklids Elementen. — E. Gerland : Ueber die Erfindung der Pendeluhr. — P. Eneström : Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Johann I Bernoulli. — F. Müller : Das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 1869-1904. — G. Eneström : Welche Forderungen sind an Rezensionen

mathematischer Arbeiten zu stellen? — Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors « Vorlesungen über Geschichte der Mathematik ».

4. Heft — P. Duhem : Un ouvrage perdu cité par Jordanus de Nemore : le *Philotechnes*. — Ant. Favaro : Nuovo ricerche sul matematico Leon. Cremonese. — H. Bosmans : Note sur la trigonométrie d'Adrien Romain. — A. v. Braunmühl : Beiträge zur Geschichte der Integralrechnung bei Newton und Cotes. — Er. Hoffmann : Die Entwicklung der verschiedenen Probleme der Maxima der Anziehung. — G. Eneström : Ein neues Hilfsmittel zur Verbreitung mathematisch-historischer Kenntnisse.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. xxxii, Sorbonne, Paris.

Fasc. 2. — M. Petrovitch : Remarques sur les zéros des fonctions entières. — M. Petrovitch : Sur les fonctions représentées par une classe étendue d'intégrales définies. — P.-J. Suchar : Sur les équations différentielles réciproques du second ordre. — J. de Séguier : Sur certains groupes de Mathieu. — R. Baire : Sur les séries à termes continus et tous de même signe. — G. Fontené : Les six équations distinctes du triangle en métrique aninvolutive. — G. Humbert : Sur les tétraèdres inscrits et circonscrits à des quadriques.

Fasc. 3. — J. Clairin : Remarques sur l'intégration de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre. — M. de Montcheuil : Séparation analytique d'un système de rayons incidents et réfléchis (*suite*). — F. Lucas : Sur les dérivées modulaires des polynomes. — F. Lucas : Sur les dérivées modulaires des polynomes. — M. d'Ocagne : Sur la résolution nomographique générale des triangles sphériques. — L. Lévy : Sur les déplacements d'une figure invariable dans lesquels les différents points de la figure décrivent des lignes sphériques. — E. Genty : Note de Géométrie vectorielle sur les systèmes orthogonaux.

Fasc. 4. — H. Lebesgue : Une propriété caractéristique des fonctions de classe *un*. — J. Hadamard : Résolution d'un problème aux limites pour les équations linéaires du type hyperbolique. — R. Bricard : Sur une certaine classe de cubiques gauches et sur des systèmes articulés qui s'y rattachent. — G. Fontené : Sur l'extension du théorème des polygones de Poncelet à l'espace, par des polyèdres de genre *un*. — M. Potron : Sur quelques groupes d'ordre p^6. — M. Potron : Les g_{p^m} (p premier) dont tous les $g_{p^{m-2}}$ sont abéliens. — G. Remoundos : Sur les fonctions entières de genre fini.

Bulletin of the American mathematical Society, New-York, 2e série.

Vol. XI, nº 1 (Oct. 1904). — V. Snyder : On Developable and Tubular Surfaces having spherical Lines of Curvature. — G. A. Miller : Addition to a Theorem due to Frobenius. — E. J. Wilczynski : On Self-Dual Scrolls. — J. L. Coolidge : The Opportunities for Mathematical Study in Italy. — E. B. Wilson : Vector Analysis (Comptes rendus bibliog.)

Nº 2 (Nov. 1904). — W. Haskell et H. S. White : The eleventh Summer Meeting of the Am. math. Soc. — G. A. Miller : The october Meeting of the San Francisco-Section. — E. B. Wilson : The Foundations of Mathematics. (A propos de l'ouvrage de M. Russell.)

Nº 3 (Déc. 1904). — F. N. Cole : The oct Meeting of the Am. math. Soc. — Maxime Bôcher : The Fundamental Conceptions and Methods of Mathematics. — James Pierpont : The History of Mathematics in the Nineteenth Century. — L. E. Dickson : De Séguier's Theory of Abstract Groups.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von Em. Lampe. Band xxxiii, Jahrg. 1902. G. Reimer, Berlin.

Heft. 3. — Das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Rückblick u. Ausblick, von Emil Lampe. — Mechanik. — Mathem. Physik. — Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, in Monatsheften herausgegeben von A. Gutzmer, in Jena. — 13. Band, 1904.

Heft 6. Juni. — P. Stäckel : Angewandte Mathematik und Physik an den deutschen Universitäten. — H. Geissler : Zur Auffassung der unendlichkleinen Grössen. — F. Bernstein : Erklärung zu dem Aufsatz von K. Geissler : « Zur Auffassung der unendlichkleinen Grössen ». — Félix Klein : Hundert Jahre mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen Preussens. — A. Pringsheim : Ueber Wert und angeblichen Unwert der Mathematik.

Heft 7-9. Juli, August, September. — L. Kœnigsberger : *Carl-Gustav-Jacob Jacobi.* — H.-A. Schwarz : Ansprache bei der Jacobifeier. — L. Prandtl : Ueber die physikalische Richtung in der Vektoranalysis. — F. Marotte : Les récentes réformes de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement secondaire français. — F. Klein : Mathematik, Physik, Astronomie an den deutschen Universitäten in den Jahren 1893-1903. — M. Cantor : Ueber einen 4. Band von Cantor's Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.

Heft 10-12. Oktober, November, Dezember. — L. Heffter : Dritter internationaler Mathematiker-Kongress in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904. — Die dem 3. internationalen Mathematiker-Kongress zu Heidelberg vorgeschlagenen Resolutionen. — A. Gutzmer : Ueber die auf die Anwendungen gerichteten Bestrebungen im mathematischen Unterricht der deutschen Universitäten. — P. Stäckel : Die Notwendigkeit regelmässiger Vorlesungen über Elementar-Mathematik an den Universitäten. — W. von Dyck : Einleitender Bericht über das Unternehmen der Herausgabe der Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften. — G.-Z. Giambelli : Sul principio delle conservazione del numero. — A. Calveira : Note sur les rapports polygonaux. — L.-E. Dickson : On the minimum degree of resolvents for the p-section of the periods of hyperelliptic functions of four periods. — Gutzmer : Bericht über die Jahresversammlung in Breslau.

Journal für die reine u. angew. Mathematik, herausgegeben von K. Hensel. B. cxxix ; G. Reimer, Berlin.

Heft 1 (mit einem Bildnis Dirichlets). — R. Dedekind : Ueber binäre trilineare Formen u. die Komposition der binären quadr. Formen. — H. Weber : Ueber komplexe Primzahlen in Linearformen. — D. Hilbert . Ueber das Dirichlet'sche Princip. — K. Hensel : Ueber die zu einem alg. Körper gehörigen Invarianten. — Mirimanoff : Sur la relation $\left(\frac{D}{p}\right) = (1)^{n-b}$ et la loi de réciprocité.

Mathesis. Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales, publié par P. Mansion et J. Neuberg. Gand, Hoste. Paris, Gauthier-Villars. Série 3. Tome iv, 1904.

Juin. — M. Aubry : Deux théorèmes de *Grégoire de St-Vincent.* — Exercices de géométrie élémentaire.

Juillet. — Une démonstration de *Gauss.* — C.-E. Wasteels : Sur la

courbure des courbes planes et sphériques. — J. Neuberg : Exercices de géométrie élémentaire.

Août-septembre — Fr. Corin : Sur un complexe quadratique. — A. Aubry : Trois théorèmes de maximum. — A. Droz-Farny : Notes géométriques sur le trifolium droit. — J. Neuberg : Exercices sur l'hyperbole $xy = 1$.

Octobre. — M. Stuyvaert : Sur les cubiques gauches. — J. Neuberg : Quelques formules relatives au tétraèdre.

Novembre. — Fr. Corin ; Sur un complexe quadratique. — A.-H. Convert : Note sur la conchoïde de Nicomède.

Décembre. — Gauss, sur l'existence du plan. — Notes mathématiques.

Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2. Vol. 1 et 2. Hogson & Son, London.

Vol. 1. Fasc. 5 à 7. — Prof. A. E. Love. : The propagation of Wave-Motion in an Isotropic Elastic Solid Medium. — Mr. P. W. Wood. : On the Unique Expression of Binary and Ternary Forms. — Rev. F. H. Jackson : Forms of Maclaurin's Theorem. — Dr W. H. Young : On the Distribution of the Points of Uniform Convergence of a Series of Functions. — Rev. F. H. Jackson : A Generalization of Neumann's Expansion of an Arbitrary Function in a Series of Bessel's Functions. — Mr. E. T. Whittaker : On an Expression of the Electromagnetic Field due to Electrons by means of two Scalar Potential Function. — Dr E. W. Hobson : On Modes of Convergence of an Infinite Series of Functions of a Real Variable. — Prof. Burnside : On Groups of Order $p^\alpha q^\beta$. — Mr. W. H. Jackson : On the Diffraction of Light produced by an Opaque Prism of Finite Angle. — Prof. A. C. Dixon : On many-valued Newtonian-Potentials. — Prof. J. D. Everett : On a Calculus of Point Assemblages. — Mr. H. Bateman : The Solution of Partial Differential Equations by means of Definite Integrals. — Mr. H. M. Macdonald : Electric Radiation from Conductors. — Prof. Horace Lamb : On Group-Velocity. — Mr. P. W. Wood : On the Irreducibility of Perpetuant Types.

Vol. 2. Fasc. 1 et 2. — M. G. H. Hardy : On the Roots of the Equation $\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e$. — Dr W. H. Young : Open Sets and the Theory of Content. — Dr W. H. Young : On Upper and Lower Integration. — Dr W. H. Young : The Tile Theorem. — Mr. P. W. Wood : On the Unique Expression of a Quantic in any Order in any Number of Variables, with an Application to Binary Perpetuants. — Prof. A. E. H. Love : Some Illustrations of Modes of Decay of Vibratory Motions. — Prof. F. Morley : On a Plane Quintic Curve. — Mr. T. H. Havelock : Mathematical Analysis of Wave Propagation in Isotropic Space of p Dimensions. — Rev. J. Cullen : Note on a System of Linear Congruences. — Prof. G. A. Miller. An Extension of Sylow's Theorem. — Mr. P. W. Wood : Perpetuant Syzygies of Degree Four. — Mr. H. Hilton : On Spherical Curves. Part. II.

Revue scientifique, paraissant le samedi ; 5e série, T. III. Paris, 1905. No 3 (21 janvier). — C. Bourlet : Revue annuelle des thèses de mathématiques.

Revue semestrielle des publications mathématiques, dirigée par P.-H. Schoute, D.-E. Korteweg, J.-C. Kluyver, W. Kaptein, J. Cardinaal. T. XIII, première partie : avril-octobre 1904. — Delsman en Nolthenius, Amsterdam, 1905.

2. Livres nouveaux :

René Baire. — **Leçons sur les fonctions discontinues** professées au Collège de France, rédigées par A. Denjoy. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions, publiée sous la direction de M. E. Borel). — 1 vol. in-8°, 128 p. ; prix : 3 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris, 1905.

Emile Borel. — **Leçons sur les fonctions de variables réelles** et les développements en séries de polynomes, professées à l'Ecole normale supérieure, rédigées par M. Fréchet. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions, publiée sous la direction de M. E. Borel.) — 1 vol. in-8°, 162 p. ; prix : 4 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris, 1905.

B. Baillaud et H. Bourget. — **Correspondance d'Hermite et de Stieltjes,** avec une Préface de Emile Picard. Tome I. — 1 vol. xx-477 p., avec deux portraits ; prix : fr. 16.— ; Gauthier-Villars, Paris, 1905.

W. M. Baker et A. A. Bourne. — **Examples in Algebra,** selected from *Elementary Algebra*. — 1 vol. in-16 ; 298 p. ; prix : 3 s. ; George Bell & Sons, Londres, 1904.

Baltin u. Maiwald. — **Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie u. Stereometrie.** I, zweite, verb. Aufl. — 1 vol. in-8°, cart., 110 p., prix : Mk. 1,40 ; B. G. Teubner, Leipzig, 1905.

G. Darboux. — **Etude sur le développement des méthodes géométriques,** lue le 24 sept. 1904, au Congrès des sciences et des arts à Saint-Louis. — 1 fasc. in-8°, 34 p. ; prix : 1 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris, 1904.

Klein u. Riecke. — **Neue Beiträge zur Frage des mathem. u. phys. Unterrichts an den höheren Schulen,** von O. Behrendsen, E. Bose, E. Götting, F. Klein, E. Riecke, J. Stark, K. Schwarzschild, gesammelt u. herausgegeben von F. Klein u. E. Riecke. Vorträge gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik u. Physik, Göttingen, Ostern, 1904. Teil I. — 1 vol., in-8°, 190 p. ; prix : Mk. 3,60 ; B.-G. Teubner, Leipzig, 1904.

Edm. Maillet. — **Essais d'Hydraulique souterraine et fluviale.** — 1 vol. gr. in-8°, 218 p., avec 31 tableaux numériques et 11 graphiques ; prix : fr. 11.—, Librairie Hermann, Paris, 1905.

H. Mandart. — **Cours de Géométrie analytique** à deux dimensions (sections coniques). — 1 vol. in-8°, 574 p. , prix : fr. 10.— ; Wesmael-Charlier, Namur, 1904.

Maur. d'Ocagne. — **Le Calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques.** — Histoire et description sommaire des instruments et machines à calculer, tables, abaques et nomogrammes. 2e édition revue et augmentée. — 1 vol. cart. viii-228 p., avec 70 fig. ; prix : fr. 5.— ; Gauthier-Villars, Paris, 1905.

Emile Picard. — **Sur le développement de l'Analyse** et ses rapports avec diverses sciences. Conférences faites en Amérique. — 1 vol. iv-168 p. ; prix : 3 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris, 1905.

Dr Prompt. — **Remarques sur le théorème de Fermat.** — 1 broch. in-16, 32 p. ; Allier frères, Grenoble, 1905.

Fr. Schilling. — **Ueber die Anwendungen der darstellenden Geometrie** insbesondere über die Photogrammetrie, Vorträge gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern, 1904. — Un vol. cart., 198 p., 151 fig. et 5 planches ; prix : Mk. 5.— ; B.-G. Teubner, Leipzig.

LA NOTION DE FONCTION

DANS L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE DES ÉCOLES MOYENNES[1]

par H. Fehr

---

1. Le principal but que poursuit notre Association est de contribuer aux progrès de l'enseignement mathématique dans nos écoles moyennes. Mais nos efforts ne doivent pas seulement tendre à améliorer les méthodes ; ils doivent aussi avoir en vue une meilleure adaptation des programmes aux besoins de notre époque. Dans cet ordre d'idées il est une série de questions très importantes qui pourront être mises à l'ordre du jour des prochaines réunions annuelles ; ainsi, outre le sujet que j'ai eu l'honneur de vous proposer pour cette séance, il y aurait lieu d'examiner, entre autres, l'enseignement de l'arithmétique dans les divers établissements secondaires, la fusion de la Planimétrie et de la Stéréométrie ; d'autre part, il serait bon de provoquer un échange de vues sur la préparation scientifique et pédagogique des maîtres de mathématiques, etc.

Les plans d'études et les programmes doivent suivre l'évolution de la Science ; aussi n'ont-ils toujours qu'un caractère provisoire. Ils doivent être revus de temps en temps, afin d'être toujours conformes aux conditions de la science moderne et de la vie économique. Si l'on examine à ce point de vue les programmes actuels pour les diverses parties des mathématiques élémentaires, depuis les notions d'Arithmétique et de Géométrie jusqu'aux éléments des Mathématiques supérieures, on constate qu'ils contiennent encore bien

---

[1] Conférence faite à la Réunion annuelle de *l'Association des maîtres de mathématiques des Ecoles moyennes suisses*, tenue à Zurich le 17 décembre 1904 ; traduction de l'auteur.

des problèmes, des chapitres même, qui peuvent être laissés de côté pour faire place à des notions nouvelles plus importantes et d'une portée scientifique plus réelle. Telle est la *notion de fonction*, et je me propose d'examiner ici la place qu'il convient de lui accorder dans l'enseignement des écoles moyennes.

La question n'est pas nouvelle. Elle est de nouveau à l'ordre du jour en Allemagne, où elle vient de faire l'objet d'une intéressante brochure[1] publiée par M. le prof. KLEIN et dont je vous recommande vivement la lecture.

2. Je limiterai mon exposé à l'examen des deux points suivants :

I. *Y a-t-il lieu d'introduire la notion de fonction et ses applications fondamentales les plus simples dans le plan d'études des différentes sections des écoles moyennes ?*

II. *Dans l'affirmative, comment et dans quelle mesure cette notion doit-elle être introduite ?*

Dans les sections techniques (Ecoles industrielles, etc.) la notion de fonction est déjà largement mise à contribution. D'autre part, dans la plupart de nos gymnases, écoles normales d'instituteurs ou écoles de commerce, les élèves ont l'occasion de pratiquer les représentations graphiques, et il ne doit guère exister d'école technique moyenne où la notion de fonction ne soit pas utilisée dans une large mesure. Il y a donc lieu d'envisager principalement les sections et les écoles n'ayant pas un caractère technique.

3. La *première question* revient à demander si la notion de fonction fait partie du fonds commun de connaissances générales que doivent fournir les différentes sections de l'enseignement secondaire. La réponse ne fait pas de doute. En effet, si l'on considère les progrès toujours croissants de la Science, on constate que les Mathématiques pénètrent de plus en plus dans les branches les plus diverses. Le plus

---

[1] *Ueber eine zeitgemässe Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen.* Vorträge gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik u. Physik, Göttingen, Ostern 1904. B.-G. Teubner, Leipzig, 1904.

souvent c'est précisément la notion de fonction qui joue le rôle fondamental. Ainsi, il n'est guère possible d'enseigner d'une manière rationnelle les éléments de Mécanique et la Physique sans les premiers éléments d'Analyse. On rencontre constamment la dérivée d'une fonction, par exemple dans la vitesse, l'accélération, la tangente à la trajectoire, la chute de potentiel, etc. Les diagrammes, les représentations graphiques, l'établissement de formules empiriques, ne se retrouvent pas seulement dans toutes les branches des sciences techniques, on en fait également usage dans les sciences naturelles et biologiques et dans des questions d'ordre sociologique : qu'il me suffise de rappeler ici les Cours d'Economie politique de Walras et de Pareto. On peut dire que de nos jours, pour le chimiste comme pour le botaniste, pour le médecin et le biologiste comme pour le juriste, une connaissance approfondie de la notion de fonction est devenue indispensable, car sans elle un grand nombre de propriétés fondamentales lui restent entièrement inaccessibles. C'est dire *qu'en raison de sa grande portée et de ses applications fondamentales dans les divers domaines de la Science, la notion de fonction doit faire partie du programme des écoles moyennes.* Telle est ma réponse à la première question.

4. Nous avons maintenant à examiner la *seconde question:* comment et dans quelle mesure la notion de fonction et ses applications fondamentales les plus simples peuvent-elles être introduites dans l'enseignement des écoles moyennes ?

Comme préparation à une première introduction il est bon de familiariser l'élève de bonne heure avec la notion de coordonnées. Il s'agira d'abord, cela va sans dire, des coordonnées rectangulaires et leur application à la représentation graphique de la relation entre deux variables : temps et température, temps et pression atmosphérique, temps et niveau du lac, tableaux statistiques, etc. Dès les premiers exercices l'élève exécutera lui-même quelques graphiques sur du papier quadrillé et quelquefois aussi sur du papier millimétrique. Ces exercices constitueront en même temps une pre-

mière initiation à la Géométrie analytique; ils peuvent avoir lieu, comme cela se fait du reste dans divers établissements, immédiatement après la résolution des équations du premier et du second degré.

Jusqu'ici les élèves n'ont guère rencontré que des nombres *connus* et des nombres *inconnus*, ils acquièrent maintenant l'idée de *variable*, ce qui leur permettra ensuite de se familiariser avec la *notion de fonction*. On examinera la représentation graphique de fonctions simples en commençant par les fonctions

$$(1) \qquad y = ax + b \; , \qquad y = ax^2 \; , \qquad y = ax^2 + bx + c \; ,$$

dans lesquelles on attribuera d'abord aux coefficients des valeurs numériques très simples. L'élève doit être rendu attentif au fait que dans

$$ax + b = 0 \; , \qquad ax^2 + bx + c = 0 \; ,$$

x est une *inconnue*, tandis que dans 1° x est une *variable*. L'exposé sera complété par la discussion.

$$ax + b \gtrless 0 \; , \qquad ax + bx + c \gtrless 0 \; .$$

Puis vient une seconde série de représentations graphiques fournie par les fonctions

$$(2) \qquad y = \frac{1}{x} \; , \qquad y = \frac{a}{x + p} \; , \qquad y = \frac{ax + b}{a'x + b'} \; .$$

Ce serait là une première étape. Mais, dans la suite, on saisira chaque occasion pour utiliser les nouvelles acquisitions. Par exemple, en Algèbre, on fera suivre l'étude des fonctions exponentielle et logarithmique

$$(3) \qquad y = a^x \; , \qquad y = \log x \; ,$$

de la représentation graphique de ces fonctions; en trigonométrie, on construira les courbes

$$(4) \qquad y = \sin x \; , \qquad y = \operatorname{tang} x \; .$$

Suivant les établissements, il y aura lieu de développer ces

exercices en examinant encore les courbes

(5) $y = ax^3 + b$, $y = ax^3 + bx$;

(6) $y = \dfrac{a}{x^2 + px + q}$, $y = \dfrac{ax + b}{x^2 + px + q}$, $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q}$.

et en construisant quelques familles de courbes sur papier millimétrique, par exemple, les courbes en coordonnées rectangulaires :

(7) $y = x^m$
(8) $y = x^{-m}$ } pour $m = 1, 2, 3, 5, 10$; $1/2$, $1/3$, $1/5$, $1/10$;

(9) $y = a^{bx}$ { d'abord pour $b = 0, 1, 2, 3, 4$; $1/2$, $1/3$, $1/4$;
puis pour $b = 0, -1, -2, -3, -4$; $1/2$, $-1/3$, $-1/4$;

(10) $y = a \sin x$, $y = \sin bx$, $y = \sin (x + c)$, $y = a \sin (bx + c)$,

on aura soin de faire ressortir le rôle des coefficients a, b, c; on construira aussi quelques courbes en *coordonnées polaires*, par exemple

(11) $\rho = a\theta$, $\rho = \dfrac{a}{\theta}$, $\rho = a^{b\theta}$, pour $a > 0$;

(12) $\rho = a + b \cos \theta$, pour $a \lesseqgtr b$;

(13) $\rho = a + b \cos n\theta$ » pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

Mais ce ne sont là que des exemples, et nous n'avons pas à entrer ici dans le détail des programmes.

5. A l'aide d'exemples du genre de ceux que je viens d'indiquer, nous aurons donc familiarisé l'élève avec la représentation graphique de fonctions simples. Mais le but n'est pas encore atteint. Il faut l'initier maintenant à l'étude des deux problèmes fondamentaux qui viennent se rattacher à la notion de fonction ou à la courbe correspondant à une fonction. L'élève ne possédera suffisamment la notion de fonction que lorsqu'il pourra discuter la variation des fonctions simples, ce qui n'est possible que s'il connaît la *déri-*

vée. Cette importante notion devra être appliquée à un grand nombre d'exemples empruntés aux domaines les plus variés de la Science, car il s'agit ici non pas simplement d'exercices mathématiques, mais avant tout de l'acquisition d'une idée nouvelle, celle de dérivée, et des diverses interprétations dont elle est susceptible. Il y aura lieu d'insister tout particulièrement sur les interprétations géométriques et cinématiques.

Quant à la notation, nous dirons avec M. POINCARÉ (voir l'*Ens. math.*, 6me année, p. 277, 1904) qu' « il faut dans les commencements employer exclusivement la notation de Lagrange », qui consiste à écrire $f'(x)$.

En dernier lieu viendra le problème inverse, celui de la détermination de la *fonction primitive* d'une fonction donnée et son application à la mesure d'une surface plane. Ici encore on étudiera des exemples typiques très simples empruntés aux diverses branches des mathématiques pures et appliquées.

6. Comme vous le voyez, il s'agit en réalité d'introduire dans les programmes les deux concepts fondamentaux du Calcul infinitésimal, le problème des tangentes et le problème des quadratures. Ce sont ces deux applications fondamentales de la notion de fonction qui doivent former le couronnement des études mathématiques dans les écoles moyennes. Au reste, on rencontre déjà maintenant l'idée de limite et d'autres notions d'Analyse dans l'enseignement moyen des Mathématiques et de la Physique ; mais ces notions doivent être coordonnées méthodiquement, afin de pouvoir être utilisées par les diverses branches scientifiques.

Ce premier examen des deux problèmes fondamentaux de l'Analyse aurait en outre le grand avantage de combler l'abîme qui sépare l'enseignement mathématique moyen de l'enseignement supérieur.

Il n'est guère besoin de dire que dans cette transformation du plan des études mathématiques, nous devrons opérer avec la plus grande prudence et procéder par améliorations progressives. D'une part il faut *se borner aux fonctions les*

plus simples et aux notions fondamentales les plus essentielles; d'autre part, on ne devra jamais perdre de vue qu'il s'agit d'une première initiation dans laquelle *toute théorie abstraite doit être évitée.*

7. En France, les plans d'études ont subi une transformation dans ce sens il y a deux ans. Il me paraît intéressant de vous donner, simplement à titre d'exemple, un court aperçu des nouveaux programmes français au point de vue de la question qui nous occupe en ce moment. La nouvelle organisation de l'enseignement secondaire français n'étant probablement pas connue de la plupart d'entre vous, je crois indispensable d'en indiquer d'abord les principales divisions [1].

L'enseignement secondaire fait suite à un cours d'*Etudes primaires* d'une durée normale de *quatre années*. Il est constitué par un cours d'études d'une durée de *sept ans* et comprend *deux cycles.*

Premier cycle : Durée : quatre ans; Classes VI, V, IV, III (dites de *Sixième*, de *Cinquième*, de *Quatrième* et de *Troisième*). Dans ce premier cycle les élèves ont le choix entre deux divisions. Dans la *Division A* le latin et le grec sont obligatoires; la *Division B*, qui ne comporte pas d'enseignement du latin et du grec, donne plus de développement à l'enseignement du français, des sciences, du dessin, etc. Ce premier cycle conduit à un *certificat d'études secondaires* du premier degré.

Second cycle : Durée : trois ans; Classes II et I (dites de *seconde* et de *première*) et Classe de Philosophie ou Classe de Mathématiques. Dans ce second cycle les élèves ont le choix entre *quatre sections* :

Section A. Le latin avec le grec;

Section B. Le latin avec une étude plus développée des langues vivantes;

Section C. Le latin avec une étude plus complète des sciences;

[1] Pour plus de détails voir le *Plan d'études et Programmes d'enseignement dans les Lycées et Collèges de garçons.* (Arrêtés du 31 mai 1902, Delalain frères, Paris.)

Section D. L'étude des langues vivantes unie à celle des sciences sans cours de latin.

La section A correspond aux sections classiques de nos gymnases, les sections C et D aux sections réales, tandis que la section D (terminée par la Classe de Mathématiques) peut être comparée à nos sections techniques (ou industrielles).

A l'issue de la Classe de Première, les élèves peuvent se présenter à la *première partie* du *Baccalauréat de l'enseignement secondaire*, dont ils subissent les épreuves d'après la section qu'ils ont suivie pendant le second cycle.

Pour la troisième et dernière année du second cycle, les élèves ont le droit d'opter entre les cours de la *Classe de Philosophie* et ceux de la *Classe de Mathématiques* ; à la fin de ces cours, ils peuvent se présenter à la *deuxième partie* du *Baccalauréat* dont ils subissent les épreuves correspondant aux études de la section qu'ils ont suivie. Je tiens à vous faire remarquer que *tous les diplômes de bachelier confèrent les mêmes droits.*

Faisant suite à la Classe de Mathématiques vient encore la *Classe de Mathématiques spéciales*[1] destinée à préparer les candidats aux grandes Ecoles : Ecole Polytechnique, Ecole centrale des Arts et Manufactures, etc.

Examinons maintenant les programmes et voyons la place réservée à la *notion de fonction* et aux représentations graphiques. C'est dans la *Classe de troisième* (Divis. B) qu'elles se présentent pour la première fois :

«... Variation de l'expression $ax + b$, représentation graphique... Représentation graphique des variations de x^2, $\frac{1}{x}$ etc. ... »

Puis, dans le programme des *Classes de seconde*, C et D, on lit :

«... Variation du trinome du second degré ; représentation graphique. Variation de l'expression $\frac{ax + b}{a'x + b'}$, représentation graphique. »

« Notion de la dérivée ; signification géométrique de la dérivée... »

---

[1] Voir le Rapport de M. Appell et le nouveau programme dans l'*Ens. Math.* 6e année, p. 485-494, 1904 ; 7e année, p. 66-76, 1905.

Le programme de la *Classe de Philosophie* est de nature à nous intéresser tout particulièrement. J'en extrais les passages suivants :

«... Notion de fonction, représentation graphique de fonctions très simples... Usage du papier quadrillé...

« Notion de la tangente et de la dérivée... Notions sur l'usage de la dérivée pour reconnaître le sens de la variation d'une fonction. »

« Problème inverse de la recherche d'une dérivée. Aire d'un triangle, ou d'une parabole, obtenue par la recherche d'une fonction dont la dérivée, par rapport à x, est ax ou ax^2. »

« Notions sur la méthode infinitésimale ; exemples d'infiniments petits de divers ordres, limites de rapports ou de sommes obtenues en négligeant des quantités infiniment petites par rapport à celles que l'on conserve. Application à l'évaluation des volumes ou des surfaces de corps considérés en Géométrie élémentaire. »

Pour avoir une idée exacte de la mesure dans laquelle ces différentes notions ont pénétré dans l'enseignement secondaire français, il suffit de consulter les nouveaux manuels. En voici quelques-uns ; vous pourrez en prendre connaissance au cours de cette réunion. Rédigés par des hommes qui sont à la fois d'excellents professeurs et des savants très estimés, ces ouvrages offrent toutes les garanties désirables tant au point de vue pédagogique qu'au point de vue scientifique. Voici les titres de ces manuels et les classes auxquelles ils sont destinés :

Algèbre, premier cycle, par Emile Borel, Maître de Conférences à l'Ecole normale supérieure, Librairie A. Colin, Paris, 1903. — Classe de 3e A, Classes de 4e et de 3e B.

Algèbre, second cycle (du même auteur). — Classes de 2e et de 1re C et D.

Précis d'Algèbre, contenant 557 exercices et problèmes, par Carlo Bourlet, Docteur ès sciences, Professeur de mathématiques spéciales au Lycée St-Louis, Librairie Hachette, Paris, 1904. — Classes de 2e et 1re C et D.

Notions de Mathématiques, par Jules Tannery, sous-directeur des Etudes scientifiques à l'Ecole normale supérieure, suivies de *Notions historiques* par Paul Tannery, Paris, 1903. — Classe de Philosophie.

Traité d'Algèbre, par A. Grévy, Docteur ès sciences, Pro-

fesseur agrégé au Lycée St-Louis, Librairie Vuibert et Nony, Paris, 1905. — Classe de Mathématiques.

8. Les programmes et les ouvrages que je viens de citer montrent que la notion de fonction a été largement prise en considération dans toutes les sections de l'enseignement secondaire français. J'attire tout particulièrement votre attention sur le programme de la Classe de Philosophie tel qu'il a été développé dans le bel ouvrage de MM. Tannery.

C'est maintenant à nous qu'il appartient d'examiner dans quelle mesure il est possible de moderniser les programmes de nos écoles moyennes en les adaptant aux nécessités de l'enseignement scientifique actuel, mais en tenant compte, cela va sans dire, des conditions spéciales des divers établissements. La discussion ne peut donc porter que sur des propositions tout à fait générales. J'en formulerai deux, qui sont en quelque sorte les conclusions de mon Rapport. Je vous propose de les adopter à titre de vœux :

I. *En raison de leur importance et de leur portée, la notion de fonction et les problèmes fondamentaux qui s'y rattachent appartiennent au programme de l'enseignement mathématique des écoles moyennes.*

II. *Quant à l'étendue et à la méthode on devra, d'une part, se borner aux notions fondamentales et à leurs applications typiques les plus simples, et, d'autre part, éviter un exposé purement abstrait.*

Discussion. — La conférence a été suivie d'une intéressante discussion à laquelle ont pris part MM. Wild (par une lettre datée de St-Gall), Scherrer (Küsnacht-Zurich), Brandenberger (Zurich), Suter (Kilchberg-Zurich), Butzberger (Zurich), Flatt (Bâle), Gubler (Zurich), Juzi (Bienne) et Fehr. Faute de place, nous devons nous borner à en donner un résumé très bref. Les divers orateurs ont parlé en faveur des deux propositions. M. Suter a recommandé que, dans l'exposé de ces notions, ainsi que du reste dans l'enseignement mathématique d'une manière générale, il soit tenu compte du développement historique.

M. Fehr tient à faire remarquer qu'il a évité à dessein les termes d' « Eléments de Calcul différentiel et intégral », parce qu'il craint que ceux-ci ne soient mal interprétés dans certains milieux, et

qu'en réalité il s'agit non pas d'introduire l'ensemble de ces éléments dans les programmes de l'enseignement secondaire supérieur, mais de fournir une première initiation à l'aide de quelques problèmes fondamentaux très simples. Il se déclare entièrement d'accord avec la proposition de M. Suter visant l'introduction de notions historiques dans l'enseignement des classes supérieures et il propose qu'une phrase dans ce sens soit ajoutée au second vœu. L'assemblée décide d'en faire un troisième vœu :

III. *Il est désirable que dans l'enseignement secondaire supérieur, notamment dans les Gymnases, une plus grande place soit accordée au développement historique des Mathématiques.*

Ces trois propositions ont été adoptées à l'unanimité.

SUR LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES
de $\sin x$ et $\cos x$.

D'après le nouveau programme officiel d'admission à l'Ecole Centrale des arts et manufactures, les développements en séries des fonctions $\sin x$ et $\cos x$, nécessaires pour établir la formule d'Euler et ses conséquences, doivent pouvoir se déduire, par le procédé élémentaire, de l'inégalité

$$x - \sin x < \frac{x^3}{6}.$$

Le raisonnement est bien simple : le voici en quelques mots :

I. Considérons en premier lieu les séries alternées

$$U = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \dots.$$

$$V = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} + \dots.$$

Leurs séries modulaires U_1 et V_1 sont convergentes pour toute valeur de x, puisque le rapport $\frac{u_{p+1}}{u_p}$ de la règle de D'Alembert y a toujours zéro pour limite quelle que soit la manière dont p croît indéfiniment ; les séries alternées sont donc aussi convergentes. Nous allons prouver que l'on a

$$U = \cos x \quad , \quad V = \sin x.$$

II. Soient

$$S_0 = 1 , \qquad \Sigma_0 = x ,$$

$$S_1 = 1 - \frac{x^2}{2!} , \qquad \Sigma_1 = x - \frac{x^3}{3!} ,$$

$$S_2 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} , \qquad \Sigma_2 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} ,$$

$$S_3 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} , \qquad \Sigma_3 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} ,$$

. . . .

Les fonctions

$$y_0 = S_0 - \cos x , \qquad z_0 = \Sigma_0 - \sin x ,$$

$$y_1 = S_1 - \cos x , \qquad z_1 = \Sigma_1 - \sin x ,$$

$$y_2 = S_2 - \cos x , \qquad z_3 = \Sigma_2 - \sin x ,$$

$$y_3 = S_3 - \cos x , \qquad z_4 = \Sigma_3 - \sin x ,$$

. . . .

jouissent des propriétés suivantes :

1° y_p est la dérivée de z_p par rapport à x, et à son tour z_p, est la dérivée de $- y_{p+1}$.

2° Pour toute valeur positive de x, y_0 est positive, donc z_0 est fonction croissante et toujours positive puisqu'elle est nulle pour $x = 0$.

y_1 est donc toujours décroissante et négative, à cause de la même remarque, et il en est de même de z_1. Par suite y_2 et z_2 sont toujours croissantes et positives, y_3 et z_3 toujours décroissantes et négatives.

En général, pour toute valeur positive de x, les fonctions :

y_{2n} et z_{2n}, nulles pour $x=0$, sont croissantes et positives,

y_{2n+1} et z_{2n+1}, nulles pour $x=0$, sont décroissantes et négatives.

Donc on a

$$S_{2n} > \cos x > S_{2n+1},$$
$$\Sigma_{2n} > \sin x > \Sigma_{2n+1},$$

et aussi

$$S_{2n+2} > \cos x > S_{2n+1},$$
$$\Sigma_{2n+2} > \sin x > S_{2n+1}.$$

Par suite, pour $n=\infty$, x étant positif, on a bien

$$\cos x = \mathrm{U}, \quad \text{et} \quad \sin x = \mathrm{V}.$$

3° Soit maintenant x négatif. Puisque

$$\cos(-x) = \cos x,$$

et que la série U ne dépend que des puissances paires de x, le premier résultat s'applique à x quelconque.

Ensuite,

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

et la série V ne dépendant que des puissances impaires de x, sa somme change de signe également avec x, donc on a en définitive quel que soit x

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots,$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots.$$

P. Barbarin (Bordeaux).

SUR LES CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ

Les démonstrations que l'on fait en Arithmétique pour trouver les caractères de divisibilité par 9 et par 11 peuvent être reproduites pour tout nombre, et cela a été fait pour quelques nombres ; dans ce qui suit, je propose une démonstration générale de ce mode de recherche des caractères de divisibilité.

En représentant par a, b, c, d,... les chiffres des unités, des dizaines, des centaines, des mille,... d'un nombre entier N, on peut écrire

$$(1) \qquad N = a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + \dots \; ;$$

et, en représentant par α un nombre entier positif ou négatif, on peut ainsi écrire tout nombre entier ν :

$$(2) \qquad \nu = 10 - \alpha \; .$$

Le nombre N a la forme d'un polynome entier en x, où $x = 10$, et le nombre ν a la forme du binome $x - \alpha$, où $x = 10$; donc le reste R_ν de la division algébrique de N par ν s'obtient en remplaçant 10 par α dans l'expression (1), ce qui donne

$$(3) \qquad R_\nu = a + b \cdot \alpha + c \cdot \alpha^2 + d \cdot \alpha^3 + \dots \; .$$

Voici comment on calcule rapidement les restes obtenus en divisant par ν les puissances successives de α. Soit ρ le reste de la division de α par ν. Le reste de la division par ν d'une puissance entière $p^{\text{ième}}$ de α peut s'obtenir en cherchant d'abord le reste ρ_1 de la division par ν de la puissance ρ^2, puis le reste ρ_2 de la division par ν du produit $\rho_1\rho$, ensuite le reste ρ_3 de la division par ν du produit $\rho_2\rho$, et ainsi de suite.

En effet, en représentant d'une manière générale par $R(D, d)$ le reste de la division de D par d, on peut écrire successivement :

$$R(\alpha^2, \nu) = R(\rho^2, \nu) = \rho_1,$$
$$R(\alpha^3, \nu) = R(\alpha^2, \alpha, \nu) = R(\rho_1 \rho, \nu) = \rho_2,$$
$$R(\alpha^4, \nu) = R(\alpha^3, \alpha, \nu) = R(\rho_2 \rho, \nu) = \rho_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$R(\alpha^p, \nu) = R(\alpha^{p-1}, \alpha, \nu) = R(\rho_{p-2} \rho, \nu) = \rho_{p-1}.$$

Le caractère de divisibilité d'un nombre entier N divisé par un nombre entier ν peut être aisément déduit de ce qui précède, en remplaçant R_ν de l'expression (3) par $R(R_\nu, \nu)$ lorsque R_ν sera égal ou supérieur à ν.

Exemples.

I. — Quand $\nu = 4$, on a $\alpha = 6$, et l'on trouve

$$R_4 = a + b \cdot 2 + c \cdot 0 + d \cdot 0 + \ldots ;$$

donc

$$R(N, 4) = R[(a + 2b), 4].$$

II. — Quand $\nu = 6$, on a $\alpha = 4$, et l'on trouve

$$R_6 = a + b \cdot 4 + c \cdot 4 + \ldots ;$$

donc

$$R(N, 6) = R\{[a + 4(b + c + \ldots)], 6\}.$$

III. — Quand $\nu = 7$, on a $\alpha = 3$, et l'on trouve

$$R_7 = a + b \cdot 3 + c \cdot 2 + d \cdot 6 + e \cdot 4 + f \cdot 5 + g \cdot 1 + h \cdot 3 + \ldots ;$$

retranchant $7(d + e + f + \ldots)$ de chaque membre de cette égalité, on obtient :

$$R_7 - 7(d + e + f + \ldots)$$
$$= a \cdot 1 + b \cdot 3 + c \cdot 2 + d \cdot (-1) + e \cdot (-3) + f \cdot (-2) + g \cdot 1 + \ldots ;$$

de là on déduit que :

Le reste de la division d'un nombre par 7 est le même que le reste obtenu en divisant par 7 la somme algébrique des

produits des chiffres successifs du nombre, à partir de celui des unités, respectivement par les nombres

$$1, 3, 2, \overline{1}, \overline{3}, \overline{2}\ ; \qquad 1, 3 \ldots .$$

IV. — Quand $\nu = 8$, on a $\alpha = 2$, et l'on trouve

$$R_8 = a + b \cdot 2 + c \cdot 4 + d \cdot 0 + e \cdot 0 + \ldots ;$$

donc

$$R(N, 8) = R[(a + 2b + 4c), 8] .$$

V. — Quand $\nu = 11$, on a $\alpha = -1$, et l'on trouve

$$R_{11} = a \cdot 1 + b \cdot (-1) + c \cdot 1 + d \cdot (-1) + e \cdot 1 + \ldots$$
$$= (a + c + e + \ldots) - (b + d + f + \ldots) ;$$

donc

$$R(N, 11) = R[(\Sigma \text{ ch. ord. imp.} - \Sigma \text{ ch. ord. pair}), 11] .$$

VI. — Quand $\nu = 13$, on a $\alpha = -3$, et l'on trouve

$$R_{13} = a + b \cdot (-3) + c \cdot 9 + d \cdot (-1) + e \cdot 3 + f \cdot (-9) + g \cdot 1 + h \cdot (-3) + \ldots ;$$

ajoutant l'expression $13(-c + f - \ldots)$ aux deux membres de cette égalité, on obtient

$$R_{13} + 13(-c + f - \ldots)$$
$$= a \cdot 1 + b \cdot (-3) + c \cdot (-4) + d \cdot (-1) + e \cdot 3 + f \cdot 4 + g \cdot 1 + \ldots ;$$

de là on déduit que :

Le reste de la division d'un nombre par 13 est le même que le reste obtenu en divisant par 13 la somme algébrique des produits des chiffres successifs du nombre, à partir de celui des unités, respectivement par les nombres

$$1, \overline{3}, \overline{4}, \overline{1}, 3, 4\ ; \qquad 1, \overline{3}, \ldots$$

VII. — Quand $\nu = 17$, on a $\alpha = -7$, et l'on trouve

$$R_{17} = a + b \cdot (-7) + c \cdot 15 + d \cdot (-3) + e \cdot 4 + f \cdot (-11) + g \cdot 9$$
$$+ h \cdot (-12) + i \cdot 16 + j \cdot (-10) + k \cdot 2 + l \cdot (-14) + m \cdot 13$$
$$+ n \cdot (-6) + o \cdot 8 + p \cdot (-5) + q \cdot 1 + r \cdot (-7) + \ldots .$$

On peut écrire

$$R_{17} + \text{mult. } 17 = a - 7b - 2c - 3d + 4e + 6f - 8g + 5h - i + 7j$$
$$+ 2k + 3l - 4m - 6n + 8o - 5p + q - 7r - \dots \;;$$

de là on déduit que :

Le reste de la division d'un nombre par 17 est le même que le reste obtenu en divisant par 17 la somme algébrique des produits des chiffres successifs du nombre, à partir de celui des unités, respectivement par les nombres

$$1, \overline{7}, \overline{2}, \overline{3}, 4, 6, \overline{8}, 5; \overline{1}, 7, 2, 3, \overline{4}, \overline{6}, 8, \overline{5}; \qquad 1, 7, \dots$$

Ernest Lebon (Paris).

SUR LA GÉOMÉTRIE ET LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUES

Dans les pages suivantes je me propose d'établir les propriétés des figures sphériques — jusqu'aux formules fondamentales de la trigonométrie — sans jamais faire usage des théorèmes propres de la géométrie plane euclidienne [1]. Il me semble que ce ne soit pas un simple exercice de géométrie

---

[1] MM. Niewenglowski et Gérard, dans leur *Traité de géométrie*, construisent la géometrie sphérique en empruntant aux développements précédents la seule proposition que la somme des deux côtés d'un triangle sphérique est plus grande que le troisième. Cependant c'est là faire un bien grand usage de la géométrie plane.

Que la géométrie et la trigonométrie sphériques soient indépendantes de l'hypothèse particulière sur les droites parallèles, c'est un fait bien connu. On peut aussi le faire ressortir aisément de l'article présent; il suffira — pour éviter toute difficulté relative à la géométrie riemanniene — de définir convenablement le segment et l'ordre ; en admettant le *segment* comme *concept primitif* on dira, par exemple : « Deux segments d'une même droite ayant même extrémité A, ou bien sont l'un entièrement contenu dans l'autre, ou bien contiennent chacun des points extérieurs à l'autre. Dans le premier cas, on dit que les deux segments sont du même côté de A, dans le second qu'ils sont de côtés opposés par rapport à A. Si deux segments sont de côtés opposés par rapport à A, tout autre segment de la même droite, ayant A pour extrêmité est du même côté que l'un et du côté opposé de l'autre. »

générale, mais qu'il en ressort beaucoup de lumière sur certains théorèmes connus de la géométrie sphérique.

Les figures seront toujours décrites sur une sphère fixe : si A et B sont deux points de la sphère, le *grand-arc* AB sera l'arc de grand-cercle compris entre A et B et plus petit qu'une demi-circonférence. Deux points d'un grand-cercle seront du même côté d'un point donné sur ce cercle, s'ils appartiennent à la même demi-circonférence ayant ce point comme origine.

I. *Géométrie sphérique.*

1. Soit BC un arc de grand-cercle, A un de ses pôles. L'angle ABC est droit — Soit C′ le point opposé de C et D un point de la demi-circonférence CAC′ ; l'angle DBC sera plus grand ou plus petit que ABC selon que DC est plus grand ou plus petit que AC. Donc *dans un triangle rectangle l'angle opposé à l'un des côtés de l'angle droit est plus grand ou plus petit qu'un droit en même temps que ce côté est plus grand ou plus petit qu'un cadrant.*

On déduit que dans un triangle rectangle la somme des trois angles est supérieure à deux angles droits. Pas de doute, en effet, si un des côtés de l'angle droit est plus grand qu'un cadrant : l'angle opposé est plus grand qu'un angle droit, et la somme de cet angle avec l'angle droit du triangle est déjà supérieure à deux droits.

Si ABC est un triangle, rectangle en A, dont les côtés AB AC sont moindres qu'un cadrant, soit D le milieu de BC et soit D_1 le pied du grand-arc perpendiculaire de D à BA. Sur le cercle DD_1 que l'on porte $DD_2 = DD_1$. Les deux triangles BDD_1, CDD_2 sont égaux, ayant les angles en D et les côtés qui les forment égaux : donc l'angle CD_2D est droit et le cercle CD_2 passe par les pôles de DD_1. Soit P le pôle qui est, par rapport à D_1, du même côté que B : PA sera plus grand qu'un cadrant et par suite PCA obtus. Mais PCB = CBA; donc CBA + BCA + CAB > 2 angles droits.

Tout triangle ABC a au moins deux angles de même espèce (obtus ou aigus) : soient A et B. Le demi-grand-cercle passant

par C et perpendiculaire à AB, est divisé par C en deux arcs dont l'un (plus grand ou plus petit qu'un cadrant selon que A et B sont obtus ou aigus) est alors intérieur à A et à B et par suite au triangle. Il décomposera le triangle en deux triangles rectangles; dans chacun la somme des angles est supérieure à deux droits; il s'ensuit que dans *tout triangle sphérique la somme des trois angles est supérieure à deux angles droits.*

En décomposant un polygone sphérique en triangles on étend la proposition aux polygones, de la manière connue.

2. En appliquant la proposition au triangle polaire d'un triangle donné on déduit que *la somme des trois côtés d'un triangle sphérique est inférieure à quatre angles droits.* Si alors ABC est un triangle sphérique, et A' est le point opposé de A, de la relation

$$A'B + A'C + BC < 4 \text{ angles droits},$$

on tire que

$$BC < AB + AC,$$

c'est-à-dire que *dans un triangle un côté est plus petit que la somme des deux autres.* Les théorèmes sur les relations entre les côtés et les angles opposés, sur les arcs perpendiculaires et obliques d'un point à un grand-cercle, etc., se démontrent alors suivant les méthodes ordinaires. Nous rappelons, en particulier, l'observation suivante que nous devons appliquer: Soient AB, AC deux arcs, égaux ou moindres qu'un cadrant, et formant entr'eux un angle aigu. Soit P le pôle de AB du côté de AC, et supposons que PB passe par C, soit PC_1B_1 un grand-arc, qui rencontre AB et AC en B_1 et C_1 respectivement. On a $PB_1 = PB = 1$ cadrant, $PC_1 > PC$; donc $B_1C_1 < BC$; c'est-à-dire : *dans un triangle rectangle dont les côtés sont moindres qu'un cadrant et dont un angle aigu est invariable, les trois côtés croissent et décroissent ensemble.*

3. Nous appelons AIRE D'UN POLYGONE *l'arc équatorial d'un fuseau dont l'angle soit égal à la différence entre la somme*

des angles du polygone et autant de fois deux angles droits qu'il a de côtés, moins deux [1].

Si l'on divise un côté d'un polygone en deux par un point, et on considère ce point comme sommet d'un angle égal à deux droits, l'aire du polygone reste inaltérée. Si deux polygones s'adaptent l'un à l'autre le long d'une ligne brisée formée de k côtés, k-1 sommets intérieurs et 2 sommets extrêmes (si sur l'un des polygones un de ces sommets est un point d'un côté, on le considérera comme sommet d'un angle du polygone égal à deux droits), leur ensemble est un nouveau polygone qui a autant de côtés que la somme des nombres des côtés des deux polygones donnés diminuée de 2k, et dans lequel la somme des angles est égale à la somme des angles de ces polygones diminuée de $2(k-1) \times 2$ droits. Il s'ensuit que l'aire du polygone total est la somme des aires des deux polygones. De là, *si un polygone est décomposé d'une manière quelconque en polygones partiels, son aire est égale à la somme des aires de ces polygones.*

4. Considérons sur la sphère un cercle de centre O ; soit ABC... un polygone régulier inscrit (fig. 1) et MN... le polygone circonscrit qui touche la circonférence en A, B, C,... Soient A_1, B_1,.., les points où les demi-grand-cercles partant de O et contenant A, B,... rencontrent le grand-cercle de centre O. Les arcs AB, BC,... sont plus petits, respectivement, que A_1B_1, B_1C_1,... (d'après le n° 2). Le périmètre du polygone ABC... est donc plus petit que la circonférence d'un grand cercle. Si alors on développe ce polygone le long d'un grand cercle et on transporte avec ses côtés les triangles ABM, BCN,... compris entre le polygone inscrit et le polygone circonscrit, on voit que la somme de ces triangles est toute intérieure à deux fuseaux ayant l'angle égal à MAB. La somme des aires de ces triangles est donc inférieure à la somme des aires de ces fuseaux, c'est-à-dire à quatre fois l'arc équatorial de l'un d'eux.

---

[1] Nous évitons ainsi la question de l'équivalence entre le polygone et le fuseau au point de vue de la composition par réunion de parties égales. Cette question a d'ailleurs déjà été résolue fort élégamment par l'affirmative par M. GÉRARD. V. Thèse : *Sur la géométrie non-euclidienne*, p. 105, et NIEWENGLOWSKI et GÉRARD : *Géométrie dans l'espace*, p. 239.

Que l'on observe maintenant que MAB + BAO = 1 angle droit, tandis que, dans le triangle rectangle AOM_1, BAO + AOM > 1 angle droit; il résulte MAB < AOM. Si donc on fait augmenter suffisamment le nombre des côtés du polygone ABC..., on peut rendre l'angle MAB plus petit que tout angle assigné et par suite la somme des aires des triangles ABM, BCN,... plus petite que toute aire assignée.

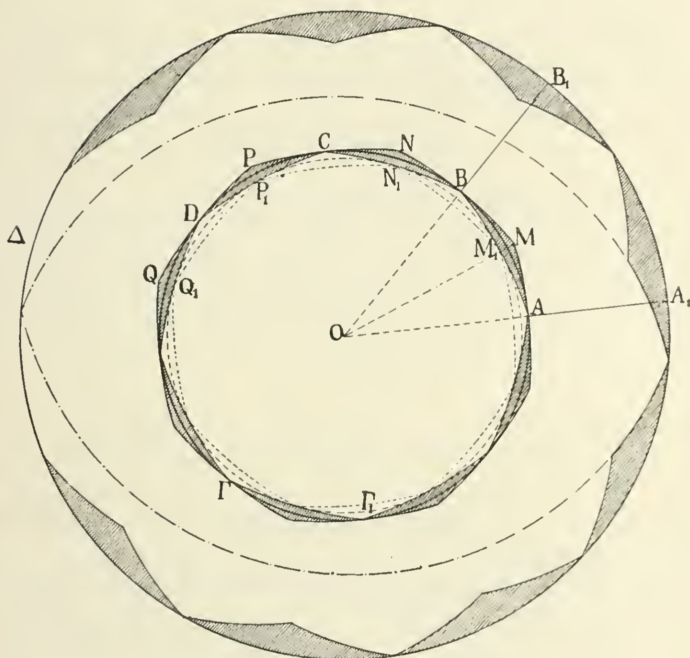


Fig. 1.

Il s'ensuit que les aires des polygones réguliers inscrits dans le cercle croissant avec le nombre des côtés, et les aires des polygones circonscrits décroissant en même temps, tendent vers une limite commune : nous l'appellerons *l'aire de la calotte limitée par le cercle.* La différence entre la circonférence de grand cercle et cette limite sera *l'aire de la zone comprise entre le cercle donné et le grand-cercle de même pôle.* Elle est la limite commune à la somme des aires

des quadrilatères tels que ABB_1A_1 et à la somme des aires des pentagones tels que $AMBB_1A_1$.

5. Formons la figure polaire de celle du numéro précédent. Nous obtenons un cercle de centre O, ayant pour rayon le complément du rayon du cercle donné, et un système de polygones réguliers inscrits et circonscrits à celui-ci. Le périmètre de chacun de ces polygones est la différence entre une circonférence de grand-cercle et l'aire du polygone polaire. Les conclusions du numéro précédent montrent alors que *les périmètres des polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle tendent vers une limite commune lorsque le nombre de leurs côtés croît indéfiniment.* Il est naturel d'appeler cette limite la *longueur de la circonférence* du cercle considéré : elle est égale à la différence entre la circonférence de grand-cercle et l'aire de la calotte limitée par le cercle polaire ; donc (d'après le n° 4) *la longueur d'une circonférence est égale à l'aire de la zone comprise entre le cercle polaire et le grand-cercle ayant même centre*[1].

II. *Trigonométrie sphérique et goniométrie.*

6. Si ρ est un arc de grand-cercle *on appelle* $\sin \rho$ *la longueur de la circonférence*[2] *de rayon* ρ.

Le sinus d'un arc est une fonction croissante et continue de cet arc. Rappelons en effet (n° 5) que $\sin \rho$ représente aussi l'aire d'une zone qui a pour base un grand-cercle et pour hauteur ρ ; on déduit immédiatement qu'il est une fonction croissante de ρ. Soit Γ la base mineure de la zone ; considérons le polygone régulier ABC... inscrit dans Γ (fig. 1), le cercle Γ_1 inscrit dans ce polygone et le polygone M_1N_1... inscrit dans Γ_1, dont les sommets sont les points de contact de Γ_1

---

[1] A comparer avec le théorème connu, de la proportionalité entre les zones et leur hauteur.

[2] On doit remarquer qu'il n'a été dit nulle part quel était le rayon de la sphère ; on a dit seulement qu'on opérait sur une sphère fixe. Quand on reste dans l'hypothèse euclidienne, que l'on prenne la longueur de ce rayon égale à $\frac{1}{2\pi}$, et l'on aura l'accord complet entre notre définition du sinus et l'ordinaire.

avec ABC... La différence entre la zone considérée de hauteur ρ et la zone limitée par Γ_1 et le même grand-cercle est la zone comprise entre Γ et Γ_1 et est moindre que la différence entre les aires des polygones MNP..., $M_1N_1P_1$... l'un circonscrit à Γ, l'autre inscrit dans Γ_1. Cette différence est la somme des triangles ABM, BCN,..., M_1N_1B, M_1P_1C,... et on voit, comme au n° 4, qu'elle devient aussi petite que l'on veut si l'on augmente suffisamment le nombre des côtés de ABC...

La différence entre les aires de deux zones de hauteurs ρ et $\rho + \Delta\rho$ peut donc devenir aussi petite que l'on veut ; de là, et de l'observation que $\sin\rho$ est une fonction croissante, on déduit qu'elle est aussi continue.

7. Soit Γ un cercle de centre O, Δ le grand-cercle concentrique, γ le cercle polaire de Γ, ρ la hauteur de la zone $(\Gamma\Delta)$. Appelons, comme d'usage, $\frac{\pi}{2}$ le cadrant ; la hauteur de la zone $(\gamma\Delta)$ est $\frac{\pi}{2}-\rho$. Soit Γ_1, un cercle de centre O et de rayon $\frac{\pi}{2}-(\rho+\partial\rho)$ de sorte que la zone $(\Gamma_1\Delta)$ ait la hauteur $\rho + \partial\rho$ et soit γ_1 le cercle polaire de Γ_1. Nous voulons comparer la différence des aires des zones $(\Gamma\Delta)$, $(\Gamma_1\Delta)$ avec celle des zones $(\gamma\Delta)$, $(\gamma_1\Delta)$, c'est-à-dire les aires des zones $(\Gamma\Gamma_1)$, $(\gamma\gamma_1)$.

Ces deux zones ont même hauteur $\partial\rho$. Circonscrivons à Γ et à Γ_1 deux polygones réguliers, de même nombre de côtés, et ayant les sommets sur les mêmes grands-arcs passant par O. Nous pouvons supposer les côtés de ces polygones si petits que : 1° les aires comprises entre Δ et ces polygones soient approximées autant que l'on veut aux aires des deux zones $(\Gamma\Delta)$ $(\Gamma_1\Delta)$, et par conséquent l'aire comprise entre les polygones aussi peu différente que l'on veut de l'aire de la zone $(\Gamma\Gamma_1)$; 2° si l'on circonscrit à γ un polygone dont tous les côtés, sauf un au plus, soient égaux aux côtés du polygone circonscrit à Γ, et à γ_1 le polygone qui a les sommets sur les mêmes rayons par O que le précédent, l'aire comprise entre les deux polygones diffère encore aussi peu que l'on veut de l'aire de la zone $(\gamma\gamma_1)$, même si on néglige la partie comprise entre les deux côtés différents et les arcs passant par O et

par leurs sommets. Les rayons sortant de O et passant par les sommets des deux figures polygonales qu'on substitue ainsi aux zones $(\Gamma\Gamma_1)$, $(\gamma\gamma_1)$ les décomposent en trapèzes isoscèles, tous de même hauteur $\delta\rho$, et avec une base égale; l'autre base est plus grande que celle-ci pour les trapèzes relatifs à $(\gamma\gamma_1)$, plus petite pour les trapèzes relatifs à $(\Gamma\Gamma_1)$. Si donc on pense que l'on transporte chaque trapèze relatif à $(\Gamma\Gamma_1)$ sur un trapèze relatif à $(\gamma\gamma_1)$ on voit que *le rapport entre les aires des deux figures polygonales relatives à* $(\Gamma\Gamma_1)$ *et à* $(\gamma\gamma_1)$ *est plus petit que le rapport des longueurs des périmètres des polygones circonscrits à* Γ *et à* γ.

On peut répéter les mêmes considérations en choisissant les côtés du polygone circonscrit à γ_1 égaux aux côtés du polygone circonscrit à Γ_1; alors ce sont les trapèzes relatifs à la zone $(\Gamma\Gamma_1)$ qui sont plus grands que les trapèzes relatifs à la zone $(\gamma\gamma_1)$ et par suite *le rapport entre les aires des deux figures polygonales relatives à* $(\Gamma\Gamma_1)$ *et à* $(\gamma\gamma_1)$ *est plus grand que le rapport des longueurs des périmètres des polygones circonscrits à* Γ_1 *et à* γ_1.

Faisons croître indéfiniment le nombre des côtés des polygones considérés; nous aurons à la limite que *le rapport entre les aires des deux zones* $(\Gamma\Gamma_1)$, $(\gamma\gamma_1)$ *est compris entre le rapport des longueurs des circonférences* Γ, γ *et le rapport des longueurs des circonférences* Γ_1, γ_1.

Supposons enfin que $\delta\rho$ diminue indéfiniment; à cause de la continuité du sinus (n° 6) les longueurs de Γ_1, γ_1 tendent vers les longueurs de Γ, γ; on a donc à la limite

$$\lim_{\delta\rho = 0} \frac{\text{aire}\,(\Gamma\Gamma_1)}{\text{aire}\,(\gamma\gamma_1)} = \frac{\text{long.}\,\Gamma}{\text{long.}\,\gamma} = \frac{\text{aire}\,(\gamma\Delta)}{\text{aire}\,(\Gamma\Delta)},$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\delta\rho = 0} \frac{\delta\,\text{aire}\,(\Gamma\Delta)}{\delta\,\text{aire}\,(\gamma\Delta)} = \frac{\text{aire}\,(\gamma\Delta)}{\text{aire}\,(\Gamma\Delta)},$$

ou bien encore

$$\lim_{\delta\rho = 0} \frac{\delta \sin \rho}{\delta \sin\left(\frac{\pi}{2} - \rho\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \rho\right)}{\sin \rho}.$$

Si donc x et y sont les sinus de deux arcs complémentaires, ils satisfont à l'équation différentielle

$$\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right| = \frac{y}{x},$$

On détermine mieux cette équation quand on observe que x décroît lorsque y croît ; donc

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x}.$$

ou bien

$$x\partial x + y\partial y = 0$$

et, en intégrant,

$$x^2 + y^2 = \text{const.}$$

On détermine la constante en considérant le cas de $\rho = \pi$. Alors Γ se réduit à O, γ coïncide avec Δ et l'on voit que la constante vaut 1.

$$x^2 + y^2 = 1.$$

C'est la formule fondamentale

$$\sin^2\rho + \cos^2\rho = 1. \qquad (1)$$

8. Soit encore Γ un cercle de centre O, Δ le grand-cercle concentrique, et soit Γ_1 un cercle de centre O intérieur à la zone $(\Gamma\Delta)$ (fig. 2). Soit MNP... un polygone régulier circonscrit à Γ, ABC... ses points de contact. Prolongeons les arcs AM, MBN, NCP,... tous du même côté jusqu'à la rencontre de Δ, respectivement en A_1, B_1, C_1,... et de Γ_1 en A_2, B_2, C_2,... L'aire de la zone $(\Gamma\Delta)$ est, d'après le nº 4, la limite de la somme des triangles MA_1B_1, NB_1C_1,... lorsque le nombre des côtés du polygone croît indéfiniment : d'autre côté l'aire de la zone $(\Gamma_1\Delta)$ est la somme des aires $A_2A_1B_1B_2$, $B_2B_1C_1C_2$,...

Avec les points M, N, P,... comme centres décrivons les arcs $B_2A'_2$, $C_2B'_2$,... et les arcs $A_1B'_1$, $B_1C'_1$,... ; observons que toutes les figures contenues dans les triangles MA_1B_1, NB_1C_1,... sont égales entre elles ; nous obtenons

$$\frac{\text{aire}\,(MNP\ldots,\Delta)}{\text{aire}\,(\Gamma_1,\Delta)} < \frac{\text{aire}\,(MA_1B'_1)}{\text{aire}\,(A'_2A_1B'_1B_2)} = \frac{\Sigma\ \text{aire}\,(MA_1B'_1)}{\Sigma\ \text{aire}\,(A'_2A_1B'_1B_2)}.$$

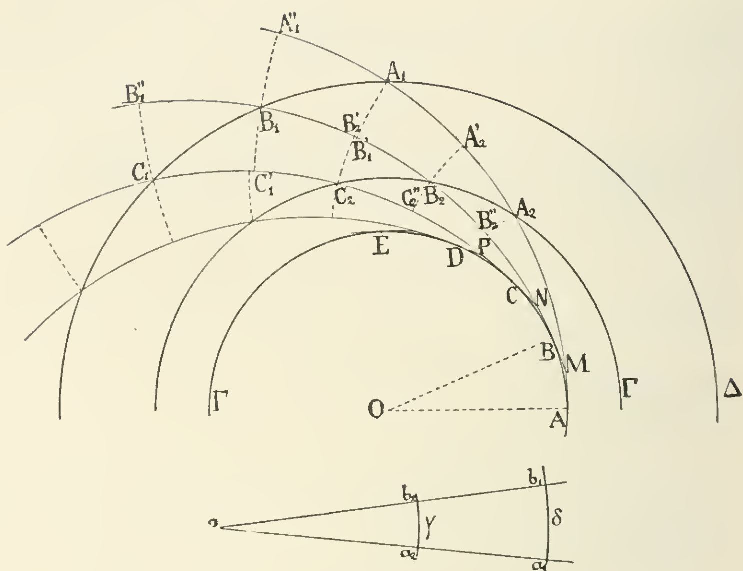


Fig. 2.

Avec les mêmes centres décrivons les arcs $A_2B''_2$, $B_2C''_2$.... et les arcs $B_1A''_1$, $C_1B''_1$... ; nous obtenons de même

$$\frac{\text{aire }(\text{MNP}\ldots,\Delta)}{\text{aire }(\Gamma_1,\Delta)} > \frac{\text{aire }(\text{MA}''_1\text{B}_1)}{\text{aire }(\text{A}_2\text{A}''_1\text{B}_1\text{B}''_2)} = \frac{\Sigma\text{ aire }(\text{MA}''_1\text{B}_1)}{\Sigma\text{ aire }(\text{A}_2\text{A}''_1\text{B}_1\text{B}''_2)}.$$

Les seconds membres de ces inégalités ont même limite lorsque le nombre des côtés du polygone croît indéfiniment : en effet, l'angle A_1MB_1 a pour mesure l'arc qu'on doit enlever à l'arc équatorial de AOB pour avoir l'aire du quadrilatère AOBM. Il est donc $<$ AOB et par suite la somme des aires $A_2A'_2B_2B''_2$, est plus petite que la zone dont les deux bases ont pour rayons MA_2 et MB_2 et dont la hauteur est 2 AM. Elle tend donc à zéro avec cette hauteur (n° 6); de même la somme des aires $A_1A''_1B_1B''_1$ tend vers 0.

Alors

$$\frac{\text{aire }(\Gamma,\Delta)}{\text{aire }(\Gamma_1,\Delta)} = \lim \frac{\text{aire }(\text{MA}_1\text{B}'_1)}{\text{aire }(\text{A}'_2\text{A}_1\text{B}'_1\text{B}_2)} = \lim \frac{\text{aire }(\text{MA}''_1\text{B}_1)}{\text{aire }(\text{A}_2\text{A}''_1\text{B}_1\text{B}''_2)}.$$

Remarquons que AA_1, BB_1.... sont égaux chacun à un ca-

drant ; considérons alors la figure constituée d'un grand-cercle δ et d'un cercle concentrique γ de rayon AA_2 : pour plus d'évidence considérons de cette figure seulement la partie comprise entre deux rayons formant un angle égal à A_1MB_1 : soit $oa_1b_1a_2b_2$: on voit immédiatement que

$$\frac{\text{aire } (MA_1B'_1)}{\text{aire } (A'_2A_1B'_1B_2)} > \frac{\text{aire } (oa_1b_1)}{\text{aire } (a_2a_1b_1b_2)} > \frac{\text{aire } (MA''_1B_1)}{\text{aire } (A_2A''_1B_1B''_2)} .$$

Or

$$\frac{\text{aire } (oa_1b_1)}{\text{aire } (a_2a_1b_1b_2)} = \frac{\text{aire hémisphère}}{\text{aire } (\gamma\delta)} = \frac{1}{\text{aire } (\gamma\delta)} .$$

Donc enfin, en rapprochant ces égalités des précédentes :

$$\frac{\text{aire } (\Gamma\Delta)}{\text{aire } (\Gamma_1\Delta)} = \frac{1}{\text{aire } (\gamma\delta)} .$$

Appelons ρ la hauteur de $(\Gamma\Delta)$, ρ_1 celle de $(\Gamma_1\Delta)$; cette égalité peut s'écrire

$$\frac{\sin \rho}{\sin \rho_1} = \frac{1}{\sin A_1A_2} .$$

9. Soit ABC un triangle rectangle (fig. 3), C son angle droit; soit Δ le grand-cercle de centre A, et soient Γ, Γ_1 les cercles de centre A passant par C et par B. Appelons a, b, c les côtés du triangle, opposés aux sommets A, B, C. Nous pouvons appliquer la formule précédente, où ρ, ρ_1 et A_1A_2 auront respectivement les valeurs $\frac{\pi}{2} - b$, $\frac{\pi}{2} - c$, $\frac{\pi}{2} - a$;

donc $$\frac{\cos b}{\cos c} = \frac{1}{\cos a} .$$

ou bien

$$\cos c = \cos a \cos b . \qquad (2)$$

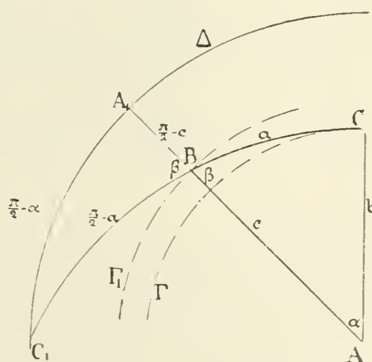


Fig. 3.

C'est la formule fondamentale pour les triangles rectangles.

Soient A_1 et C_1 les points de rencontre avec Δ des demi grands-cercles qui projettent B de A et de C ; appelons α' β les mesures des angles A et B dans le triangle ABC ; dans le triangle A_1BC_1 on a :

$$A_1C_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha,\ A_1B = \frac{\pi}{2} - c,\ BC_1 = \frac{\pi}{2} - a,\ \text{angle } B = \beta.$$

En appliquant la formule (2) à ce triangle on obtient donc

$$\sin a = \sin c \sin \alpha, \qquad (3)$$

et,en appliquant au même triangle cette nouvelle formule (3),

$$\cos \alpha = \cos a \sin \beta. \qquad (4)$$

Dans les formules (2) (3) (4) se résume toute la trigonométrie des triangles rectangles. D'après des procédés connus on en tire encore toute entière la trigonométrie sphérique, pourvu que l'on possède la formule pour la somme des arcs. C'est cette formule que nous allons maintenant nous procurer.

10. Il est connu qu'il suffit de l'établir dans l'hypothèse que la somme des arcs soit $< \frac{\pi}{2}$. Soit alors ABC un triangle rectangle en C et soit CD sa hauteur (fig. 4). Posons $AD = a$, $BD = b$, $AC = m$, $BC = n$, $CAB = \alpha$, $CBA = \beta$, $ACD = \gamma$ et, par conséquence, $BCD = \frac{\pi}{2} - \gamma$. En appliquant les formules (3) et (4) aux triangles ABC, ACD, BCD, on obtient

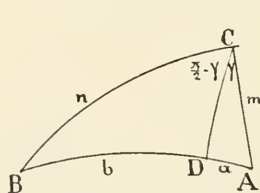


Fig. 4.

$$\sin(a+b) = \frac{\sin n}{\sin \alpha} = \frac{\sin m}{\sin \beta},$$

$$\sin a = \sin m \sin \gamma, \qquad \sin b = \sin n \cos \gamma$$

$$\cos a = \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha}, \qquad \cos b = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta};$$

d'où

$$\sin a \cos b = \frac{\sin m}{\sin \beta} \sin^2\gamma = \sin(a+b) \sin^2\gamma$$

$$\sin b \cos a = \frac{\sin n}{\sin \alpha} \cos^2\gamma = \sin(a+b) \cos^2\gamma$$

et, à cause de la formule (1),

$$\sin a \cos b + \sin b \cos a = \sin(a+b). \qquad (5)$$

C'est la formule pour la somme des arcs : afin que sa démonstration soit généralement valable, il suffit de remarquer que, par suite de la continuité du sinus (n° 6), il existe toujours un triangle rectangle dans lequel la hauteur abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse divise celle-ci en deux segments donnés (dont la somme soit $< \frac{\pi}{2}$). Des formules du triangle rectangle, en effet, on tire aisément que, les lettres conservant les mêmes significations que ci-dessus, on a, dans le triangle rectangle ABC,

$$\text{tg AD} = \text{tg AB} \cos^2\alpha.$$

Or de la continuité du sinus il suit immédiatement aussi la continuité de la tangente et du cosinus : si donc AB restant constant, on fait croître avec continuité α de 0 à $\frac{\pi}{2}$, AD variera avec continuité entre AB et 0 et passera par toute valeur, arbitrairement assignée, de $a <$ AB.

Beppo Levi (Plaisance, Italie).

P. S. — Cet article fut envoyé à la rédaction en août 1904. Tout récemment a paru dans les *Mathematischen Annalen* (Bd. 60) une note de M. Dehn où l'auteur donne une démonstration nouvelle de l'équivalence par réunion de parties égales des polygones ayant même excès sphérique, indépendamment du postulatum de la continuité.

A cette occasion je donne encore quelques autres références bibliographiques, dont je n'ai eu connaissance qu'après avoir corrigé les épreuves de l'article. Dans les *Collectanea* de M. Enriques :

Questioni che riguardano la geometria elementare, M. Bonola donne aussi une démonstration de la proposition que la somme des angles d'un triangle sphérique est plus grande que deux angles droits, en ayant cependant recours à la notion extensive de l'aire du triangle, qu'il est certainement utile d'éviter. Au contraire, dès le 1895, M. Mansion a donné, dans un supplément de *Mathesis*, une construction de la Géométrie et de la Trigonométrie sphériques, indépendante des hypothèses sur les droites parallèles et sur l'infinité de la droite. Si l'on confronte avec celle-ci la nouvelle construction on verra, je l'espère, que l'intérêt méthodologique n'est nullement diminué.

Plaisance, 12 Février 1905.

LES COORDONNÉES PROJECTIVES SUR LA SPHÈRE

1. Des coordonnées sphériques non-homogènes ont été introduites par C. Gudermann [1], qui, pour déterminer la position d'un point M par rapport à un triangle sphérique VXY dont deux côtés VX et VY sont droits, mène par le point en question les droites sphériques XM et YM. La première rencontre le côté VY en Q, la seconde rencontre le côté VX en P. Ce sont les tangentes trigonométriques des arcs VQ et VP, qu'il considère comme les coordonnées du point M *(Axenkoordinate)*. Quelquefois il emploie aussi un système de coordonnées polaires : l'arc VM et l'angle XVM, qu'il appelle les coordonnées centrales du point M *(Centralkoordinate)*. Les problèmes ordinaires de la droite, des coniques, de la cycloïde et de la chaînette sphériques qui sont traités dans ces systèmes de coordonnées donnent lieu à des déductions et des formules d'une extrême longueur, ce qui explique suffisamment l'oubli dans lequel les recherches de Gudermann sont tombées.

[1] C. Gudermann. *Grundriss der analytischen Sphärik.* Köln, 1830.

Indépendamment de lui, un géomètre anglais, Ch. Graves[1], arrivait, quelques années plus tard, aux mêmes systèmes de coordonnées. Pour l'emploi des coordonnées polaires sphériques il avait été devancé par son compatriote S. T. Davies[2].

On doit à Möbius[3] un premier essai d'introduire un système de coordonnées homogènes sur la sphère. Il y arrive en étendant à cette surface le calcul barycentrique, et voici comment il procède. Si A, B, C sont trois points de la sphère, on peut, pour tout autre point Q de la surface sphérique, trouver des nombres a, b, c tels que

$$a \cos \mathrm{VA} + b \cos \mathrm{VB} + c \cos \mathrm{VC} = q \cos \mathrm{VQ} \quad ,$$

le point V étant un point de la sphère tout à fait quelconque. Pour arriver à une sphérique analytique, nous voulons, dit Möbius, par abréviation, laisser de côté les signes *cos* et V et écrire, au lieu de l'équation précédente :

$$a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C} = q\mathrm{Q} \quad .$$

Les coefficients a, b, c sont alors les coordonnées homogènes du point Q, et Möbius démontre ensuite que cette manière de traiter analytiquement la surface sphérique est au calcul barycentrique comme la sphérique est à la planimétrie. Le centre de gravité des poids a, b, c en A, B, C ne sera pas dans la surface sphérique, mais on peut ajouter au centre de la sphère M un poids m, tel qu'il est ramené au point de la sphère $a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C}$.

G. Salmon[4], procédant autrement, arrive à des meilleurs résultats. Si l'on substitue les coordonnées d'un point P de la sphère dans le premier membre de l'équation normale $\alpha = 0$ d'un plan passant par l'origine (qui est en même temps le centre de la sphère), on obtient la normale abaissée du

---

[1] *Two geometrical Memoirs on the general properties of cones of the second degree and of the spherical conics by M. Chasles, translated from the french, with notes and additions, and an appendix on the application of analysis to spherical Geometry,* by the Rev. Charles Graves. Dublin, 1841.

[2] Transactions of the Royal Society of Edenburgh, Vol. XII.

[3] Möbius. *Gesammelte Werke,* II^ter Band. S. 1-54.

[4] Salmon-Fiedler. *Analytische Geometrie des Raumes,* I. Teil, 3. Auflage. X. Kapitel.

point P sur le plan $\alpha = 0$ ou encore le sinus de l'arc sphérique compris entre P et le grand cercle déterminé sur la sphère par le plan. Les valeurs α, β, γ qu'il obtient ainsi pour trois plans différents passant par le centre sont les coordonnées du point P par rapport au triangle sphérique que ces trois plans déterminent sur la sphère.

Nous allons développer un système de coordonnées projectives sphériques, qui permet de passer de deux manières différentes aux cas spéciaux des coordonnées projectives planes et aux coordonnées cartésiennes. Le traitement des problèmes sphériques, dans ce système de coordonnées, se trouvera être plus simple et plus symétrique que celui des problèmes analogues pour le plan, et il ne nécessitera nulle part l'intervention de la connaissance des coordonnées cartésiennes. Sous ce rapport, l'exposition ordinaire des coordonnées projectives, qui présuppose déjà la connaissance de ce qui en est un cas spécial, laisse certainement à désirer.

Nous nous servons, dans l'exposition des éléments de la sphérique analytique qui va suivre, de quelques relations très simples du calcul des vecteurs qui se trouvent dans un article de *L'Enseign. Mathématique* (mars 1902, p. 111-113).

2. Le rayon de la sphère étant l'unité, chaque *point* de sa surface est déterminé par un vecteur-unité $\mathbf{r}$ partant du centre. Chaque multiple positif de ce vecteur détermine le même point; chaque multiple négatif détermine le point diamétralement opposé.

Une *droite* sphérique, son sens positif étant fixé, est déterminée par un vecteur-unité $\mathbf{l}$ partant du centre, normal au plan de la droite sphérique, et à gauche lorsque celle-ci est parcourue dans le sens positif. Un multiple négatif de $\mathbf{l}$ détermine la même droite parcourue dans le sens inverse.

3. Le triangle sphérique $\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3$ a les angles extérieurs A_1, A_2, A_3 ou A_{23}, A_{31}, A_{12}, les côtés a_1, a_2, a_3 ou a_{23}, a_{31}, a_{12} et les hauteurs h_1, h_2, h_3. Si, en parcourant les côtés dans le sens indiqué par les flèches, on prend les vecteurs $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_3$

des droites à gauche, on obtient le triangle polaire dont les angles extérieurs sont a_{23}, a_{31}, a_{12} et les côtés A_{23}, A_{31}, A_{12}.

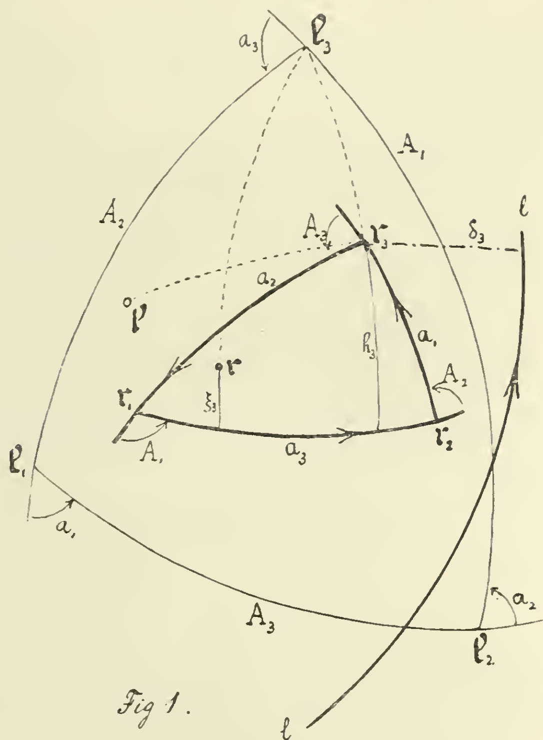


Fig 1.

Les propriétés des produits scalaires nous donnent d'abord les relations suivantes entre les vecteurs des sommets $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ et ceux des côtés $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_3$ du triangle sphérique

$$(1) \begin{cases} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k = \cos a_{ik} \\ \mathbf{l}_i \mathbf{l}_k = \cos A_{ik} \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i \equiv \mathbf{r}_i^2 = 1 \\ \mathbf{l}_i \mathbf{l}_i \equiv \mathbf{l}_i^2 = 1 \end{cases} \qquad (3) \begin{cases} \mathbf{l}_i \mathbf{r}_i = \sin h_i \\ \mathbf{l}_i \mathbf{r}_k = 0 \end{cases} ;$$

tandis que celles des produits vectoriels nous fournissent les égalités :

$$(4) \quad V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 = \sin a_1 . \mathbf{l}_1 \qquad V\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1 = \sin a_2 . \mathbf{l}_2 \qquad V\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = \sin a_3 . \mathbf{l}_3$$

$$(5) \quad V\mathbf{l}_2\mathbf{l}_3 = \sin A_1 . \mathbf{r}_1 \qquad V\mathbf{l}_3\mathbf{l}_1 = \sin A_2 . \mathbf{r}_2 \qquad V\mathbf{l}_1\mathbf{l}_2 = \sin A_3 . \mathbf{r}_3 .$$

Les deux premières des équations (4) et (5) nous donnent ensuite :

$$\mathrm{V}\mathrm{r}_2\mathrm{r}_3 \,.\, \mathrm{V}\mathrm{r}_3\mathrm{r}_1 = \sin a_1 \sin a_2 \,.\, \mathrm{l}_1\mathrm{l}_2$$

$$\mathrm{V}\mathrm{l}_2\mathrm{l}_3 \,.\, \mathrm{V}\mathrm{l}_3\mathrm{l}_1 = \sin A_1 \sin A_2 \,.\, \mathrm{r}_1\mathrm{r}_2 \quad ,$$

qui, pouvant s'écrire

$$\mathrm{r}_2\mathrm{r}_3 \,.\, \mathrm{r}_3\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2\mathrm{r}_1 = \sin a_1 \sin a_2 \,.\, \mathrm{l}_1\mathrm{l}_2$$

$$\mathrm{l}_2\mathrm{l}_3 \,.\, \mathrm{l}_3\mathrm{l}_1 - \mathrm{l}_2\mathrm{l}_1 = \sin A_1 \sin A_2 \,.\, \mathrm{r}_1\mathrm{r}_2 \quad ,$$

sont les formules fondamentales de la trigonométrie sphérique :

$$\cos a_1 \cos a_2 - \cos a_3 = \sin a_1 \sin a_2 \cos A_3$$

$$\cos A_1 \cos A_2 - \cos A_3 = \sin A_1 \sin A_2 \cos a_3 \quad .$$

En outre, la multiplication scalaire des équations (4) par $\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3$ donne

(6) $$\sin a_1 \sin h_1 = \sin a_2 \sin h_2 = \sin a_3 \sin h_3 \quad ;$$

de même celle des équations (5) par $\mathrm{l}_1, \mathrm{l}_2, \mathrm{l}_3$

(7) $$\sin A_1 \sin h_1 = \sin A_2 \sin h_2 = \sin A_3 \sin h_3 \quad ;$$

d'où nous tirons encore

(8) $$\sin a_1 : \sin a_2 : \sin a_3 = \sin A_1 : \sin A_2 : \sin A_3 \quad .$$

4. Le vecteur d'un point, qui en général n'est pas un vecteur-unité et que nous écrirons donc $x_4\mathrm{r}$, décomposé d'après les trois vecteurs non-coplanaires, qui déterminent les sommets du triangle de référence, donne

$$x_4\mathrm{r} = m_1\mathrm{r}_1 + m_2\mathrm{r}_2 + m_3\mathrm{r}_3$$

ou, si nous introduisons trois constantes μ_i différentes de zéro

$$x_4\mathrm{r} = \mu_1 x_1\mathrm{r}_1 + \mu_2 x_2\mathrm{r}_2 + \mu_3 x_3\mathrm{r}_3 \quad .$$

Le vecteur d'une droite, qui en général n'est pas un vecteur-unité et que nous écrirons donc $u_4\mathrm{l}$, décomposé d'après les trois vecteurs non-coplanaires correspondant aux sommets du triangle polaire, donne

$$u_4\mathrm{l} = n_1\mathrm{l}_1 + n_2\mathrm{l}_2 + n_3\mathrm{l}_3$$

ou, si nous introduisons trois constantes ν_i différentes de zéro

$$u_4\mathrm{l} = \nu_1 u_1\mathrm{l}_1 + \nu_2 u_2\mathrm{l}_2 + \nu_3 u_3\mathrm{l}_3 \quad .$$

Les coefficients x_1, x_2, x_3 *sont les coordonnées du point*, tandis que le point

$$\mu_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 \mathbf{r}_2 + \mu_3 \mathbf{r}_3 \quad ,$$

dont les coordonnées sont égales à l'unité, est le *point-unité*.

5. *Equation d'une droite.* Pour que le point

$$\mu_1 x_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathbf{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathbf{r}_3$$

soit sur la droite donnée

$$\nu_1 v_1 \mathbf{l}_1 + \nu_2 v_2 \mathbf{l}_2 + \nu_3 v_3 \mathbf{l}_3 \quad ,$$

il faut et il suffit que la distance sphérique de ces deux vecteurs soit $\frac{\pi}{2}$, ou que leur produit scalaire

$$\mu_1 \nu_1 \sin h_1 . v_1 x_1 + \mu_2 \nu_2 \sin h_2 . v_2 x_2 + \mu_3 \nu_3 \sin h_3 . v_3 x_3$$

soit nul.

Les coefficients u_1, u_2, u_3 *sont les coordonnées de la droite*, tandis que la droite

$$\nu_1 \mathbf{l}_1 + \nu_2 \mathbf{l}_2 + \nu_3 \mathbf{l}_3 \quad ,$$

dont les coordonnées sont égales à l'unité, est la *droite-unité*.

Equation d'un point. Pour que la droite

$$\nu_1 u_1 \mathbf{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathbf{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathbf{l}_1$$

passe par le point donné

$$\mu_1 y_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 y_2 \mathbf{r}_2 + \mu_3 y_3 \mathbf{r}_3 \quad ,$$

il faut et il suffit que la distance sphérique de ces deux vecteurs soit $\frac{\pi}{2}$, ou que leur produit scalaire

$$\nu_1 \mu_1 \sin h_1 . y_1 u_1 + \nu_2 \mu_2 \sin h_2 . y_2 u_2 + \nu_3 \mu_3 \sin h_3 . y_3 u_3$$

soit nul.

Ces conditions se simplifient considérablement si nous choisissons les constantes μ_i et ν_i de manière à ce que

$$(9) \qquad \mu_1 \nu_1 \sin h_1 = \mu_2 \nu_2 \sin h_2 = \mu_3 \nu_3 \sin h_2 \equiv \Delta \quad .$$

Dans ce cas l'équation de la droite devient en coordonnées ponctuelles sphériques

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0 \quad ,$$

et celle du point en coordonnées tangentielles sphériques

$$y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3 = 0 \quad .$$

L'équation de la droite-unité est

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

et celle du point-unité

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0 \quad .$$

6. Le tenseur x_4 du point

$$x_4 \mathbf{r} = \mu_1 x_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathbf{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathbf{r}_3$$

se trouve, en prenant le carré :

$$x_4^2 = \mu_1^2 x_1^2 + \mu_2^2 x_2^2 + \dots$$
$$2 \mu_1 \mu_2 x_1 x_2 \cos a_3 + \dots$$

Nous représentons cette forme quadratique, qui revient souvent, par

$$\omega(x_1 x_2 x_3) \quad \text{ou} \quad \omega(xx) \; .$$

Le tenseur u_4 de la droite

$$u_4 \mathbf{l} = \nu_1 u_1 \mathbf{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathbf{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathbf{l}_3$$

se trouve, en prenant le carré :

$$u_4^2 = \nu_1^2 u_1^2 + \nu_2 u_2^2 + \dots$$
$$2 \nu_1 \nu_2 u_1 u_2 \cos A_3 + \dots$$

Nous représentons cette forme quadratique, qui se rencontre souvent, par

$$\Omega(u_1 u_2 u_3) \quad \text{ou} \quad \Omega(uu) \; .$$

7. Si $\mathbf{l}_0 \mathbf{r}_1 = 0$ et $\mathbf{l}_0 \mathbf{r}_2 = 0$, c'est-à-dire si les points $P_1(\mathbf{r}_1)$ et $P_2(\mathbf{r}_2)$ sont situés sur la droite $\mathbf{l}_0$, tout point

$$P \equiv \mathbf{r}_1 - \lambda \mathbf{r}_2$$

est également sur $\mathbf{l}_0$, parce que son produit scalaire par $\mathbf{l}_0$ est nul. En outre, nous avons

$$(P_1 P_2 P) \equiv \frac{\sin \overline{P_1 P}}{\sin \overline{P_2 P}} = \lambda \; ,$$

car si τ est la valeur absolue ou le tenseur de $\mathbf{r}_1 - \lambda \mathbf{r}_2$, les propriétés du produit vectoriel nous donnent

$$| V(\mathbf{r}_1 - \lambda \mathbf{r}_2) \mathbf{r}_1 | = \lambda \, | V \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 | = \tau \sin \overline{P P_1}$$
$$\text{et} \quad | V(\mathbf{r}_1 - \lambda \mathbf{r}_2) \mathbf{r}_2 | = | V \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 | = \tau \sin \overline{P P_2} \; ;$$

donc

$$\lambda = (P_1 P_2 P) \; .$$

De même on démontre que la droite sphérique

$$p \equiv \mathbf{l}_1 - \lambda \mathbf{l}_2$$

passe par l'intersection des droites sphériques $p_1(\mathbf{l}_1)$ et $p_2(\mathbf{l}_2)$ et que

$$\lambda = (p_1 p_2 p) \; .$$

Le rapport anharmonique des points

$$\mathbf{r}_1 \, , \; \mathbf{r}_2 \, , \; \mathbf{r}_1 - \lambda \mathbf{r}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_1 - \mu \mathbf{r}_2$$

est $\lambda : \mu$, et, si l'on fait passer par ces quatre points les quatre droites sphériques concourantes

$$\mathrm{l}_1 \,,\ \mathrm{l}_2 \,,\ \mathrm{l}_1 - \lambda_0 \mathrm{l}_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{l}_1 - \mu_0 \mathrm{l}_2$$

on aura les égalités

$$\mathrm{l}_1 \mathrm{r}_1 = 0 \quad \mathrm{l}_2 \mathrm{r}_2 = 0 \quad (\mathrm{l}_1 - \lambda_0 \mathrm{l}_2)(\mathrm{r}_1 - \lambda \mathrm{r}_2) = 0 \quad (\mathrm{l}_1 - \mu_0 \mathrm{l}_2)(\mathrm{r}_1 - \mu \mathrm{r}_2) = 0 \,,$$

dont les deux dernières, simplifiées à l'aide des deux précédentes, donnent le théorème de Pappus

$$\lambda : \mu = \lambda_0 : \mu_0 \ .$$

8. Les droites joignant le point

$$P \equiv \mu_1 x_1 \mathrm{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathrm{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathrm{r}_3$$

aux sommets du triangle rencontrent les côtés opposés en

$$P_1 \equiv \mu_2 x_2 \mathrm{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathrm{r}_3 \,;$$
$$P_2 \equiv \mu_3 x_3 \mathrm{r}_3 + \mu_1 x_1 \mathrm{r}_1 \,; \quad P_3 \equiv \ldots$$

car P est aussi bien sur la droite qui relie P_1 au sommet A_1 que sur celle qui relie P_2 à A_2, etc.

Pour le point-unité

$$E \equiv \mu_1 \mathrm{r}_1 + \mu_2 \mathrm{r}_2 + \mu_3 \mathrm{r}_3$$

nous avons de même[1]

$$E_1 \equiv \mu_2 \mathrm{r}_2 + \mu_3 \mathrm{r}_3 \,;$$
$$E_2 \equiv \mu_3 \mathrm{r}_3 + \mu_1 \mathrm{r}_1 \,; \quad E_3 \equiv \ldots$$

Les points d'intersection de la droite

$$p \equiv \nu_1 u_1 \mathrm{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathrm{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathrm{l}_3$$

et des côtés du triangle déterminent avec les sommets opposés les droites

$$p_1 \equiv \nu_2 u_2 \mathrm{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathrm{l}_3 \,;$$
$$p_2 \equiv \nu_3 u_3 \mathrm{l}_3 + \nu_1 u_1 \mathrm{l}_1 \,; \quad p_3 \equiv \ldots$$

car p passe aussi bien par l'intersection de p_1 et du côté a_1 que par celle de p_2 et a_2, etc.

Pour la droite-unité

$$e \equiv \nu_1 \mathrm{l}_1 + \nu_2 \mathrm{l}_2 + \nu_3 \mathrm{l}_3$$

nous avons de même

$$e_1 \equiv \nu_2 \mathrm{l}_2 + \nu_3 \mathrm{l}_3 \,;$$
$$e_2 \equiv \nu_3 \mathrm{l}_3 + \nu_1 \mathrm{l}_1 \,; \quad e_3 \equiv \ldots$$

---

[1] Les points conjugués harmoniques $E'_1 \equiv \mu_2 \mathrm{r}_2 - \mu_3 \mathrm{r}_3$, $E'_2 \equiv \mu_3 \mathrm{r}_3 - \mu_1 \mathrm{r}_1$, $E'_3 \equiv \mu_1 \mathrm{r}_1 - \mu_2 \mathrm{r}_2$ sont sur une droite (polaire trilinéaire de E), dont l'équation — dans la supposition toutefois que les μ_i et ν_i aient été choisis tels que $\mu_i \nu_i \sin h_i$ est une constante — peut s'écrire

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \ .$$

La polaire trilinéaire du point-unité est donc, dans cette supposition, la droite-unité.

Nous en concluons, d'après § 7, que

$$(A_2 A_3 P_1) = -\frac{\mu_3 x_3}{\mu_2 x_2}$$

et $$(A_2 A_3 E_1) = -\frac{\mu_3}{\mu_2} ,$$

c'est-à-dire que

$$(A_2 A_3 E_1 P_1) = \frac{x_2}{x_3} .$$

De la même manière on trouve naturellement

$$(A_3 A_1 E_2 P_2) = \frac{x_3}{x_1} , \text{ etc.}$$

Nous en concluons, d'après § 7, que

$$(a_2 a_3 p_1) = -\frac{\nu_3 u_3}{\nu_2 u_2}$$

et $$(a_2 a_3 e_1) = -\frac{\nu_3}{\nu_2} ,$$

c'est-à-dire que

$$(a_2 a_3 e_1 p_1) = \frac{u_2}{u_3} .$$

De la même manière on trouve

$$(a_3 a_1 e_2 p_2) = \frac{u_3}{u_1} , \text{ etc.}$$

9. Ceci nous permet de démontrer les théorèmes suivants :

Si, du centre de la sphère, les sommets A_1, A_2, A_3; et les points E; P; E_1, P_1; etc., se projettent sur un plan quelconque ε en A'_1, A'_2, A'_3; E'; P'; E'_1, P'_1; etc., les coordonnées projectives x'_i du point P' par rapport au triangle plan $A'_1 A'_2 A'_3$ seront les mêmes que celles du point P par rapport au triangle sphérique $A_1 A_2 A_3$, pourvu que la projection E' du point-unité E devienne point-unité dans le triangle plan.

En effet, nous avons vu que, dans le triangle sphérique :

$$(A_2 A_3 E_1 P_1) = \frac{x_2}{x_3} .$$

Nous avons de même, comme cas spécial dans le triangle plan :

$$(A'_2 A'_3 E'_1 P'_1) = \frac{x'_2}{x'_3} .$$

D'après le théorème de Pappus, les deux rapports anharmoniques sont égaux ; nous

Si, du centre de la sphère, les côtés a_1, a_2, a_3; et les droites e; p; e_1; p_1, etc., se projettent sur un plan quelconque ε en a'_1, a'_2, a'_3; e'; p'; e'_1; p'_1, etc., les coordonnées projectives u'_i de la droite p' par rapport au trilatère plan $a'_1 a'_2 a'_3$ seront les mêmes que celles de la droite p par rapport au trilatère sphérique $a_1 a_2 a_3$, pourvu que la projection e' de la droite-unité e devienne droite-unité dans le trilatère plan.

En effet, nous avons vu que, dans le trilatère sphérique :

$$(a_2 a_3 e_1 p_1) = \frac{u_2}{u_3} .$$

Nous avons de même, comme cas spécial dans le trilatère plan :

$$(a'_2 a'_3 e'_1 p'_1) = \frac{u'_2}{u'_3} .$$

D'après le théorème de Pappus, les deux rapports anharmoniques sont égaux ; nous

avons donc $\frac{x_2}{x_3} = \frac{x'_2}{x'_3}$, et de même $\frac{x_3}{x_1} = \frac{x'_3}{x'_1}$, c'est-à-dire

$$x_1 : x_2 : x_3 = x'_1 : x'_2 : x'_3 \quad ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

avons donc $\frac{u_2}{u_3} = \frac{u'_2}{u'_3}$, et de même $\frac{u_3}{u_1} = \frac{u'_3}{u'_1}$; c'est-à-dire

$$u_1 : u_2 : u_3 = u'_1 : u'_2 : u'_3 \quad ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

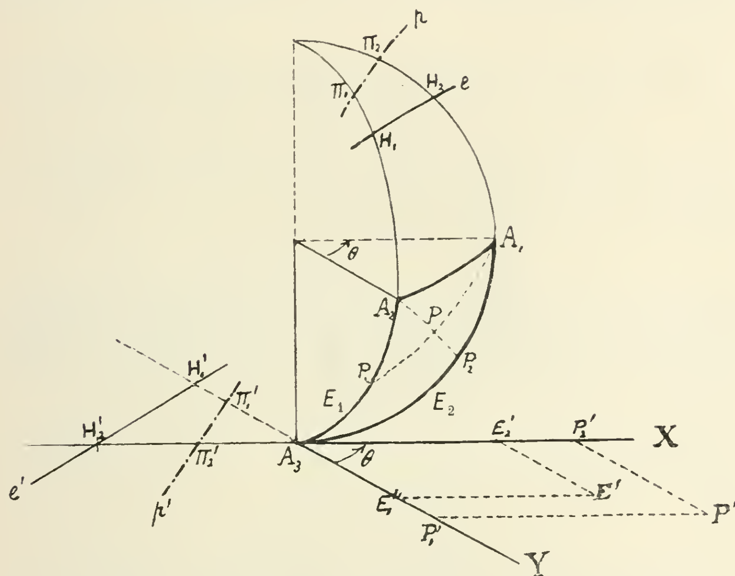


Fig. 2.

10. Prenons comme application (fig. 2) le triangle sphérique $A_1 A_2 A_3$, dont les côtés $A_3 A_1$, $A_1 A_2$, $A_2 A_3$ sont $\frac{\pi}{2}$, θ, $\frac{\pi}{2}$, tandis que le point-unité E coïncide avec le point d'intersection des médianes, les projections se faisant sur le plan tangent en A_3. Dans ce cas on a $\overline{A_3 E_1} = \overline{A_3 E_2} = \frac{\pi}{4}$ et, par conséquent, le rayon de la sphère étant l'unité, $\overline{A_3 E'_1} = \overline{A_3 E'_2} = 1$.

Pour trouver E', les points E'_1 et E'_2 doivent être reliés à A'_1 et A'_2 ; mais, comme ceux-ci sont à l'infini sur les « axes » $A_3 X$ et $A_3 Y$, il suffira de mener par E'_1 et E'_2 des parallèles

à ces axes; leur point d'intersection sera le point-unité E′ de la figure plane. De même on trouve la projection P′ d'un point quelconque P comme intersection des parallèles à A_3X et A_3Y menées par P'_1 et P'_2.

Si nous appelons maintenant $A_3P'_1$ et $A_3P'_2$ les coordonnées cartésiennes Y et X du point P′ par rapport aux axes obliques A_3X et A_3Y, le théorème démontré nous fournit les relations

$$\frac{x_1}{x_3} = (A_1A_3E_2P_2) = (A'_1A'_3E'_2P'_2) \equiv \frac{A'_1E'_2}{A'_1P'_2} \cdot \frac{A_3P'_2}{A_3E'_2} = \frac{A_3P'_2}{A_3E'_2} = X$$

$$\frac{x_2}{x_3} = (A_2A_3E_1P_1) = (A'_2A'_3E'_1P'_1) \equiv \frac{A'_2E'_1}{A'_2P'_1} \cdot \frac{A_3P'_1}{A_3E'_1} = \frac{A_3P'_1}{A_3E'_1} = Y \ .$$

ou encore

$$x_1 : x_2 : x_3 = X : Y : 1 \ ;$$

de sorte que, si $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ est l'équation en coordonnées trilinéaires d'une courbe sphérique par rapport au triangle sphérique de la fig. 2, le point-unité étant l'intersection des médianes, l'équation de la courbe plane correspondante en coordonnées cartésiennes par rapport aux axes obliques de la même figure sera

$$f(X, Y, 1) = 0 \ .$$

11. Nous pouvons trouver des relations analogues entre les coordonnées tangentielles d'une droite sphérique p et celles de sa projection p'. En effet, la droite-unité e étant la polaire trilinéaire du point-unité E, il faut que [1]

$$E_1H_1 = E_2H_2 = \frac{\pi}{2}$$

si H_1 et H_2 sont les points d'intersection de e avec les côtés a_1 et a_2 du triangle sphérique. Il s'ensuit que leurs projections H'_1 et H'_2 seront déterminées par

$$A_3H'_1 = A_3H'_2 = -1 \ .$$

Une droite quelconque p donne, avec les deux premiers

[1] Car on a $E_2 \equiv \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3$, par conséquent $H_2 \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3$, et, comme le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul, leur distance sphérique est $\frac{\pi}{2}$.

côtés, les points d'intersection Π_1 et Π_2, tandis que sa projection p' rencontre les « axes » correspondants en Π'_1 et Π'_2.

Nous avons donc

$$\frac{u_1}{u_3} = (a_1 a_3 e_2 p_2) = (A_3 A_1 \Pi_2 \Pi_2) = (A_3 A'_1 \Pi'_2 \Pi'_2) = \frac{A_3 \Pi'_2}{A_3 \Pi'_2} \cdot \frac{A'_1 \Pi'_2}{A'_1 \Pi'_2} = \frac{A_3 \Pi'_2}{A_3 \Pi'_2} = \frac{-1}{a}$$

$$\frac{u_2}{u_3} = (a_2 a_3 e_1 p_1) = (A_3 A_2 \Pi_1 \Pi_1) = (A_3 A'_2 \Pi'_1 \Pi'_1) = \frac{A_3 \Pi'_1}{A_3 \Pi'_1} \cdot \frac{A'_2 \Pi'_1}{A'_2 \Pi'_1} = \frac{A_3 \Pi'_1}{A_3 \Pi'_1} = \frac{-1}{b}$$

ou encore

$$u_1 : u_2 : u_3 = -\frac{1}{a} : -\frac{1}{b} : 1 \equiv u : v : 1 \quad ,$$

si nous désignons $A_3 \Pi'_2$ et $A_3 \Pi'_1$, c'est-à-dire les distances de l'origine aux points de rencontre de la droite p' avec les axes $A_3 X$ et $A_3 Y$ par a et b, et si, avec Plücker, nous remplaçons $-\frac{1}{a}$ et $-\frac{1}{b}$ par u et v.

Si donc l'équation d'une courbe sphérique par rapport au triangle sphérique de la fig. 2 est en coordonnées trigonales

$$f(u_1, u_2, u_3) = 0 \quad ,$$

l'équation de la courbe plane correspondante en coordonnées de Plücker par rapport aux axes obliques de la même figure sera

$$f(u, v, 1) = 0 \quad .$$

Application. L'équation d'une droite sphérique p étant

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \quad ,$$

celle de la droite p' dans le plan est, par conséquent

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad ux + vy + 1 = 0 \quad .$$

12. Pour trouver une autre signification géométrique des coordonnées ponctuelles et tangentielles introduites, revenons aux expressions

$$x_4 \mathbf{r} = \mu_1 x_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathbf{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathbf{r}_3 \quad \text{et} \quad u_4 \mathbf{l} = \nu_1 u_1 \mathbf{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathbf{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathbf{l}_3$$

et rappelons-nous (fig. 1) que la distance sphérique du point $\mathbf{r}$ à $\mathbf{l}_3$ est le complément de l'arc ξ_3, tandis que la distance

de $\mathbf{l}$ à $\mathbf{r}_3$ est le complément de δ_3. Multipliant donc les deux équations par $\mathbf{l}_3$ et $\mathbf{r}_3$, nous obtenons

$$x_4 \sin \xi_3 = \mu_3 x_3 \sin h_3 \qquad\qquad u_4 \sin \delta_3 = \nu_3 u_3 \sin h_3 \quad .$$

d'où nous concluons facilement

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{\sin \xi_1}{\mu_1 \sin h_1} : \frac{\sin \xi_2}{\mu_2 \sin h_2} : \frac{\sin \xi_3}{\mu_3 \sin h_3}$$

et

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{\sin \delta_1}{\nu_1 \sin h_1} : \frac{\sin \delta_2}{\nu_2 \sin h_2} : \frac{\sin \delta_3}{\nu_3 \sin h_3} \quad ,$$

si ξ_i sont les distances sphériques du point P aux trois côtés et δ_i les distances sphériques de la droite p aux trois sommets du triangle de référence.

En faisant coïncider le point-unité avec l'intersection des médianes, c'est-à-dire en prenant $\mu_i = 1$, nous devons pour satisfaire aux équations (9) prendre les coefficients v_i de manière à ce que $v_i \sin h_i$ devienne constant. Nos proportions se simplifient par ces suppositions, et si nous passons encore de la sphère au plan, où le rapport de deux sinus devient le rapport des arcs correspondants, nous aurons

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{\xi_1}{h_1} : \frac{\xi_2}{h_2} : \frac{\xi_3}{h_3}$$

$$u_1 : u_2 : u_3 = \delta_1 : \delta_2 : \delta_3 \quad ;$$

de sorte que l'équation d'une droite plane (et d'un point) en coordonnées trilinéaires devient

$$\frac{\delta_1}{h_1} \xi_1 + \frac{\delta_2}{h_2} \xi_2 + \frac{\delta_3}{h_3} \xi_3 = 0 \quad .$$

13. Passons au cercle sphérique.

Toutes les droites u_i qui ont la même distance ϱ d'un point fixe y_i enveloppent un cercle sphérique dont l'équation est

$$(\mu_1 y_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 y_2 \mathbf{r}_2 + \mu_3 y_3 \mathbf{r}_3)(\nu_1 u_1 \mathbf{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathbf{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathbf{l}_3) = y_4 u_4 \sin \rho \quad ; \Big]$$

Tous les points x_i qui ont la même distance θ d'une droite sphérique v_i sont sur un cercle sphérique dont l'équation est

$$\Big[(\nu_1 v_1 \mathbf{l}_1 + \nu_2 v_2 \mathbf{l}_2 + \nu_3 v_3 \mathbf{l}_3)(\mu_1 x_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathbf{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathbf{r}_3) = v_4 x_4 \cos \rho \quad ;$$

ou encore :

(10) $(y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3)\Delta - y_4 u_4 \sin\rho = 0$,

car les tenseurs des deux vecteurs dont nous avons formé le produit scalaire sont y_4 et u_4, tandis que leur distance sphérique est $\frac{\pi}{2} - \varrho$.

L'équation (10) du cercle en coordonnées tangentielles u_i est en réalite *du second degré*, parce qu'elle contient

$$u_4 \equiv \sqrt{\Omega(u_1 u_2 u_3)} \quad .$$

Si l'on y pose $\varrho = 0$, on retombe sur l'équation bien connue du point y_i.

14. Il est évident que réciproquement toute équation en coordonnées tangentielles de la forme[1] :

$$B_1 u_1 + B_2 u_2 + B_3 u_3 + B_4 u_4 = 0$$

représente un cercle sphérique dont on détermine le centre y_i et le rayon ϱ par la comparaison avec l'équation (10), donnant

$$y_1 \Delta = B_1 ; \; y_2 \Delta = B_2 ; \; y_3 \Delta = B_3 ;$$
$$y_4 \sin\rho = - B_4 \quad ;$$

ce qui nous permet de dire que

$$\mu_1 B_1 r_1 + \mu_2 B_2 r_2 + \mu_3 B_3 r_3$$

est le centre, et que le rayon se trouve par

$$\sin\rho = - \frac{B_4 \Delta}{\sqrt{\omega(B_1 B_2 B_3)}} \quad .$$

ou encore :

(11) $(v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3)\Delta - v_4 x_4 \cos\rho = 0$,

car les tenseurs des deux vecteurs dont nous avons formé le produit scalaire sont v_4 et x_4, tandis que leur distance sphérique est $\varrho = \frac{\pi}{2} - \theta$.

L'équation (11) du cercle en coordonnées ponctuelles x_i est en réalité *du second degré*, parce qu'elle contient

$$x_4 \equiv \sqrt{\omega(x_1 x_2 x_3)} \quad .$$

Si l'on y pose $\theta = \frac{\pi}{2} - \varrho = 0$, on retombe sur l'équation bien connue de la droite v_i .

Il est évident que toute équation en coordonnées ponctuellés de la forme[1] :

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0$$

représente un cercle sphérique dont le centre et le rayon se trouvent par la comparaison avec l'équation (11), donnant

$$v_1 \Delta = b_1 ; \; v_2 \Delta = b_2 ; \; v_3 \Delta = b_3 ;$$
$$v_4 \cos\rho = - b_4 \quad ;$$

ce qui nous permet de dire que[2]

$$\nu_1 b_1 l_1 + \nu_2 b_2 l_2 + \nu_3 b_3 l_3$$

est le centre, et que le rayon se trouve par

$$\cos\rho = - \frac{b_4 \Delta}{\sqrt{\Omega(b_1 b_2 b_3)}} \quad .$$

[1] Il est à remarquer que, dans cette équation, les coefficients sont indépendants entre eux. B_4 et b_4 ne sont donc nullement $\sqrt{\Omega(B_1 B_2 B_3)}$ et $\sqrt{\omega(b_1 b_2 b_3)}$.

[2] Si nous appelons $\Omega'(b_i)$ la dérivée de $\Omega(b_1 b_2 b_3)$ par rapport à b_i, cette expression pour le centre peut encore s'écrire $\mu_1 \Omega'(b_1) . r_1 + \mu_2 \Omega'(b_2) . r_2 + \mu_3 \Omega'(b_3) . r_3$.

15. En partant des équations (10) et (11), il est facile de voir que les équations des circonférences sphériques tangentes aux trois droites non-concourantes v_i, w_i, r_i ou passant par trois points y_i, z_i, t_i, qui ne sont pas sur la même droite sphérique, seront

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} = 0 .$$

16. Exemples. — *Cercle inscrit.* Dans ce cas, les trois droites données sont les côtés du triangle, dont les coordonnées sont (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), tandis que les éléments correspondants dans la dernière colonne du déterminant deviennent ν_1, ν_2, ν_3. L'équation du cercle inscrit en coordonnées tangentielles est, par conséquent :

Cercle circonscrit. Dans ce cas, les trois points donnés sont les sommets du triangle, dont les coordonnées sont (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), tandis que les éléments correspondants dans la dernière colonne du déterminant deviennent μ_1, μ_2, μ_3. L'équation du cercle circonscrit en coordonnées ponctuelles est donc

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 1 & 0 & 0 & \nu_1 \\ 0 & 1 & 0 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 1 & \nu_3 \end{vmatrix} \equiv \nu_1 u_1 + \nu_2 u_2 + \nu_3 u_3 - u_4 = 0 . \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 0 & \mu_1 \\ 0 & 1 & 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 1 & \mu_3 \end{vmatrix} \equiv \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 - x_4 = 0 .$$

Il est évident que ces équations peuvent encore s'écrire

$$(\nu_1 u_1 + \nu_2 u_2 + \nu_3 u_3)^2 - \Omega(u_1 u_2 u_3) = 0 ; \quad (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3)^2 - \omega(x_1 x_2 x_3) = 0 ;$$

ce qui, développé, donne

$$\frac{u_2 u_3}{\nu_1} \sin^2 \frac{A_1}{2} + \frac{u_3 u_1}{\nu_2} \sin^2 \frac{A_2}{2} + \frac{u_1 u_2}{\nu_3} \sin^2 \frac{A_3}{2} = 0 ;$$

$$\frac{x_2 x_3}{\mu_1} \sin^2 \frac{a_1}{2} + \frac{x_3 x_1}{\mu_2} \sin^2 \frac{a_2}{2} + \frac{x_1 x_2}{\mu_3} \sin^2 \frac{a_3}{2} = 0 .$$

Les centres sont

$$\mu_1 \nu_1 \mathrm{r}_1 + \mu_2 \nu_2 \mathrm{r}_2 + \mu_3 \nu_3 \mathrm{r}_3 \quad \text{et} \quad \nu_1 \mu_1 \mathrm{l}_1 + \nu_2 \mu_2 \mathrm{l}_2 + \nu_3 \mu_3 \mathrm{l}_3 \quad \text{ou}$$

$$\mu_1 \Omega'(u_1) \mathrm{r}_1 + \mu_2 \Omega'(\mu_2) \mathrm{r}_2 + \mu_3 \Omega'(\mu_3) \mathrm{r}_3 ,$$

tandis que les rayons se trouvent par les formules

$$\sin r = \frac{\Delta}{\sqrt{\omega \, \nu_1 \nu_2 \nu_3}} \quad ; \qquad \cos R = \frac{\Delta}{\sqrt{\Omega \, \mu_1 \mu_2 \mu_3}} \quad .$$

Enfin, si nous prenons $\mu_i = 1$ et $\nu_i = \sin A_i$, c'est-à-dire si nous prenons l'intersection des médianes comme point d'unité, les équations précédentes deviennent

$$u_2 u_3 \operatorname{tg} \frac{A_1}{2} + u_3 u_1 \operatorname{tg} \frac{A_2}{2} + u_1 u_2 \operatorname{tg} \frac{A_3}{2} = 0 \quad ;$$

$$x_2 x_3 \sin^2 \frac{a_1}{2} + x_3 x_1 \sin^2 \frac{a_2}{2} + x_1 x_2 \sin^2 \frac{a_3}{2} = 0 \quad .$$

Pour le *plan*, l'équation du cercle inscrit restera en coordonnées barycentriques

$$u_2 u_3 \operatorname{tg} \frac{A_1}{2} + u_3 u_1 \operatorname{tg} \frac{A_2}{2} + u_1 u_2 \operatorname{tg} \frac{A_3}{2} = 0 \quad ,$$

tandis que celle du cercle circonscrit devient

$$a_1^2 x_2 x_3 + a_2^2 x_3 x_1 + a_3^2 x_1 x_2 = 0 \quad .$$

M.-Fr. DANIËLS (Fribourg, Suisse).

DÉTERMINATION DES AXES D'UNE HYPERBOLE

DONT DEUX DIAMÈTRES CONJUGUÉS SONT DONNÉS

On connaît beaucoup de constructions des axes d'une ellipse, dont deux diamètres conjugués sont donnés. L'une des plus récentes et des plus fécondes est celle qui est due à M. MANHEIM [1]. Moins nombreuses sont les solutions de la même question pour l'hyperbole. Mais on peut résoudre cette dernière question avec la même facilité que la première, si l'on regarde une hyperbole quelconque comme projection

[1] *Nouv. Annales de Mathématiques*, 1904, janvier.

d'une hyperbole équilatère. J'ai donné quelques relations entre une hyperbole équilatère et une hyperbole générale dont l'un des axes est égal à l'axe de la première, dans un article intitulé : « *Ueber einige Beziehungen der allgemeinen Hyperbel zu der gleichseitigen*[1], et je continuerai ici ces recherches en vue de la détermination des axes d'une hyperbole générale.

1. Soit une hyperbole équilatère h et a son demi-axe. Faisons tourner cette hyperbole h autour de l'axe imaginaire d'un angle $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Si nous projetons cette position de l'hyperbole h sur le plan primitif, nous obtiendrons une hyperbole h', dont le demi-axe imaginaire b' sera égal à a et dont l'axe réel sera $2\,a \cos \alpha = 2\,a'$, or $a' < b'$. L'angle asymptotique de l'hyperbole h' sera un angle obtus φ. Deux diamètres quelconques conjugués de l'hyperbole h se projetteront en deux diamètres conjugués de la projection h'. Nous pouvons donc considérer deux diamètres conjugués d'une hyperbole générale h' à l'angle asymptotique φ obtus comme projections de deux diamètres conjugués (égaux) d'une hyperbole équilatère h ayant les axes égaux à l'axe imaginaire de h', en observant que l'hyperbole h' est, dans le sens indiqué, une projection de l'hyperbole h.

Nous employons, dans ce qui suit, une construction particulière de l'hyperbole équilatère h. Etant donné un cercle k (fig. 1), dont le rayon est égal à a, menons une tangente t quelconque au cercle k. Soit le point de contact A_1, et le diamètre AOA_1 l'axe réel de l'hyperbole h cherchée. J'ai démontré, dans l'article cité, que les courbes h et k sont des courbes correspondantes dans une *homologie harmonique*, dont A est le centre et t l'axe d'homologie. On trouve un point quelconque sur h de la manière suivante. On choisit un point quelconque T sur t, on joint T au point O et on mène une perpendiculaire en T sur t. La droite TO coupe le cercle k en un point R″. On portera la longueur TR″ sur la perpendiculaire en partant du point T, et on obtiendra ainsi un

[1] *Zeitschrift für mathem. u. naturw. Unterr.*, XXXII., p. 513.

point B qui appartient à l'hyperbole h. En effet, l'équation de l'hyperbole h est $x^2 - y_2 = a_2$, or, $x_2 = \overline{A^1T}_2 + a_2$, $x = \overline{OT} = \overline{R^0R}$. — Ce qui précède permet d'établir la construction des axes en question.

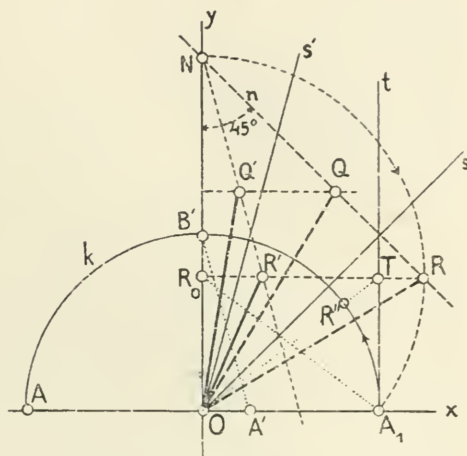


Fig. 1.

2. Soient OA' et OB' les axes, et OR', OQ' deux diamètres conjugués d'une hyperbole h'. Décrivons du centre O avec le rayon étant égal à OB' un cercle k. Celui-ci peut être considéré comme un cercle décrit sur les axes d'une hyperbole équilatère h', dont h' est la projection sur le plan de l'épure, après une rotation de h autour de y, telle que l'axe OA_1 de h se projette en OA'.

Nous n'avons qu'à déterminer la *longueur* de l'axe de cette hyperbole h'', les diamètres conjugués de h' : OQ' et OQ' étant donnés. Faisons donc tourner l'hyperbole h'' autour de y, jusqu'à ce qu'elle vienne dans le plan de l'épure en h, et déterminons la position des points extrêmes R' et Q' des diamètres donnés après la rotation faite. Les arcs qui sont décrits par ces deux points seront dans la projection deux droites parallèles à x. Comme les diamètres OR et OQ deviendront (après la rotation) deux diamètres conjugués de l'hyperbole équilatère h, ils auront la même longueur et ils seront placés symétriquement à l'asymptote s de l'hyperbole h. Le point N, comme point commun à l'axe de rotation y et à la droite de jonction R'Q', reste pendant la rotation immobile. Or, nous menons par N une droite n telle que l'angle (ny) soit égal à 45°, et cette droite coupe les droites menées par Q' et R' parallèlement à x en deux points ex-

trêmes R et Q des diamètres conjugués appartenant à l'hyperbole h.

L'asymptote s' de l'hyperbole h' passe par le milieu M' de la longueur $R'Q'$, or, l'hyperbole h' ayant un angle asymptotique *obtus*, passe réellement par le point R' qui est situé dans l'angle asymptotique *obtus*.

Nous avons, d'après la construction particulière donnée de l'hyperbole h :

$$OR'' + R''T = R_0T + TR$$

ou

$$OT = R_0R ,$$

mais on a aussi $OT = R_0A_1$. Alors pour obtenir le point A_1, on décrira du point R_0 avec le rayon étant égal à R_0R un arc de cercle qui coupe x en A_1. La longueur OA_1 est un *axe* de l'hyperbole h' et cela l'axe étant égal à l'axe de l'hyperbole h, c'est-à-dire l'axe OB' qui est sur l'axe de rotation y. Nous ajoutons que l'arc RA_1 passe aussi par le point N parce que nous avons l'égalité $R_0R = R_0N$. Or, on n'a pas besoin de déterminer le point R, on peut se servir du point N qu'on obtiendra aisément.

3. En supposant quelques relations bien connues entre l'hyperbole et ses diamètres conjugués, nous donnons la *construction* suivante *des axes*, privée de toutes les lignes auxiliaires superflues (fig. 2).

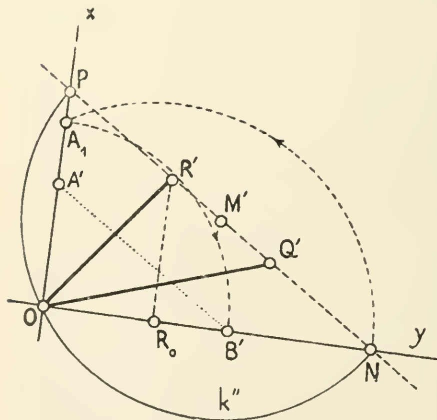


Fig. 2.

Etant donnés deux demi-diamètres conjugués OR', OQ' d'une hyperbole, on décrira du milieu M' de la longueur $R'Q'$ un demi-cercle k'' qui coupe la droite de jonction $R'Q'$ en deux points P et N. Les droites OP et ON (ou x et y) sont les *directions des axes* de l'hyberbole. L'asymptote OM'

de cette hyperbole fera, en général, avec x et y deux angles inégaux. Le point R′ sera dans l'un, le point Q′ dans l'autre de ces angles. On choisit de deux points R′ et Q′ celui qui est dans l'angle *plus grand* (c'est la moitié de l'angle asymptotique obtus), et on mène par lui (R′) une parallèle à l'axe (x) laquelle est un côté de cette angle même. La parallèle coupe l'autre axe (y) en un point R_0. On décrit de ce point comme centre avec le rayon étant égal à la distance du point R_0 de l'intersection N des droites y et R′Q′ un arc de cercle qui coupe l'autre axe (x) en un point A_1. La longueur OA_1 est la *grandeur* de l'axe OB′ de l'hyperbole situé sur la direction y.

On obtient la grandeur de l'axe sur la direction x, si l'on mène par B′ une parallèle à la droite R′Q′ et qu'on détermine le point A′ commun à cette droite et à x.

La longueur OB′ sera le demi-axe *réel* ou *imaginaire* selon que l'hyperbole passe réellement par Q′ ou par R′, parce que deux hyperboles conjuguées ont les *mêmes* longueurs des axes.

Je crois qu'en raison de la simplicité de cette construction on pourrait en faire usage dans l'enseignement.

G. Majcen (Agram).

VECTEURS RELATIFS A UNE COURBE

(Application de la Méthode de Grassmann.)

Soient un point P et un vecteur I, tous deux fonction d'un paramètre λ. Lorsque λ varie, le segment PI décrit une surface réglée ; cherchons la condition pour qu'elle soit développable.

On doit avoir, en dérivant par rapport à λ

(1) $$P'II' = 0 .$$

Posons (T, N, B étant les vecteurs unitaires des directions principales

$$I = xT + yN + zB \ ,$$

$$I' = \left(x' - \frac{\nu y}{\rho}\right)T + \left(y' + \frac{\nu x}{\rho} + \frac{\nu z}{\tau}\right)N + \left(z' - \frac{\nu z}{\tau}\right)B \ ,$$

$$\nu = \frac{ds}{d\lambda} \ .$$

La condition (1) devient

$$P'II' = TNB \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' - \frac{\nu y}{\rho} & y' + \frac{\nu x}{\rho} + \frac{\nu z}{\tau} & z' - \frac{\nu y}{\tau} \\ \nu & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Or TNB $\neq$ o, donc le déterminant doit être nul; on peut l'écrire

$$(2) \qquad \Delta = \nu \begin{vmatrix} y & z \\ y' + \frac{\nu x}{\rho} + \frac{\nu z}{\tau} & z' - \frac{\nu y}{\tau} \end{vmatrix} = 0 \ .$$

D'une façon générale, I étant donné par ses coordonnées, on conservera Δ sous la forme précédente. Pour les applications géométriques que nous avons en vue, il est souvent plus simple de lui donner la forme suivante, due à M. Burali-Forti, et dans laquelle 1° le vecteur I est unitaire et défini par son angle φ avec PNB et l'angle ψ de sa projection sur le plan PNB avec N ; 2° $\lambda = s$, arc décrit par P.

$$I = \sin\varphi \ . \ T + \cos\varphi \cos\psi \ . \ N + \cos\varphi \sin\psi \ . \ B \ .$$

Tous calculs faits Δ devient

$$(3) \qquad \Delta = \psi' \cos^2\psi - \frac{\sin\varphi \cos\varphi \sin\psi}{\rho} - \frac{\cos^2\varphi}{\tau} \ .$$

Pour discuter la condition $\Delta = 0$ nous allons examiner divers cas particuliers en faisant certaines hypothèses sur la valeur des coordonnées de I. Sous la forme (2) nous supposerons toujours $\nu \neq 0$, car $\nu = 0$ est un cas limite où PI décrit un cône.

Vecteur dans le plan osculateur. — $\psi = 0$.

$$\Delta = -\frac{\cos^2\varphi}{\tau} = 0 .$$

Pour $\cos\varphi = 0$, I est dirigé suivant la tangente, la surface est développable par définition.

Si $\cos\varphi \neq 0$ il faut $\frac{1}{\tau} = 0$, la courbe est plane et on a le *théorème :*

Lorsque un vecteur constamment situé dans le plan osculateur et différent de la tangente décrit une surface développable, la courbe est plane.

Le *corollaire* suivant est immédiat :

Lorsque une ligne géodésique est de courbure, elle est plane.

La normale à la surface est dans le plan osculateur à la courbe puisqu'elle est géodésique, elle décrit une surface développable puisque la ligne est de courbure donc la courbe est plane.

En Mécanique ce théorème trouve son application à deux reprises : dans l'étude du mouvement d'un point mobile et dans celle de l'équilibre d'un fil. On sait en effet que l'accélération du point dans un cas, la force agissante dans l'autre, sont situées dans le plan osculateur. Supposons qu'il s'agisse de forces centrales, il résulte du théorème précédent que la courbe décrite par le point ou affectée par le fil est plane.

Appelons *segment tangentiel* un segment dirigé suivant la tangente au point A. Il est de la forme

$$a = \mathrm{A}x\mathrm{T} .$$

Dérivons

$$a' = \mathrm{A}'x\mathrm{T} + \mathrm{A}(x\mathrm{T})' = \mathrm{A}(x\mathrm{T})' .$$

La dérivée d'un segment tangentiel est un segment. Son vecteur est le dérivé du segment primitif. Ce vecteur est

$$(4) \qquad (x\mathrm{T})' = x'\mathrm{T} + \frac{vx}{\rho}\mathrm{N} .$$

Cette relation n'est autre que l'équation intrinsèque ordinaire du vecteur. Elle montre que ce vecteur est toujours dans le plan osculateur. C'est ce qui a lieu pour l'accélération d'un

point, dérivée de sa vitesse ou pour la force agissant sur un fil, dérivée de la tension.

Le moment de a par rapport à une forme b, que nous supposerons à invariant non nul, est

$$M = 6ab \quad .$$

Si b est fixe

$$M' = 6a'b \quad .$$

Le moment du segment dérivé est la dérivée du moment du segment primitif. Lorsque le segment a' appartient à un complexe

$$6a'b = 0 = M' \,, \qquad \text{d'où} \qquad M = c^{te} \quad .$$

On a donc le *Théorème. — Si le dérivé d'un segment appartient à un complexe linéaire, ce segment a par rapport au complexe un moment constant.*

On déduit de là que dans le cas de forces centrales, la vitesse ou la tension ont par rapport au centre un moment constant.

La dérivée du vecteur T est $\frac{v}{\rho}$ N, donc si la normale principale à une courbe rencontre une droite fixe, la tangente a par rapport à cette droite un moment constant — propriété connue.

Vecteur dans le plan rectifiant. $\psi = \frac{\pi}{2}$, ou $y = 0$.

$$\Delta = -\cos\varphi\left(\frac{\sin\varphi}{\rho} + \frac{\cos\varphi}{\tau}\right) = vz\left(\frac{x}{\rho} + \frac{z}{\tau}\right) \quad .$$

On doit supposer

$$\cos\varphi \quad \text{ou} \quad zv \neq 0 \quad .$$

La condition (1) devient

$$\tag{5} \operatorname{tang}\varphi = -\frac{\rho}{\tau} \quad .$$

Avant de poursuivre cherchons le plan tangent à la surface décrite par PI. Ce plan est au point P :

$$P(PI)' = P P' I \quad ,$$

$$I = \sin\varphi \,.\, T + \cos\varphi\cos\psi\, N + \cos\varphi\sin\psi \,.\, B \quad ,$$

$$P' = T \quad ,$$

$$P P' I = P\cos\varphi[\cos\psi\, NT + \sin\psi\, BT] \quad .$$

Pour $\psi = \frac{\pi}{2}$ il se réduit à

$$PP'I = \cos\varphi \sin\psi \, PBT \quad ,$$

c'est-à-dire au plan rectifiant. Le segment proposé décrit la surface rectifiante et la relation (5) en donne la propriété fondamentale.

Comme application mécanique considérons le trièdre TNB lié à un point décrivant une courbe quelconque. On sait que l'axe instantané a pour coordonnées à chaque instant :

$$x = -\frac{1}{\rho} \qquad y = o \qquad z = \frac{1}{\tau} \quad .$$

Il est bien dans le plan rectifiant ; en outre

$$\frac{x}{\rho} + \frac{z}{\tau} = 0 \quad ,$$

et l'axe instantané décrit la surface rectifiante.

Soit une ligne asymptotique ; son plan osculateur étant tangent à la surface, le plan PBT lui est normal et contient le vecteur n normal à la surface. Si nous voulons que la ligne soit en même temps de courbure, il faut :

$$\frac{x}{\rho} + \frac{z}{\tau} = 0 \quad ;$$

or $\frac{1}{\rho} = 0$ dans une ligne asymptotique, donc il faut

$$\frac{1}{\tau} = 0 \quad ,$$

la ligne considérée doit être droite.

Vecteur dans le plan polaire. — $\varphi = 0$.

(6) $$\Delta = \psi' - \frac{1}{\tau} = 0 \quad .$$

Soit α l'angle de la normale avec une direction fixe arbitraire

$$ds = \tau\, d\alpha \quad , \qquad \frac{1}{\tau} = \alpha' \quad ;$$

(6) devient

$$\psi' = \alpha' \quad , \qquad \psi = \alpha + \alpha_0 \quad .$$

Nous déterminerons la direction fixe de façon que $\alpha_0 = 0$

$$(7) \qquad \psi = \alpha \; .$$

Si $\psi = o$, c'est-à-dire si la binormale décrit une surface développable, cette surface est un cylindre, la courbe est plane.

D'une façon générale une droite du plan polaire est normale à la courbe ; le problème en question revient à l'étude des développées de la courbe. Ainsi soient deux segments a et b répondant à la question, on a

$$\psi_a - \psi_b = \alpha_a - \alpha_b = c^{te}.$$

C'est-à-dire les tangentes aux deux développées correspondantes font un angle constant.

Vecteur fixe par rapport au trièdre T, N, B. — φ et ψ sont constants ou x', y', z', sont nuls.

$$\Delta = \frac{\cos\varphi \sin\varphi \sin\psi}{\rho} + \frac{\cos^2\varphi}{\tau} = 0 \; ,$$

$$(8) \qquad \frac{\rho}{\tau} = - \operatorname{tang}\varphi \, . \sin\psi = \mathrm{K} \; .$$

La courbe proposée est une hélice.

Prenons Δ sous la forme (2)

$$(9) \qquad \mathrm{K}(z^2 + y^2) + xz = o \; .$$

Tous les vecteurs répondant à la question sont situés sur le cône (9).

On voit que ce cône est tangent au plan osculateur ; il a pour plan de symétrie le plan rectifiant, c'est-à-dire le plan tangent au cylindre qui porte l'hélice ; il a dans ce plan les deux génératrices

$$z = o \; , \qquad \frac{x}{\rho} + \frac{z}{\tau} = o \; .$$

On voit aisément que cette génératrice est perpendiculaire à celle du cylindre qui passe au même point. Enfin les sections de ce cône parallèles au plan polaire sont circulaires.

Lorsque le cône ainsi défini et semblable à lui-même est

entraîné le long de l'hélice, chacune de ses génératrices décrit une surface développable et ce sont les seules droites qui jouissent de cette propriété.

Georges MONNET (Lyon).

UNE LEÇON D'OUVERTURE DE M. PAINLEVÉ

L'enseignement de l'Ecole Polytechnique de Paris a subi deux rudes épreuves depuis ces dernières années. La mort de Sarrau, d'une part, l'état de santé de M. Léauté, de l'autre, ont conduit coup sur coup à deux nominations nouvelles aux chaires de mécanique. Sarrau a été remplacé par M. Lecornu qui, en fait, avait fait le cours depuis deux ans à titre de suppléant et de la façon la plus brillante.

Quant au successeur de M. Léauté, c'est M. Painlevé, qui n'est pas ancien élève de l'Ecole Polytechnique. Les Conseils de l'Ecole ont montré une fois de plus leur largeur d'esprit en appelant à professer ce cours si important, l'un des plus éminents géomètres de la jeune génération.

En ouvrant son cours, vers la fin de février dernier, le nouveau professeur a débuté par l'allocution suivante, que nous sommes heureux de pouvoir reproduire, en l'empruntant au *Bulletin du Groupe parisien des anciens élèves de l'Ecole Polytechnique* (n° de mars 1905).

Ce discours fait honneur à celui qui l'a prononcé, aussi bien qu'à ses jeunes auditeurs, qui méritaient d'entendre un tel langage et sauront en profiter. Il est bien utile que les mesquines préoccupations d'origine s'effacent devant la supériorité du talent et les intérêts de l'enseignement et de la science.

LA RÉDACTION.

Messieurs, c'est pour moi un grand honneur d'être appelé à enseigner dans cette chaire où se sont succédé tant de maîtres illustres, dans cette Ecole créée par la Révolution pour défendre, propager et développer les idées scientifiques

modernes, dans cette Ecole qui a contribué si efficacement au renom de la France, en même temps qu'à tous les progrès de l'humanité et dont sûrement l'avenir, dans ce siècle qui commence, sera digne du passé.

Messieurs, c'est ici dans cette chaire qu'il y a un peu plus de cent ans, Lagrange a fondé l'Enseignement de la Mécanique. Les principes et les axiomes fondamentaux de cette science — pour lesquels, durant plus de deux siècles, les grands initiateurs Copernic Galilée, Descartes, Newton, Leibniz avaient livré, contre les partisans des anciennes doctrines, de si rudes combats, — n'étaient plus, il est vrai, contestés. Mais une œuvre immense restait à accomplir : il s'agissait, avec les ressources nouvelles du calcul infinitésimal, de tirer de ces principes leurs innombrables conséquences. En un mot, les fondements de la mécanique étaient jetés ; il s'agissait de la construire. Eh bien, c'est en France — et en France, c'est à l'Ecole Polytechnique par ses professeurs et par ses élèves — que la nouvelle science s'est constituée, qu'elle est devenue un corps de doctrine, qu'elle a revêtu sa forme didactique, c'est de ce foyer qu'elle a rayonné sur l'Europe.

Si les grandes nations occidentales, la France, l'Italie, l'Angleterre, l'Allemagne s'étaient partagé la gloire d'arracher à la trame obscure et complexe des phénomènes les principes directeurs qui allaient guider désormais l'intelligence humaine, on peut dire que c'est l'Ecole Polytechnique qui, au début du XIXme siècle, a enseigné la mécanique au monde civilisé.

Messieurs, l'Ecole Polytechnique s'est maintenue à la hauteur de ces grandes traditions. Pour le prouver, il suffit de citer les noms des deux maîtres que l'Ecole vient de perdre en si peu de temps, M. Sarrau et M. Léauté. M. Sarrau, dont le souvenir éveille tant d'émotion et de regrets chez ses élèves et chez ses amis, a été un professeur incomparable par la lucidité et la perfection de sa parole, par la logique naturelle et la simplicité de son enseignement, simplicité qui venait de la profondeur. Quant à M. Léauté, tous ceux qui l'ont entendu regrettent que l'état de sa santé l'ait con-

traint prématurément à abandonner une chaire qu'il occupait avec tant d'éclat et où se manifestaient sa véritable éloquence, ses puissantes facultés d'exposition, l'élégance et la variété de son esprit.

Messieurs, ce n'est pas sans émotion que j'assume la lourde tâche dont a bien voulu m'honorer, moi, étranger à cette école, la confiance de ses Conseils, la tâche de succéder à de tels maîtres. C'est guidé et inspiré par leurs traditions et par leur exemple que je m'efforcerai de toute ma conscience de poursuivre leur œuvre.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sous ce titre nous publions les remarques et renseignements concernant plus ou moins directement l'enseignement mathématique, telles que des descriptions d'instruments ou d'appareils nouveaux, etc. Quant à la correspondance, elle permet à tout lecteur de présenter sous une forme rapide les idées qui lui semblent utiles, les remarques suggérées par la lecture d'un article, ou les questions sur lesquelles il aurait besoin d'un renseignement.

LA RÉDACTION.

Un calendrier perpétuel automatique.

Dans l'une des dernières séances de la *Société des Gens de science*, à Paris, a été présenté un appareil d'horlogerie des plus intéressant. L'apparence extérieure est celle d'un calendrier de bureau, portant une montre et, dans des fenêtres spéciales, le jour de la semaine, la date du mois et le nom de ce mois ; mais, tandis que dans les calendriers ordinaires, ces indications doivent être chaque jour changées à la main, ici le changement se produit automatiquement.

Deux mouvements d'horlogerie sont logés à cet effet derrière la plaque apparente. L'un commande le mouvement des heures, c'est une petite pendule ordinaire, qui se remonte chaque se-

maine, et qu'on peut régler, remettre à l'heure comme d'habitude.

L'autre mouvement, qu'il suffit de remonter tous les six mois, a pour but l'apparition des dates, qui se produit chaque jour à minuit par un déclanchement. C'est là ce qui constitue l'invention, la nouveauté de l'appareil. Le problème pratique n'était certes pas facile à résoudre avec un mécanisme d'aussi petit volume, étant donné l'irrégularité des mois de chaque année, et surtout la complication résultant des années bissextiles. Cependant, tout a été prévu selon les règles de compensation qui règlent le calendrier grégorien et, théoriquement, l'appareil serait indéfiniment d'accord avec ce calendrier.

Il nous est impossible de donner ici un aperçu des moyens par lesquels des difficultés paraissant insurmontables, ont été franchies ; mais nous pouvons, sans exagération, affirmer qu'il y a là un véritable tour de force accompli.

L'inventeur, M. Tilmant, a consacré bien des années de travail à ses recherches avant d'arriver au résultat enfin obtenu. Si ce résultat est de nature à attirer l'attention des personnes qui s'intéressent au mécanisme de l'horlogerie, l'utilité pratique d'un semblable appareil est évidente pour quiconque désire connaître, sans avoir aucune recherche à faire, la date exacte de chaque jour.

Le calendrier automatique Tilmant est à peine lancé dans le commerce ; un seul modèle, de forme assez simple et très pratique, a été fabriqué jusqu'ici ; le prix en est de 50 francs. Nous croyons savoir que d'autres formes, plus ou moins luxueuses, seront étudiées, mais dans lesquelles le mécanisme restera exactement le même.

Au surplus, pour tous les renseignements, on peut s'adresser à M. Bourdilliat, agent général, 22, rue du Faubourg-Poissonnière, à Paris. Notre seul but a été de signaler à nos lecteurs une curiosité ingénieuse et vraiment remarquable, en matière de mécanique appliquée à l'horlogerie. C. A. L.

Questions diverses.

« Existe-t-il, en France ou en Allemagne, un seul établissement officiel où l'on enseigne la Mécanique *sans faire usage de la Notion de force* ? »

« 2° Existe-t-il des établissements officiels où l'on enseigne la Mécanique en commençant par la *Dynamique*, pour finir, par déduction, par la Statique ? » SAUREL (Bruxelles).

Extrait de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*. Déc. 1904, question n° 2852.

A propos de mon article sur la théorie des parallèles [1].

Introduction a la Théorie Euclidienne des Parallèles ; Postulat Fondamental.

L'expérience nous démontre que, étant fixées deux droites coplanaires m et n (fig. 1), si dans des différents points A, B, C... de l'une d'elle, de m par exemple, l'on mène les droites perpendiculaires à l'autre, et l'on mesure les distances AR, BS, CT, de ces points à l'autre droite, si ces distances ont commencé à croître de gauche à droite comme dans la fig. 1, elles continueront à croître si on prolonge les droites vers la droite. On constate aussi que les distances en question diminueront sans cesse si l'on prolonge les droites vers la gauche. Il n'arrive jamais que ces distances, après avoir commencé à augmenter (ou à diminuer) d'un côté commencent ensuite à diminuer (ou à augmenter) du même côté. Ayant vérifié ce fait pour n'importe quelle paire de droites coplanaires, si loin qu'on puisse les prolonger, nous sommes, par induction, portés à l'admettre même au delà de notre champ d'expérience. Nous énonçons ce fait ainsi :

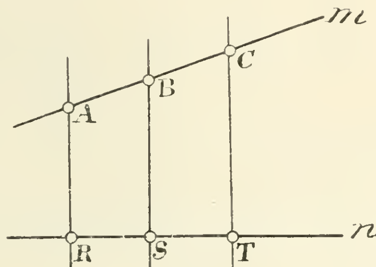


Fig. 1.

Postulat Fondamental. *Dans un plan, une ligne droite qui a commencé à s'approcher d'une autre, ne peut pas ensuite s'en éloigner ; et réciproquement.*

Conséquences : Considérons deux droites a et b perpendiculaires à une troisième c (fig. 2). La distance du point $M \equiv ac$ à la droite b est évidemment le segment MN ($N \equiv bc$). Ce segment est aussi la distance de N à la droite a. Nous allons démontrer que la distance AB d'un point quelconque A d'une des droites, de a par exemple,

[1] La présente note apporte quelques simplifications à l'article publié par M. Dassen sous le titre de *La théorie des Parallèles basée sur un postulat plus évident que ceux employés ordinairement* (*L'Ens. math.*, 6e année, p. 47-57). — Voir, dans le présent numéro, l'analyse de son récent manuel de Géométrie.

La Rédaction.

à l'autre droite est aussi nécessairement égale à MN; pour cela, prenons un point A′ tel que AM = MA′ et soit A′B′ la distance de A′ à la droite *b*. Il est évident que AB = A′B′ (égalité par symétrie ou par congruence en faisant tourner la partie gauche de la figure autour du *c* jusqu'à la faire tomber sur la partie droite, alors, comme des points M et N l'on ne peut mener qu'une seule droite perpendiculaire à *c*, le point A tombe sur A′ ; la droite AB prend la direction de A′ B′, car ces deux droites sont perpendiculaires à *b*. Donc le point B se confond avec le B′).

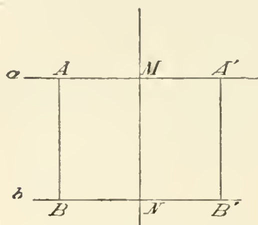


Fig. 2.

Par conséquent si AB était plus grand que MN, A′B′ le serait aussi ; la droite *a* aurait alors commencé à s'approcher de *b*, du point A au point M, pour s'éloigner ensuite du point M au point A′ ; ce qui est au contraire un postulat fondamental. On verrait de même que AB ne peut être moindre que MN. Donc AB = MN. Tous les points de *a* ou de *b* sont par conséquent à la même distance de *b* ou de *c*.

Définition. — Deux droites qui satisfont aux conditions antérieures, c'est-à-dire telles que tous les points de l'une d'elles se trouvent à la même distance de l'autre, se nomment *droites équidistantes*. — Donc :

Théorème I. *Deux droites coplanaires, perpendiculaires à une troisième sont équidistantes.*

Théorème II. *Par un point extérieur à une droite on peut toujours lui mener une droite équidistante et une seule.*

Soient la droite *b* et le point M (fig. 2). Dans le plan ainsi déterminé, menons, par M, la droite *c* perpendiculaire à *b* et ensuite la droite *a* perpendiculaire à *c*. Les droites *a* et *b* sont équidistantes d'après le théorème I, et il est évident que cette droite *a* est la seule équidistante de *b* passant par M, car pour si peu que l'on tourne *a* autour de M, la distance du point M à *b* ne change pas, tandis que cela arrive pour un autre point quelconque de la droite *a*.

Définition. Deux droites coplanaires fixes qui, pour une cause quelconque géométrique, ne peuvent se rencontrer, se nomment droites *parallèles*. Il est évident d'après cela que deux droites équidistantes sont forcément parallèles. Nous allons démontrer que réciproquement :

Théorème III. *Deux droites parallèles sont forcément équidistantes.*

Soient les droites parallèles *a* et *b* (fig. 3). Par un point quelconque P de l'une d'elles, la *b* par exemple, menons la perpendi-

culaire c à l'autre a, ainsi que la perpendiculaire d à c. Les droites d et a sont équidistantes (Théorème I), donc si la droite d se confond avec b, le théorème est démontré. Supposons que cela n'a pas lieu, alors, nous prenons de chaque côté de P, sur d, deux points M et N équidistants de P, et que nous menions les droites m et n perpendiculaires à la droite a, celles-ci couperont évidemment d[1]. Soient A et B les deux points d'intersection. Les droites m et n doivent être perpendiculaires à d, car autrement les droites perpendiculaires à m et n menées par M et N se raient équidistantes de a (Théorème I) et l'on aurait ainsi menées deux droites équidistantes de a par un même point, ce qui est contraire à l'énoncé du théorème II.

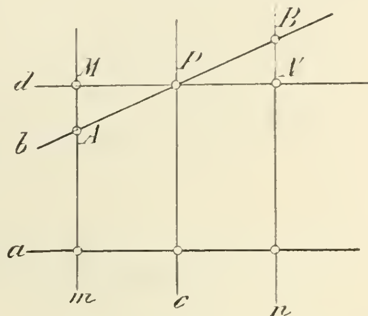


Fig. 3.

Les triangles APM et PBN sont, par conséquent, rectangles, et comme leurs côtés PM et PN sont égaux ainsi que les angles aigus opposés par le sommet P, ces triangles sont égaux ; donc AM = BN ; AP = PB. Donc, comme les droites a et d sont équidistantes, il résulte que les points de b se rapprochent de la droite a de quantité égales BN et MA pour des distances égales prises sur la dite droite b. Comme ces droites a et b sont fixes, elles doivent donc nécessairement se rencontrer ce qui est contraire à l'hypothèse. Les droites b et d doivent par conséquent se confondre et le théorème est démontré.

Scolie. De ce qui vient d'être démontré, il résulte que deux droites parallèles sont forcément équidistantes et qu'il est indifférent d'employer l'une ou l'autre de ces qualifications. Cependant comme le concept d'équidistance porte en lui-même celui de parallélisme, tandis que ce dernier semble, à premier abord, plus général, on emploiera uniquement le mot parallèle. Le théorème II s'énoncera alors ainsi :

Théorème. *Par un point situé hors d'une droite l'on ne peut mener qu'une droite parallèle à la première.*

---

[1] Si on conservait quelque doute à ce sujet, il disparaitrait en observant que la droite b, ayant entré par le point P dans la portion de plan enfermée par les droites a, b, m, n doit nécessairement en sortir, en coupant le contour en quelqu'autre point ; car l'aire en question est limitée, tandis que la droite est indéfinie ; or, le point de sortie de b ne peut se trouver sur d puisque b a déjà le point P commun avec cette droite, il ne peut, non plus, se trouver sur a puisque les droites a et b sont parallèles ; il doit donc se trouver sur m ou sur n. Supposons qu'il se trouve sur m et nommons-le A, alors, l'égalité des triangles déterminés par les droites d, b, n et d, b, m égalité démontrée plus bas sans se baser sur le point B, fait voir que b coupe aussi n.

C'est l'énoncé ordinaire du postulat d'Euclide; le reste de la théorie des parallèles euclidienne n'a donc pas besoin de subir aucune modification.

C. C. Dassen (Buenos-Aires).

CHRONIQUE

L'enseignement des mathématiques à l'Université.

Les vœux qui ont été exprimés au Congrès de Heidelberg en faveur de l'enseignement mathématique à l'Université sont sortis du vif sentiment d'une lacune de nos établissements supérieurs. Depuis que les sciences techniques ont pris dans tous les pays une importance considérable, on se préoccupe sérieusement de mettre l'enseignement des mathématiques au niveau des conditions actuelles de la Science et de la vie moderne. Rappelons donc les indications si utiles que contient l'un des vœux formulés par le 3e Congrès international des mathématiciens et signalons les à nouveau à l'attention des autorités scolaires :

Le *Congrès exprime le vœu que les établissements supérieurs obtiennent les moyens qui leur sont indispensables pour travailler à l'avancement des sciences mathématiques dans leur conception moderne et qui consistent principalement en la création de chaires nouvelles, de bibliothèques suffisamment fournies, de collections de modèles, et en l'installation de salles de dessin et de travaux pratiques.*

Ces conditions ne sont guère réalisées que dans quelques facultés, et la caractéristique de l'enseignement des mathématiques est encore, pour un grand nombre d'entre elles, l'insuffisance de l'organisation actuelle. Il importe donc de faire une étude critique de l'enseignement supérieur dans les principaux pays et d'en dégager les réformes à introduire.

Nous nous sommes déjà assurés plusieurs rapports embrassant un ensemble de questions et, au surplus, nous publierons sous la rubrique *Notes et Documents* divers extraits de plans d'études et d'autres documents officiels.

La Rédaction.

A propos de l'enquête sur la méthode de travail des mathématiciens.

Nous avons déjà eu l'occasion d'exprimer notre reconnaissance à tous ceux qui ont bien voulu répondre à notre questionnaire, mais nous manquerions aux devoirs de gratitude les plus élémentaires en ne remerciant pas nos confrères de la presse périodique scientifique qui ont contribué à faire connaître notre enquête. Grâce à leur précieux appui on continue à nous adresser des réponses. Le nombre des collaborateurs va donc en augmentant, et, bien que le dépouillement ait commencé, nous ne saurions trop insister auprès des retardataires pour qu'ils viennent encore grossir ce nombre.

Comme nous l'avons dit notre enquête ne manquera pas de fournir quelques indications utiles à l'enseignement; toutefois nous avons évité d'introduire dans le questionnaire toute demande visant spécialement les méthodes d'enseignement, les questions de ce genre devant faire l'objet d'une étude ultérieure. Les correspondances que nous avons eues à ce sujet, notamment une lettre de M. J. Richard (Dijon) et la lettre ci-après de M. G. Combebiac, ne nous laissent pas de doute sur l'utilité qu'il y aurait de consulter les professeurs sur des questions d'ordre méthodologique. Nous espérons donc pouvoir donner suite à notre projet dès que nous aurons terminé la publication des résultats de l'enquête sur la méthode de travail. Nous engageons tous ceux qui sont à même de faire des expériences de prendre note dès maintenant des observations qu'ils estiment devoir communiquer à leurs collègues.

Lettre de M. G. Combebiac (Limoges). — « Comme complément à l'enquête sur la méthode de travail des mathématiciens, n'y aurait-il pas intérêt à s'enquérir auprès des professeurs de mathématiques de la nature des difficultés qu'ils rencontrent le plus souvent pour faire pénétrer dans l'esprit de leurs élèves les matières qu'ils sont chargés d'enseigner ? »

« Les observations présentées par M. Andrade au Congrès de Heidelberg et publiées dans le numéro de l'*Enseignement* paru en janvier dernier fournissent déjà de précieux renseignements sur l'attitude, vis-à-vis des conceptions mathématiques, de jeunes gens ayant reçu une éducation professionnelle. Il serait fort intéressant de comparer ces observations avec celles auxquelles peuvent donner lieu les esprits qui ont été soumis à l'éducation classique. »

« L'intérêt d'une telle enquête n'est d'ailleurs pas limité aux conséquences qu'elle comporte pour le choix des méthodes d'enseignement; elle serait aussi, croyons-nous, fructueuse en données concernant la nature même des facultés mathématiques. »

« On a peut-être accordé trop d'importance au rôle de la logique pure en mathématiques, ainsi que le faisait observer M. L. Couturat dans la magistrale étude qu'il a publiée dans ce journal sur les *Définitions*. De fait, le raisonnement purement logique est très exceptionnel en mathématiques et n'est guère l'occasion de difficultés sérieuses. Le raisonnement mathématique met directement en œuvre les concepts mathématiques : spatiaux en Géométrie, numériques en Analyse, et le mathématicien raisonne sur des concepts par des procédés très comparables à ceux par lesquels le physicien expérimente sur des objets. Un bon mathématicien est un manieur de concepts mathématiques, comme Beethoven était un prodigieux manieur de sons et Hugo un manieur de mots. »

« Il est manifeste que ce n'est pas par un effort de logique que Weierstrass et d'autres ont rénové la théorie des fonctions et, avec elle, les bases de l'Analyse infinitésimale : ce résultat a été obtenu en fouillant plus profondément le concept de nombre ou plutôt celui de variable numérique, auquel les fondateurs de l'Analyse infinitésimale avaient inconsciemment substitué des concepts soit cinématiques soit purement géométriques, qui présentaient l'avantage d'être moins abstraits et, par suite, plus accessibles et plus maniables. »

« Quoi qu'il en soit, les mathématiciens manient des concepts mathématiques et non des concepts purement logiques. Toutefois, il est probablement possible d'édifier des théories purement logiques dont les diverses branches des Mathématiques ne seraient que des *applications* et qui, par suite, auraient une plus grande généralité que celles-ci. Mais ces théories logiques n'admettraient guère d'ailleurs d'application intéressante en dehors des mathématiques mêmes, de sorte qu'une telle généralisation paraît assez dépourvue d'intérêt. »

Académie royale des Sciences de Danemark ; prix proposé.

Question de Mathématiques mise au concours pour l'année 1905.
« Une arithmétique aux additions non-commutatives serait analogue à la géométrie non-euclidienne. Dès qu'on aurait reconnu la possibilité d'admettre dans une telle arithmétique, à côté des autres principes de l'addition et de la soustraction, celui de la multiplication univoque ainsi que le principe associatif de la multiplication et le principe distributif du multiplicateur et, en outre, le principe de la réciprocité univoque, qui ne permet pas les produits nuls résultant de facteurs dont aucun n'est égal à zéro, on pourra se servir des nombres d'une telle arithmétique comme déterminations relatives des positions dans une géométrie non-euclidienne. »

« Dans son mémoire sur les définitions du nombre, etc. (voir les *Mémoires* de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, 6me série, section des sciences II, 11, 1886, p. 508), T.-N. THIELE a indiqué la règle qu'il faut suivre en additionnant certaines déterminations numéroïdes (« *numérales* ») tridimensionales ; de plus, il y démontre que cette règle s'accorde avec les principes de l'addition et de la soustraction. On peut prouver que les *numérales* en question sont également soumises à quelques-uns des théorèmes principaux de la multiplication et de la division ; reste à savoir si, généralement, elles sont soumises à tous ces théorèmes. »

L'Académie met donc au concours la question suivante :

« Indiquer une règle de multiplication qui soit applicable aux *numérales* ci-dessus mentionnées et moyennant laquelle on obtienne des produits (aussi bien que des sommes) présentant la même forme tridimensionale qui caractérise les facteurs : — examiner ensuite si les théorèmes principaux de multiplication et de division y sont tous satisfaits. De plus, il serait à souhaiter qu'on examinât si les dites *numérales* sont susceptibles d'une interprétation géométrique. »

Les Mémoires peuvent être rédigés en danois, en suédois, en anglais, en allemand, en français et en latin. Ils ne doivent pas porter le nom de l'auteur, mais une devise, et être accompagnés d'une enveloppe cachetée portant la même devise et renfermant le nom, la profession et l'adresse de l'auteur. Le prix consiste en une médaille d'or de l'Académie, d'une valeur de 320 couronnes.

Les mémoires devront être adressés *avant la fin d'octobre 1906* au secrétaire de l'Académie, M. H.-G. ZEUTHEN, professeur à l'Université de Copenhague.

Académie royale des Sciences de Madrid ; prix proposé.

L'Académie a proposé pour le prix de mathématiques (année 1906) le sujet suivant :

« calculer et établir, sous forme de Tables, les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions transcendantes d'un usage fréquent dans les applications et pour lesquelles il n'existe pas encore de Tables. Les Tables devront être d'une étendue analogue à celle des Tables trigonométriques, l'approximation étant appropriée au but des Tables. »

Le texte accompagnant les Tables devra être rédigé en espagnol ou en latin. Les Mémoires sont reçus au Secrétariat de l'Académie, Calle de Valverde, 36, Madrid, jusqu'au 31 décembre 1906.

Le premier prix consiste en un diplôme, une médaille d'or et 1500 pesetas ; le second prix en un diplôme et une médaille d'or.

Congrès des mathématiciens allemands.

La prochaine réunion de l'Association allemande des mathématiciens (*Deutsche Mathematiker-Vereinigung*) aura lieu à *Meran*, du 24 au 30 septembre prochain, en même temps que la 77me réunion des naturalistes et médecins allemands. Comme par le passé, le comité d'organisation a fixé les domaines auxquels doivent se rapporter plus particulièrement les communications : *a)* Algèbre supérieure (arithmétique théorique) et sujets connexes se rapportant aux fonctions zeta de Riemann et à la théorie des nombres algébriques ; *b)* géométrie linéaire différentielle ; *c)* équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique.

Les communications doivent être annoncées à M. le Prof. A. Krazer, Carlsruhe, Westendst. 57.

Association britannique pour l'avancement des sciences.

La 75me réunion annuelle de l'Association britannique pour l'Avancement des Sciences aura lieu à *Cape Town* du 15 au 18 août et à *Johannesburg* du 29 au 31 août, sous la présidence de M. le Prof. G.-H. Darwin. La section des Sciences mathématiques et physiques sera présidée par M. le Prof. Forsyth.

NOTES ET DOCUMENTS

Sous ce titre nous publions des renseignements relatifs à l'organisation de de l'enseignement : créations nouvelles, programmes et règlements d'un intérêt général, liste des cours des principales Universités et Ecoles supérieures, etc.
La Rédaction.

Cours universitaires.

Semestre d'été 1905 *(suite)*.

Berlin ; *Universität*. — Schwarz : Integralrechnung, 4 ; Uebgn. dazu, 2 ; Anw. d. ellipt. Funktionen, 4 ; Ueber die Gaussische hypergeometrische Reihe, 2 ; Kolloquien, 2 ; Seminar, 3. — Frobenius : Th. d. algebr. Gleichungen II, 4 ; Seminar, 3. — Schottky : Lineare Differentialgleichungen,

4; Seminar, 3. — KNOBLAUCH: Th. und Anw. d. Determinanten, 4; Th. der Raumkurven und Flächen II, 4; Ausgewählte Kapitel der Theorie der ellipt. Funktionen, 1. — HETTNER: Ueber die Transzendenz der Zahlen e und π. — LEHMANN-FILHÉS: Differentialrechnung, 4; Uebgn. dazu, 1. — LANDAU: Einleitung in die Funktionentheorie, 4. — SCHUR: Analyt. Geometrie, 3; Zahlentheorie II, 4. — FÖRSTER: Geschichte der mittelalterlichen Astronomie, 2; Zur Theorie und Geschichte des Fernrohrs, 1; Theorie und Kritik der Raummessung, 2. — BAUSCHINGER: Th. der Störungen der Himmelskörper, 3; Uebungen zur Störungstheorie (im Seminar für wissensch. Rechnen, 1. — STRUVE: Praktische Astronomie, 3; Uebungen im Seminar des Recheninstituts, 1. — HELMERT: Methode der kleinsten Quadrate, 1; Schwerkraft und Gestalt der Erde, 1. — RISTENPART: Ueber Doppelsterne, 1. — MARCUSE: Theorie und Anwendung astronomischer Instrumente, 2; Einführung in die astronomische Geographie und kosmische Physik, 1 1/2.

Göttingen; *Universität*. — KLEIN: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte, 4; Seminar (Elektrotechnik), 2. — HILBERT: Zahlentheorie, 4; Logische Prinzipien des mathematischen Denkens, 2; Seminar (Elektronentheorie), 2. — MINKOWSKI: Differentialgleichungen, 4; Automorphe Funktionen, 2; Seminar (Elektronentheorie), 2. — RUNGE: Differential- und Integralrechnung I, 3; Uebgn. dazu, 3; Seminar (Elektrotechnik), 2. — BRENDEL: Versicherungsmathematik, 2; Uebgn. dazu, 2. — PRANDTL: Seminar (Elektrotechnik), 2; Technische Wärmelehre, 3; Maschinentechnik, 2; Praktikum, 3. — ZERMELO: Funktionentheorie. 4. — BLUMENTHAL: Analytische Geometrie, 4; Funktionentheoretische Uebungen, 2. — HERGLOTZ: Flächentheorie, 2. — ABRAHAM: Partielle Differentialgleichungen der Physik, 4; Uebungen, 1. — SCHWARZSCHILD: Himmelsmechanik I, 3; Populäre Astronomie, 1; Astronomisches Kolloquium, 2. — AMBRONN: Geographische Ortsbestimmungen, 2; Methode der kleinsten Quadrate, 2; Uebgn. dazu, 3.

Oxford; *University*. — Lecture List for Eastern and Trinity Terms, 1905 (à partir du 2 mai). Mathematics. — W. ESSON: Comparison of Analytic and Synthetic methods in the Geometry of Conics, 2; Informal Instruction in Geometry, 1. — E. B. ELLIOT: A First Course on the Theory of Functions, 3. — A. E. H. LOVE: Waves and Sound, 2. — J. W. RUSSELL: Algebra of Quantics (concluded), 1. — A. L. DIXON: Calculus of Variations, 1. — J. E. CAMPBELL: Application of moving axes to Solid Geometry, 1. — H. T. GERRANS: Line Geometry, 2. — A. E. JOLLIFFE: Higher Analytical Plane Geometry, 2. — P. J. KIRKBY: Higher Plane Curves, 2. — J. W. RUSSELL: A Course of Rigid Dynamics (two dimensions), 3. — R. F. MCNEILE: Series and Continued Fractions, 2. — A. L. PEDDER: Spherical Trigonometry, 1. — C. H. SAMPSON: Solid Geometry, 2. — C. H. THOMPSON: Differential Equations, 2. — C. E. HASELFOOT: Geometrical Optics, 2.

Vienne; *Université* (du 20 avril à fin juillet). — G. VON ESCHERICH: Funktionenth., 5; Proseminar für Math., 1; Seminar für Math., 2; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3. — Fr. MERTENS: Algebra (Fortsetzung), 5; Uebungen im math. Proseminar, 1; Math. Seminar, 2; Mathematische Statistik, 3. — W. WIRTINGER: Elemente der Differential- und Integralrechnung, 5; Uebg. dazu, 2; Math. Proseminar, 1; Math. Seminar, 2. — G. KOHN: Synthetische Geometrie (Forts.), 4; Nichteuklidische Geometrie, 2. — A. TAUBER: Versicherungsmathematik (Forts.), 6. — Ernst BLASCHKE: Einführung in die

mathematische Statistik, II. Teil, 3. — K. CARDA : Lineare kontinuierliche Gruppen, 2. — J. PLEMELJ : Theorie der hypergeometr. Diff.-Gl., 2. — J. GRÜNWALD : Liniengeometrie (Forts.), 2. — Edm. WEISS : Praktische Astronomie, 4. — J. VON HEPPERGER : Astrophysik, 3 ; Bahnbestimmung von Doppelsternen, 2. — Robert SCHRAM : Interpolationsrechnung und mechanische Quadratur, 2. — Norb. HERZ : Anwendung der elliptischen Funktionen in der Astronomie. 2 ; Kartennetze, 2. — Adalbert PREY : Die Schweremessungen, 2.

Pendant le semestre d'hiver 1904-1905, l'Université de Vienne a compté 8233 étudiants, dont 1950 auditeurs.

BIBLIOGRAPHIE

Alf. CAPELLI. — **Elementi di Aritmetica Ragionata e di Algebra** ad uso del l'istruzione secondaria. Libro III. I numeri negativi. — 1 vol. 112 p. ; prix : L. 1.80 ; Pellerano, Naples, 1904.

Ce fascicule, qui fait suite aux Livres I et II consacrés aux nombres naturels, a pour objet les nombres négatifs. L'auteur y examine la théorie des opérations fondamentales présentée dans toute sa rigueur scientifique. Il s'efforce à faire ressortir l'importance des nombres négatifs dans la résolution de problèmes simples de l'analyse indéterminée et pour le principe de l'identité entre polynomes établis à l'aide de la règle de Ruffini. On y trouve également les premiers principes de la théorie des congruences à titre d'introduction à la théorie des nombres.

La notion de nombre négatif est rendue intuitive à l'aide d'une série d'interprétations empruntées à la Géométrie, la tenue de livres et l'Electrostatique.

A chaque paragraphe sont joints des « notes et exercices ».

Ernest KALLER (Vienne).

Claro-C. DASSEN. — **Tratado elemental de Geometriá Euclideá.** Tome I, *Geometria plana.* — 1 vol. in-12°, XXXII + 319 pages, 240 figures. Coni Hermanos, Buenos-Ayres, 1904.

Les élèves des écoles secondaires de l'Argentine n'ont guère eu jusqu'à ce jour entre les mains que des manuels dont les auteurs se bornaient à suivre les vieilles méthodes, à peine d'accord avec la saine logique, et à serrer d'aussi près que possible les programmes officiels rédigés plus d'une fois par des personnes profanes en la matière. M. Claro-C. Dassen s'est proposé d'écrire pour eux un traité élémentaire plus en harmonie avec les idées modernes et les méthodes rigoureuses qui doivent régler l'enseignement de la géométrie. Il faut, ainsi que le disait M. Veronese au congrès de

Paris de 1900, que l'auteur d'un nouveau traité de géométrie élémentaire se propose pour objet de concilier les exigences de la science avec celles de l'enseignement et de l'intelligence moyenne de ses élèves — que les professeurs aient foi au progrès de la science et se gardent des préjugés.

Pour remplir ce but, l'auteur a commencé par écarter absolument toute préoccupation de programme; libre de ce côté, il a pu ordonner son livre suivant le plan qui lui paraissait le meilleur, et voici celui qu'il a adopté. Les travaux de Lobatschefsky, Bolyai et de leurs continuateurs ayant définitivement proclamé l'indépendance absolue du postulat euclidien à l'égard des autres postulats fondamentaux de la géométrie, M. Dassen le sépare nettement des autres et fait deux parts bien distinctes de son livre.

Dans la première partie, sous le titre de *Principes communs aux géométries non-euclidiennes*, il range toutes les propositions indépendantes du postulat des parallèles et constituant la géométrie générale; cette première partie (pages 1-130) contient trois chapitres :

I. L'espace et les êtres géométriques, définitions, postulats de l'espace, de la droite et du plan. — Les angles et la circonférence;

II. Mesure des longueurs et des angles;

III. Les triangles et leurs applications les plus immédiates; circonférences, arcs et cordes.

La seconde partie de l'ouvrage, la plus étendue, et divisée en deux livres, contient l'exposé des principes spéciaux à la géométrie euclidienne. M. Dassen prend pour point de départ de sa théorie des parallèles un postulat qui n'est ni celui d'Euclide, ni celui que nous avons l'habitude de lui substituer. Préoccupé particulièrement de n'utiliser que les axiomes appelés *pratiques*, c'est-à-dire nécessaires pour les applications de la géométrie, et, en partant de la base de notre espace actuel, d'énoncer seulement les propriétés fondamentales que l'expérience, aidée de l'intuition et de l'imagination, nous autorise à établir, il ne veut, pour un traité élémentaire destiné à des élèves qui étudient la géométrie pour la première fois et que leurs études doivent conduire rapidement aux applications, employer que des postulats en relation avec des figures pouvant s'observer. Dans un champ d'observation quelconque, l'expérience montre que *deux droites qui se rapprochent d'un côté s'écartent de l'autre*[1]. Donc deux droites coplanaires perpendiculaires à une troisième sont équidistantes, et par un point situé hors d'une droite on peut tracer une et une seule droite qui en soit équidistante. Enfin il y a identité entre les parallèles et les équidistantes.

La marche est plus longue que dans les ouvrages classiques usités en France, mais la méthode de M. Dassen a peut-être l'avantage de se présenter plus nettement devant les jeunes élèves et de mieux parler à leur imagination. Peu importe la route suivie, pourvu qu'elle soit large et nette, et conduise au but sans détour. La suite du chapitre I et le chapitre II contiennent les applications immédiates des parallèles et les parallélogrammes, et le chapitre III donne la mesure des angles inscrits à la circonférence avec ce qui s'y rapporte ; ici l'auteur place le théorème sur l'existence des polygones réguliers inscrits et circonscrits, il nous semble que cette proposition pourrait être mise sans inconvénient dans la première partie du livre, car elle dépend de la géométrie générale.

---

[1] Voir du même auteur, dans le n° de janvier 1904 (pages 47-57) l'article qui a pour titre : *Théorie des parallèles basée sur un postulat plus évident que ceux employés ordinairement* (Voir aussi le présent numéro, p. 235 à 238, *Réd*).

Les trois chapitres suivants contiennent respectivement la théorie de la proportionnalité et des figures semblables, les relations métriques et la mesure des aires. Pour le rectangle, l'auteur se borne avec raison au cas où la hauteur et la base ayant une partie commune, la figure est décomposable en carrés.

Chaque partie du livre de M. Dassen est suivie d'un résumé renfermant l'énoncé des principales propositions et d'un choix d'exercices. Les élèves doivent apprendre le résumé par cœur; cette concession aux vieilles méthodes d'enseignement n'est peut-être pas une chose mauvaise en soi, mais nous croyons qu'il vaudrait mieux que le professeur donnât comme tâche à ses élèves de faire ce résumé eux-mêmes.

Le tome II, *Geometria del Espacio* est actuellement sous presse.

P. Barbarin (Bordeaux).

F. Dumont. — **Introduction à la Géométrie du 3me ordre.** — 1 vol. de IX, 308 p., Depallier & Cie, Annecy. 1904.

Au cours du 19me siècle la Géométrie du 3me ordre a reçu d'importants développements qui, pour la plupart, ont leurs points de départ dans les travaux fondamentaux des mathématiciens anglais Cayley, Salmon et Sylvester et du géomètre suisse Steiner. Toutefois ce ne sont encore que des études partielles ayant en vue soit les propriétés analytiques, soit les propriétés projectives et il serait à souhaiter qu'un jeune géomètre, dominant à la fois les théories analytiques et synthétiques, entreprît une étude d'ensemble sur les courbes et les surfaces du 3me ordre. Dans l'état actuel de la Science un pareil traité ne saurait tarder.

Quoi qu'il en soit le présent ouvrage, modestement intitulé *Introduction à la Géométrie du* 3me *ordre*, apporte une importante contribution à un exposé systématique de cette branche ; il fournit en même temps une utile préparation à l'étude des travaux récents sur les courbes et les surfaces algébriques.

M. Dumont a réuni dans ce volume les éléments essentiels de la Géométrie du 3me ordre en tenant compte des divers points de vue auxquels se sont placés les auteurs. Il examine d'abord la Géométrie sur une droite, puis il présente les propriétés générales des cubiques planes en étudiant successivement les divers modes de génération, les pôles et polaires, la classification des cubiques planes, les systèmes de cubiques et leurs transformations.

La partie principale de l'ouvrage est la théorie des surfaces du 3me ordre. L'auteur la fait précéder d'une étude des cubiques gauches, puis il passe en revue les principaux modes de génération de la surface générale du 3me ordre. Viennent ensuite les singularités de ces surfaces, les pôles et polaires, la classification et les transformations des surfaces cubiques, les représentations d'une surface cubique sur un plan, etc.

Toutes ces questions, d'une grande diversité par leur objet, sont présentées avec beaucoup de clarté. L'auteur a eu soin de les accompagner d'un intéressant choix d'exercices à résoudre.

J.-S. Mackay. — **Plane Geometry, practical and theorical.** Books I, II, III 1 vol. in-16°; London and Edinburgh, W. & R. Chambers limited, 1904.

Dès que les fondements de la Géométrie sont devenus le sujet d'utiles discussions, les traités élémentaires à l'usage de l'enseignement ont béné-

ficié d'heureuses innovations. En Italie particulièrement le réveil s'est accentué plus que dans les autres pays et surtout après les puissantes recherches d'un savant professeur de l'Université de Padoue, M. le sénateur Veronese. Après la publication de ses « *Fondamenti della Geometria* », en 1891, il a paru un grand nombre de traités, qui presque tous ont adopté les mêmes idées fondamentales, bien que quelques-uns aient oublié de rappeler l'auteur principal. Toutefois plusieurs de ces traités n'ont pas su maintenir l'unité scientifique et didactique qui doit caractériser l'exposé d'une discipline élémentaire. Dans les autres nations aussi et particulièrement en France et en Angleterre, où quelques-uns de nos livres[1] ont su s'ouvrir une voie glorieuse, des savants géomètres ont consacré[2] leur activité à réformer l'enseignement des éléments de géométrie. Parmi ceux-ci se trouve précisément M. Mackay, le savant professeur de l'Université d'Edimbourg, dont nous avons admiré des recherches historiques sur plusieurs théorèmes et théories géométriques. Il nous présente un traité qui est inspiré des idées modernes sur la réforme euclidienne. Ce domaine donne encore lieu à bien des discussions scientifiques et didactiques, aussi M. le professeur Mackay voudra-t-il bien me permettre quelques observations sur son livre, le meilleur certainement parmi tous les traités anglais élémentaires que j'ai pu lire pendant ces dernières années. Je prendrai, non comme terme de comparaison, mais comme base de mes observations, les idées fondamentales de M. le professeur Veronese qui, selon moi, représentent ce qu'il y a aujourd'hui de mieux sur ce sujet en Italie comme dans les autres pays.

Je dois avant tout noter que si dans sa première partie ce livre nous présente des défauts, ils sont spécialement dus aux programmes officiels, auxquels l'auteur a dû se conformer.

Le traité de M. Mackay se subdivise en trois livres qui embrassent les quatre premiers livres classiques des Eléments d'Euclide ; mais ils sont précédés d'une introduction destinée à familiariser les élèves avec les termes géométriques, l'usage des instruments et les propriétés les plus intuitives de certaines figures, tout suivi de l'exposition de nombreux *expériments* (l'auteur déclare les nommer expériments et non exercices car la Géométrie n'est pas une science expérimenfale). Or, le système de tirer de l'expérience le motif à notions élémentaires, claires et précises, est certainement plus raisonnable que celui de donner des définitions aprioristiques et formelles qui très souvent ou sont démenties dans la suite du livre, ou doivent être modifiées et corrigées. Il ne sera jamais répété suffisamment, observe M. Veronese dans ses *Elementi della Geometria*, que la Géométrie élémentaire a son fondement naturel dans l'observation des faits extérieurs, c'est-à-dire dans l'intuition ; elle ne doit donc jamais se montrer aux élèves comme un système de symboles auxquels on assigne arbitrairement des propriétés déterminées, comme encore aujourd'hui on le rencontre dans certains travaux sur les principes de la Géométrie, sans s'inquiéter si elles correspondent ou non à l'observation. Mais avec tout cela il ne me semble pas recommandable de passer de la connaissance d'un instrument à une notion des plus importantes et controversées en disant (page 6) que « si la circonférence d'un cercle était divisée en 360 parties égales, chaque partie se nommerait degré : si les deux

[1] Voyez, par exemple, la traduction française des *Eléments de Géométrie* de A. FAIFOFER (Paris, A. Rogier).

[2] Je veux mentionner particulièrement les savantes recherches de M. le Professeur J.-M. HILL.

extrémités de ce petit arc étaient jointes au centre, on formerait ici un angle nommé angle d'un degré ». De cette manière déjà avant la notion claire d'angle, le jeune enfant devrait avoir celle d'angle au centre et de sa mesure.

Les « expériments » qui suivent ces notions devraient plutôt s'intituler « Eléments de dessin géométrique », car ils mènent à la construction des arcs, aux sommes et différences d'angles, à la pratique du rapporteur dans la construction de la perpendiculaire à une droite, à la construction de *figures* à quatre côtés qui forment des angles droits, à la construction de triangles et ses axes de symétrie, de polygones étoilés, etc. Toutefois, il serait bon de définir la somme ou différence de deux segments et le produit d'un segment par un nombre entier : l'élève aurait ainsi une juste notion de ce que sont ces opérations étendues à la Géométrie.

Et nous voilà (page 19) au *Livre I (angles, triangles, parallèles, parallèlogrammes)*, et aux définitions du point, de la ligne, de la surface, du corps : « un point à position mais non grandeur ». Pour des jeunes enfants dont l'intelligence commence à peine à se développer, une affirmation aussi laconique, et avant même qu'ils aient l'idée de ce que peut être une grandeur, n'est guère évidente. De même il ne me semble pas propre que de définir la ligne (page 19) comme celle qui « a position et a longueur », ajoutant après « qu'on dit de la ligne qu'elle possède *une dimension*, c'est-à-dire, longueur ». Quel besoin y a-t-il de faire intervenir l'idée de *dimension*, bien autrement que simple et dont on n'a pas besoin pour traiter des points, des droites, des cercles, etc.? Même remarque pour les définitions qui suivent et particulièrement pour celle du *solide* « portion de l'espace limitée par une ou plusieurs surfaces ». Nous savons que si l'on transporte idéalement un solide géométrique dans un autre lieu, il y a encore de l'espace où le corps se trouvait auparavant : les conclusions que l'on pourrait tirer de cette définition sont donc bien claires. — La définition d'angle qui vient compléter celle donnée dans l'introduction me semble incomplète : « si deux droites sont menées d'un même point, on dit qu'elles renferment un angle ». L'élève ne remarquera-t-il pas que deux régions du plan déterminées par les deux droites correspondent à la définition d'angle ? Pour les parallèles l'auteur adopte la définition euclidienne « si étant dans le même plan et prolongées elles indéfiniment ne se rencontrent pas ». Cette définition, quoique encore bien répandue, n'est plus acceptable, car nous ne pouvons imaginer les droites prolongées que d'une quantité finie, tandis que les droites géométriques sont infinies ; en outre, les propriétés géométriques qui nous permettent de *vérifier* le parallélisme, se rapportent à la portion du plan qui nous est accessible. J'ai la conviction que, d'après les travaux modernes sur les fondements de la Géométrie, il est plus rationnel, scientifiquement et didactiquement, d'adopter la définition, indépendante de la notion de plan, proposée par le savant professeur Veronese qui est plus conforme aux exigences géométriques de nos jours : après la définition des figures opposées par rapport à un point et celle de transversale de deux droites, il dit que « deux droites sont parallèles si l'une d'elles contient deux points opposés à deux points de l'autre par rapport au milieu d'une transversale commune ». Cette définition, qui contient aussi la construction de la parallèle à une droite donnée, modifie le postulat euclidien en disant que « si deux droites sont parallèles, elles sont des figures opposées l'une à l'autre par rapport au milieu de chacun de ses segments transversaux ». Ce postulat est par lui-

même objectif, pouvant être vérifié, dans les limites de notre expérience, avec la plus grande approximation. — Les propriétés des parallèles et les démonstrations se trouvent aux pages 94 et suivantes, tandis qu'en adoptant la définition ci-dessus, ces propriétés pourraient s'énoncer dès le début, avant même de la définition du plan et de l'angle.

A la page 47 est la définition de *figures congruentes* (qui sont égales sous tous les aspects) et l'auteur dit que la méthode qui sert pour montrer la congruence des figures s'appelle méthode de superposition. A propos de cette définition de la congruence, j'estime, avec M. Veronese, qu'une telle méthode conduit à autant de définitions d'égalité qu'il y a de catégories de figures dans la Géométrie élémentaire, car l'idée d'égalité en Géométrie est une conséquence directe de la logique plus simple : « il faut donc, observe le savant professeur de l'Université de Padoue, donner tout de suite la définition qui correspond à la notion commune d'égalité et de laquelle se déduisent la correspondance univoque et l'égalité des segments correspondants : conceptions simples et intuitives qui restent fondamentales dans la Géométrie et qui, étant utilisées dans tous les cas d'égalité des figures, servent aussi d'analogie pour la définition de similitude ». Et de ces analogies, comme des différences entre les objets géométriques, ressort l'incontestable supériorité de cette méthode sur toutes les autres[1].

Ceux qui se conforment encore aux méthodes anciennes, ceux qui recourent encore au postulat du mouvement sans déformation pour définir et démontrer l'égalité des figures, et dans cette large catégorie est aussi M. Mackay, ne réussiront jamais à prouver qu'ils obtiennent par ce moyen la rigueur scientifique que l'on doit trouver même dans un manuel élémentaire.

Cette observation s'applique aussi à la définition (page 47) des figures équivalentes comme « celles qui ont aires égales ». Et qu'est-ce que c'est l'aire d'une figure si la notion d'aire n'a pas encore été donnée? En effet, cette notion est le fondement du deuxième livre, encore un peu loin. Les difficultés que présente la démonstration des constructions à la page 61 (problèmes 15, etc.) disparaissent si l'on admet la définition « sont équivalentes les figures qui sont formées ou peuvent se décomposer dans le même nombre de parties respectivement égales. »

Le Livre II, consacré à la *mesure des figures planes*, est très bien fait. Comme on devait s'y attendre, par suite de la définition d'équivalence adoptée par l'auteur, on trouve démontrés ici les principaux théorèmes sur les figures équivalentes. Le théorème de Pythagore est exposé non seulement avec la démonstration ordinaire, mais aussi à l'aide de celles de Schooten (*Exercitationes mathematicæ*, 1657, p. 111) et de Perigal. De tous ces théorèmes l'auteur donne les applications algébriques. Une large collection d'applications et de problèmes accompagne chaque théorème.

Vient ensuite le Livre III, intitulé *le cercle*. Les propositions ordinaires sur les rayons, cordes, angles au centre et angles inscrits, etc., sont démontrées avec beaucoup de clarté et de soin. Les propriétés de l'axe radical de deux cercles ou de trois cercles considérés deux à deux, comme les problèmes qui s'y rapportent, méritent des éloges particuliers. Il en est de même de la construction des tangentes et des questions relatives aux triangles ins-

---

[1] VERONESE, *Fondamenti della Geometria* (traduction allemande de M. A. Schepp, Teubner, 1894). — Voir la Préface.

crits ou circonscrits à une circonférence. On trouve aussi en deux pages un bref exposé de la Géométrographie, sujet sur lequel l'auteur avait déjà écrit une note très intéressante avec des modifications aux notations de M. Lemoine.

En conclusion donc on peut dire que dans son ensemble ce livre forme un bon traité. Parmi les défauts que j'ai voulu poser en évidence, les uns sont dus aux méthodes anciennes auxquelles un grand nombre d'auteurs n'ont pas encore voulu renoncer; les autres sont la conséquence des programmes officiels dont l'auteur a nécessairement dû tenir compte. L'ouvrage de M. Mackay n'en constitue pas moins un progrès sur les Eléments euclidiens en usage chez les Anglais.

Prof. C. Alasia (Tempio, Sard.).

W. Pflieger. — **Elementare Planimetrie**. — Collection Schubert, 1 vol., 430 p., prix: Mk. 4.80. G. J. Göschen, Leipzig.

Ce traité de Géométrie plane contraste avec la plupart des manuels en usage dans les pays de langue française. L'auteur a abandonné la tradition de l'enseignement de la Géométrie d'après les Eléments d'Euclide. Il s'est proposé, d'une part, de grouper autant que possible dans un même chapitre les propositions se rapportant au même sujet; d'autre part et surtout d'exposer la Géométrie suivant un ordre plus naturel; il veut introduire les notions géométriques comme elles se présentent à notre esprit au cours de son développement.

Ainsi les notions de circonférence, arc, corde, secteur sont introduites dès le début de l'ouvrage. L'avantage de cet arrangement est de permettre dès les premières leçons des applications graphiques. La notion de la bande (*Streife*) joue un grand rôle dans la première moitié du volume. C'est une faute, dit l'auteur dans la préface, de ne pas apprendre à l'enfant qui chaque jour voit dans ses cahiers des bandes et des séries de bandes, quelles sont les propriétés de ces figures et le parti qu'il en peut tirer.

Une autre préoccupation de l'auteur a été de choisir les démonstrations les plus propres à faire ressortir la signification et la valeur des théorèmes. Souvent les démonstrations à l'aide d'égalités de triangles sont artificielles; et comme du reste, l'auteur n'introduit les triangles que fort tard, ses démonstrations diffèrent beaucoup des démonstrations classiques: la symétrie des figures y joue un rôle capital.

Les axiomes nécessaires ont été bien mis en relief. Nous devons signaler surtout le soin apporté à l'introduction et à la jusification du calcul des grandeurs géométriques. Les lois de ce calcul sont explicitement énoncées et leur identité avec les lois du calcul algébrique est bien mise en évidence.

Chaque paragraphe est accompagné de nombreux exercices très judicieusement choisis.

Voici une brève analyse des premiers chapitres.

Le premier traite des éléments des figures, corps, surfaces, lignes, points. La longueur (*Strecke*) fait l'objet du second chapitre. Les lois de l'addition et de la soustraction des longueurs sont explicitement indiquées et l'auteur introduit comme axiomes la loi de l'addition (interversion des termes) et l'existence de la différence de deux longueurs. De la notion de longueur est déduite celle de la face plane.

Dans le chapitre suivant, le prolongement d'une longueur, d'une face plane,

d'un corps, conduit aux notions de ligne droite, de plan et d'espace (éléments infinis).

Le chapitre IV introduit les notions d'égalité et d'équivalence des figures finies, puis des figures infinies. Il est montré à ce propos comment certaines propositions vraies pour des éléments finis quelconques cessent de l'être lorsque ces éléments sont prolongés indéfiniment.

Le cercle et l'angle, tel est le titre du chapitre V. La définition et les propriétés élémentaires du cercle sont suivies des théorèmes sur les secteurs, les arcs et les cordes correspondants. L'angle est défini comme limite d'un secteur dont le rayon devient infini. L'auteur se fait alors scrupule d'étendre sans autre aux angles les théorèmes démontrés pour les secteurs. Il *postule* que les théorèmes valables pour des secteurs de rayon fini quelconque le sont encore lorsque le rayon devient infini, lorsque le secteur devient un angle.

Nous laissons l'analyse détaillée de l'ouvrage et signalons seulement quelques points caractéristiques.

Dans la théorie des parallèles, l'auteur est tout naturellemnnt conduit à prendre pour axiome[1] une proposition qui renferme l'axiome classique et revient à peu près à dire que deux angles correspondants formés par deux parallèles et une transversale sont toujours égaux.

Le parallélogramme est étudié comme partie commune à deux bandes; cette étude est suivie de celle du trapèze.

C'est seulement au commencement du second tiers du volume, après l'étude des propriétés des tangentes à une et deux circonférences et des angles inscrits, que l'auteur place la théorie du triangle. Il peut alors grouper dans un même chapitre tout ce qui a trait à cette figure et développer les propositions les plus essentielles de la géométrie du triangle.

Très remarquables quant à l'exposition nette et précise, sont les chapitres XII et XIV se rapportant l'un à la comparaison et au calcul des surfaces, l'autre à la mesure des grandeurs géométriques et aux lignes proportionnelles.

La dernière partie renferme l'étude des points et rayons harmoniques, des pôles et polaires, de l'inversion et des faisceaux de cercles. Les définitions des points et rayons harmoniques sont choisies de manière à mettre en relief le principe de dualité et à éviter les fonctions goniométriques.

Cet ouvrage rendra de grands services à ceux qui sont chargés de l'enseignement de la géométrie élémentaire; ils pourront y trouver un précieux choix d'exercices bien gradués et d'utiles indications pour leur enseignement.

C. Jaccottet (Lausanne).

Colonel J. Sornein. — **Essai sur l'origine et les fondements de la Géométrie.** 1 vol. in 8° de 360 pages. Le Maout. Cherbourg, 1904.

La solution de la question des Fondements de la Géométrie admet un premier stade, qui peut être défini par la proposition suivante:

En prenant pour base l'idée de figure (comportant notamment les notions

[1] « Bei der Vergleichung der Winkel sind Streifen und Streifenhälften nicht zu berücksichtigen. » Dans la comparaison des angles, on ne tiendra pas compte des bandes et des demi-bandes.

de point, ligne, surface et continuité), déduire d'un certain nombre de propositions non démontrées ou « axiomes » les théorèmes principaux de la Géométrie vulgaire ou métrique.

Tel est l'objet essentiel de l'ouvrage de M. le colonel Sornein.

Conformément aux errements suivis jusqu'à présent dans les ouvrages où la question est traitée sans emploi de l'Analyse mathématique, celui-ci ne comprend pas le « déplacement sans déformation » (Bewegung) parmi les concepts fondamentaux et par suite n'en fait pas l'objet d'axiomes. Mais il diffère de ces ouvrages par l'emploi d'un nombre très restreint de concepts fondamentaux et d'axiomes — trop restreint, pensons-nous ; car nous n'oserions pas affirmer que le système de fondements exposé au titre I constitue une base suffisante pour établir rationnellement une *métrique*, et il ne serait peut-être pas difficile, en examinant attentivement les démonstrations des premiers théorèmes, de découvrir les propriétés qui y sont employées sans avoir été explicitement énoncées : ces propriétés ne sont autres d'ailleurs que celles qui sont exprimées par les axiomes adoptés dans les travaux récents, par exemple dans le Mémoire maintes fois couronné de M. Hilbert.

Au surplus l'intérêt principal de l'ouvrage réside, à notre avis, dans les parties consacrées à la démonstration des principaux théorèmes de la Géométrie suivant un ordre très judicieux.

Une fois acquises les notions de distance, de congruence et de droite, la sphère est définie comme lieu des points équidistants d'un point déterminé, puis est introduite la circonférence comme intersection de deux sphères. On démontre alors les principales propriétés ressortissant à la Géométrie sphérique, qui se trouve ainsi établie indépendamment de la notion de plan, ce qui est conforme à la nature des choses.

Alors seulement est défini le plan comme lieu des points équidistants d'un point déterminé, et l'on *démontre* qu'une droite qui a deux de ses points dans un plan y est située toute entière.

On démontre également les propriétés fondamentales du plan au point de vue métrique, telles que sa faculté de se recouvrir par rotation autour d'une de ses normales et par retournement autour d'une de ses droites ; puis sont démontrés les cas d'égalité des triangles à l'exception du troisième, qui constitue la définition même de l'égalité, ainsi qu'il convient puisque la notion de distance a été prise pour base de la Métrique. On aborde enfin la théorie des parallèles ; mais ici nous déclarons ne pouvoir suivre l'auteur dans ses considérations un peu déconcertantes sur les segments infinis.

Signalons, en terminant, quelques réflexions particulièrement heureuses sur l'origine de la Géométrie, qui se trouvent dans l'avant-propos.

G. Combebiac (Limoges).

A. Tresse et Thybaut. — **Cours de géométrie analytique** à l'usage des candidats à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures, aux Ecoles des Mines, à l'Ecole des Ponts et Chaussées et des élèves de première année de mathématiques spéciales. — 1 vol. gr. in-8°, 549 p. ; prix : fr. 12.— ; Librairie Armand Colin, Paris, 1904.

Les lecteurs de *L'Ens. math.* ont eu sous les yeux les renseignements généraux sur l'esprit dans lequel ont été faites les modifications au programme de l'Ecole centrale de Paris (v. 5me année, p. 57 et suiv., 1903). Ils savent que « les modifications apportées au programme ont été faites dans le but de le *simplifier*, de le *préciser* et de le *développer* dans le sens dans lequel les

élèves eux-mêmes sont appelés à se diriger après leur entrée à l'Ecole ». Pour ce qui concerne particulièrement la Géométrie analytique le programme a été considérablement réduit, pour le ramener aux notions essentielles indispensables aux ingénieurs.

C'est en s'inspirant de ces idées que MM. Tresse et Thybaut ont rédigé ce Cours de Géométrie analytique. Nous nous empressons de dire qu'ils ont pleinement atteint leur but ; leur traité sera examiné avec intérêt par tous ceux qui enseignent la Géométrie analytique.

Voici les grandes divisions de l'Ouvrage :

Géométrie plane. — I. Préliminaires. — II. Droite et circonférence. — III. Courbes planes. — IV. Les trois coniques. — V. Etude sommaire des courbes du second degré.

Géométrie dans l'espace. — VI Droite, plan et sphère. — VII. Notions sur les courbes et les surfaces. — VIII. Les cinq quadriques. — IX. Etude sommaire des surfaces du second degré.

A signaler, entre autres, qu'en raison de l'importance des notions fondamentales sur les courbes planes, les auteurs ont étudié d'une manière très approfondie le problème de la construction d'une courbe et les divers modes de définition d'une courbe. H. F.

Ernest Wienecke (Berlin). — **Der geometrische Vorkursus** in schulgemässer Darstellung. Mit reichem Aufgabenmaterial nebst Resultaten. Zum Gebrauch an allen Lehranstalten bearbeitet. Mit 59 Fig. — 1 vol. cart. in-8, 97 p. ; prix : Mk. 2,20 ; B.-G. Teubner, Leipzig, 1904.

Les leçons destinées à fournir une introduction à l'enseignement de la Géométrie élémentaire ont une importance capitale et exigent beaucoup de soin de la part du maître. Et cet effort doit se porter non seulement sur la partie didactique, mais également, dans une certaine mesure, sur les considérations d'ordre philosophique. Ces conditions se trouvent précisément remplies dans ce petit ouvrage, d'une conception originale, et qui sera lu avec profit par tous ceux qui sont chargés de l'enseignement des premières notions de Géométrie.

Dans l'introduction il examine ce que doit être un pareil enseignement propédeutique. Il expose ensuite les notions fondamentales et la mesure des solides. Le tout est accompagné d'exemples, fort bien choisis, et destinés à rendre intuitives ces premières notions.

A côté de ces excellentes qualités, ce manuel présente pourtant de petits défauts : ainsi les figures des solides laissent beaucoup à désirer (v. p. ex. p. 5) ; la notion de *perpendiculaire* se trouve, identifiée une fois avec celle de *verticale* (p. 21), puis avec celle de *normale* (p. 40) ; pourquoi calculer un volume avec 7 décimales, alors que l'on prend $\pi = 3{,}14$? D'autre part une lecture attentive des épreuves aurait permis d'éviter les fautes d'impression et de calculs qui se sont glissées dans les problèmes, d'ailleurs fort bien choisis. Ernest Kaller (Vienne).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaire des principaux périodiques:

American Mathematical Monthly (The), edited by FINKEL, L.-E. DICKSON, S. EPSTEEN. — Drury College, Springfield, Miss.

Vol. XI, 1904 ; nos 10 et 12. — E.-D. ROE : On complete symmetric Functions. — G.-A. MILLER : Two infinite Systems of Groups generated by two Operators of Order Four. — D.-N. LEHMER : On a Cylinder the Intersection of which with a Sphere will Delelop into an Ellipse. — G.-A. MILLER : The Substraction Groups. — ZERR : The Sinking-Fund of the United-States. — L.-E. DICKSON : A property of the Group $G_2{}^{2n}$. — Osw. VEBLEN : The Trancendence of π and e. — R.-P. BAKER : A Balance for the Solution of Algebraic Equations. — G.-A. MILLER : Groups of Elementary Trigonometry. — R.-P. BAKER : The Expression of the Areas of Polygons in Determinant Form.

Vol. XII, 1905, nos 1, 2, 3. — A.-S. HAWKESWORTH : Some New Ratios of Conic Curves. — G.-B. HALSTED : Non-Euclidean Spherics. — J.-V. COLLINS : Uses of the special triple Product ab^r of Extensive Quantities. — G.-A. MILLER : Note on the Totient of a Number. — R.-E. MORITZ : A General Theorem in Local Probability. — R.-A. HARRIS : Numerals for Simplifying Addition. — F.-P. MATZ : The convexe surface of an Oblique Cone.

Solutions of Problems. — Problems for Solution.

Annales de la Société scientifique de Bruxelles. — 28me année 1903-1904. Louvain, 1904.

4me fascicule. — H. BOSMANS : La méthode d'Adrien Romain pour effectuer les calculs des grands nombres.

Archiv der Mathematik und Physik, herausgegeben von E. LAMPE, W.-Fr. MEYER. E. JAHNKE. Dritte Reihe ; B.-G. Teubner, Leipzig.

B. 8, Hefte 3 u. 4 — GULDBERG : Ueber lin. homog. Differenzengleichgn. — HAYASHI : On reciprocal equations. — HORN : Reelle periodische Lösungen einer Differentialgleichung. — JONAS : Kurven von konstanter Steilheit auf der Kugelfläche. — KÜRSCHAK : Anwendung der komplexen Zahlen zum Beweise eines elementargeometrischen Satzes. — LUMMER : Die Gesetze der schwarzen Strahlung u. ihre Verwendung. — W.-F. MEYER : Kant und das Wesen des Neuen in der Mathematik. — SCHÖNFLIES : Bemerkung zur Theorie der elliptischen Funktionen. — STÆCKEL : Ueber ein in der Optik auftretendes bestimmtes Integral. — STUDY : Ueber das sogenannte Prinzip der Erhaltung der Anzahl. — STURM : Luigi Cremona. — SUMEC : Der einphasige Inductionsmotor. — WEINGARTEN : Ueber die Lehrsätze Castigliones. — ZEMPLÉN : Etude sur l'interpolation et la décomposition des fonctions rationelles en fractions partielles.

Rezensionen. — Vermischte Aufgaben. — Sitzungsberichte der Berliner mathem. Gesellschaft.

Bulletin de la Société française de Philosophie, publié par MM. X. Léon et A. Lalande. 5me année, 1905. Librairie Arm. Colin, Paris.

No 2. — Les axiomes de la Mécanique et le principe de causalité; thèse : M. Painlevé; Discussion : MM. Couturat, Le Roy, Rauh.

Monatshefte f. Mathematik u. Physik, herausgegeben von G. v. Escherich, F. Mertens u. W. Wirtinger. XV. Jahrg. 1904. Eisenstein, Wien.

2., 3. Vierteljahr. — A. Axer : Zahlentheoretische Funktionen und deren asymptotische Werte in Gebiete der aus den dritten Einheitswurzeln gebildeten ganzen komplexen Zahlen. — R. von Sterneck : Ueber konvexe Polygone. — G. Frauenfelder : Büschel von Raumkurven 4 Ordnung II. Art mit zwei stationären Tangenten. — Niels Nielsen : Elementare Herleitung einiger Formeln aus der Theorie der Gammafunktion. — Otto Biermann : Zwei dem numerischen Rechnen angehörende Betrachtungen : G. Majcen : Ueber die Reliefprojektionen des Kreises. — J. Plemelj : Ueber lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie.

Nouvelles Annales de Mathématiques, dirigées par C.-A. Laisant, C. Bourlet et R. Bricard. 4e série, T. iv. Gauthier-Villars, Paris.

Sept. 1904. — Rapport de M. Apell sur l'enseignement dans la classe de mathém. spéc. — T. Lemoyne : Note de géométrie. — H. Piccioli : Sur un procédé pour parvenir à l'équation intrinsèque des lignes du cylindre de révolution. — R. Bricard : Sur une certaine suite arithmétique.

Octobre. — G. Fontené : Sur l'extension du théorème des polygones de Poncelet à l'espace, par des polyèdres du genre *un*. — G. Fontené : Contours variables inscrits à une cubique gauche, circonscrits par les plans de leurs angles à une surface réglée de troisième ordre. — J. Le Roux : Les fonctions d'une infinité de variables indépendantes.

Novembre. — A. Deltour : Sur les polyèdres de genre *un*. — S. Stamatiadis : Sur l'existence des racines de l'équation algébrique. — Ch. Bioche : Sur la distinction analytique des régions déterminées par un triangle ou par un tétraèdre. — Agrégation des sc. mathém.; A. Vacquant, solution de la question de mathém. spéc.; C. Clapier, solution de la question de mathém. élém.

Décembre. — J. Hadamard : Sur les séries de la forme $\sum a_n e^{-\lambda_n z}$. — J. Hadamard : Sur un point de la théorie des percussions. — Lancelot : Surfaces algébriques; points singuliers. — R. Bricard : Sur l'extension à l'espace du théorème de Poncelet.

2. Livres nouveaux :

Ett. Bortolotti. — **Lezioni sul Calcolo degli Infinitesimi** date nella R. Università di Modena, raccolte dal Dr Arm. Barbieri. — 1 fasc. in-8o de V-62 p.; prix : L. 3.—; Società tipogr., Modena.

R. Gans. — **Einführung in die Vektoranalysis** mit Anwendungen auf die mathematische Physik. — I vol. cart. in-8o, 98 p.; prix : M. 2.80; G.-B. Teubner, Leipzig.

Z.-G. de Galdeano. — **Tratado de Analisis Matemàtico.** — T. II : Principios generales de la Teoria de las Funciones. — 1 vol. in-8o, 352 p.; prix : Fr. 7.—; Casanal, Saragosse.

A. Grévy. — **Traité d'Algèbre** à l'usage des élèves de Mathématiques, A et B. — I vol. in-8o, 498 p.; prix : fr. 6.—; Vuibert et Nony, Paris.

E. Grimsehl. — **Angewandte Potentialtheorie** in elementarer Behandlung, I. Band *(Sammlung Schubert)*. — 1 vol. cart., 219 p. ; prix : M. 6.— ; G. T. Göschen, Leipzig.

Fr. Haacke. — Entwurf eines arithmetischen Lehrganges für höhere Schulen. — 1 vol. cart. in-8°, 53 p. ; prix : M. 0.80 ; B.-G. Teubner, Leipzig.

G.-O. James. — **Elements of the Kinematics of a Point** and the Rational Mechanics of a Particle. — 1 vol. p. in-8°, XVI-176 p. ; prix : 2 Doll. ; John Wiley & Sons, New-York.

Laguerre. — **Oeuvres complètes** publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par Ch. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché. T. II : *Géométrie*. — 1 vol. gr. in-8, 715 p. ; prix : fr. 22.— ; Gauthier-Villars, Paris.

H. Liebmann. — **Nichteuklidische Geometrie** (Sammlung Schubert). — 1 vol. cart., 248 p. ; prix : M. 6.50 ; G.-J. Göschen, Leipzig.

Em. Lebon. — **Géométrie descriptive et Géométrie cotée**. Classe de mathématiques A et B. — 1 vol. broch., 175 p. ; prix : Fr. 3.50 ; Delalain frères, Paris.

W. Lorey. — **Ueber die Wohltat und das Werden der Zahl**. (Sonderabzug aus Programm 1905 Gymnasium Görlitz). — 1 broch., 10 p. ; Görlitz.

G. Mahler. — **Physikalische Aufgabensammlung**, mit Resultaten. *(Sammlung Göschen)*. — 1 vol. cart., 118 p ; prix : M. 0.80 ; G.-J. Göschen, Leipzig.

R. Marcolongo. — **Meccanica Razionale**. *(Manuali Höpli)*. — T. I : *Cinematica-Statica*. 1 vol. di 300 p., L. 3. — ; T. II : *Dinamica. Principi di Idromeccanica*. 1 vol. di 330 p. ; L. 3.— ; Ulrico Höpli, Milano.

G. Papelier. — **Formulaire de Mathématiques spéciales**. Algèbre, Trigonométrie, Géométrie analytique. — 1 vol. br., 220 p. ; prix : fr. 2. — ; Vuibert & Nony, Paris.

H. Poincaré. — **Leçons de Mécanique céleste** professées à la Sorbonne. T. I. *Théorie générale des perturbations planétaires*. — 1 vol. gr. in-8°, VI-36 p. ; prix : fr. 12. — ; Gauthier-Villars, Paris.

A. Rist. — **La Philosophie naturelle intégrale** et les rudiments des sciences exactes, première partie. — 1 vol. gr. in-8°, VI-131 p. ; A. Hermann, Paris.

Rod. Schüssler. — **Orthogonale Axonometrie**. Ein Lehrbuch zum Selbststudium. — 1 vol. cart. in-8° avec un atlas de 29 planches ; prix : M. 7.— ; B.-G. Teubner, Leipzig.

J.-J. Thomson. — **Elettricità e Materia**. (traduit de l'anglais en italien, avec annotations, par Dott. G. Faè). — 1 vol. cart. VIII-200 p. ; *Collection Höpli* ; prix : L. 2. — ; U. Höpli, Milan, 1905.

Verhandlungen des dritten internationalen Mathematikerkongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. Aug. 1904, herausgegeben von Dr. A. Krazer. — 1 vol. gr. in-8°, 756 p. ; B.-G. Teubner, Leipzig.

E. Wickersheimer. — **Les Principes de la Mécanique**. — 1 vol. in-8°, 130 p. ; prix : fr. 4.— ; Vve Ch. Dunod, Paris.

J.-W. Withers. — **Euclids parallel Postulate : Its Nature, Validity, and Place in geometrical Systems**. — Thèse présentée à la Yale University. 1 vol. cart., 192 p. ; The Open Court publishing Comp., Chicago.



L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
EN BULGARIE[1]

L'enseignement universitaire de la Bulgarie est encore peu connu à l'étranger. Notre Ministère de l'Instruction publique s'est fait représenter pour la première fois au dernier congrès des mathématiciens. Le moment semble donc venu de mettre les savants de l'étranger au courant de l'enseignement mathématique en Bulgarie et spécialement à notre université, une des plus jeunes représentées au Congrès.

Les mathématiques ne se développèrent en Bulgarie que depuis la délivrance de notre pays du joug turc. Il est impossible de savoir quel était l'état des mathématiques avant cette date, car l'histoire de la littérature bulgare ne les mentionne pas et la plupart des anciens manuscrits ont été détruits par l'ennemi.

Ainsi il ne nous reste rien de « l'âge d'or » de Car Simeon.

Après l'invasion des Turcs la publication d'un ouvrage quelconque en langue bulgare était interdite. Jusqu'en 1839 il n'y eut en Bulgarie aucune imprimerie. Celle que l'archimandrite Théodosis ouvrit alors à Salonique avec la permission du gouvernement fut brûlée peu de temps après. Une censure très sévère poursuivit tous les écrivains comme des « Comita », des ennemis du gouvernement. Le « Teubner » de la Bulgarie, M. Christo Danov, raconte, par exemple, que pour pouvoir publier, en 1876, une Arithmétique traduite par Christo Botev, un révolutionnaire bulgare, il dut d'abord la purger de certains problèmes, comme ceux-ci : « Quel est le revenu journalier du sultan ? » « Quelle est la proportion des Turcs et des Bulgares dans la presqu'île des Bal-

[1] Rapport présenté au 3me Congrès international des mathématiciens à Heidelberg, le 12 août 1904.

kans?», etc. De tels problèmes auraient certainement causé la fermeture de la librairie et l'arrêt de l'éditeur. Dans ces conditions la propagation de livres parmi le peuple était très difficile et M. Christo Danov les colportait souvent lui-même dans les Balkans.

Les premiers livres de mathématiques en langue bulgare ne parurent pas dans notre pays, mais parurent en Russie, en Serbie, en Autriche, en Roumanie, quelques-uns à Constantinople et à Ruzcuk. La première Arithmétique de Christaki Pavlovic parut à Belgrade en 1833 (112 pages, 8°, 2 tableaux), le premier traité d'Algèbre de Vaklidov (160 p.), en 1859 à Constantinople et la première Géométrie de V. Gruev (72 p., 8°, 78 figures), en 1867, à Vienne (L. Sommer, éd.). Jusqu'aux guerres d'indépendance de l'année 1877 il y eut en tout 28 traités d'Arithmétique avec deux recueils de problèmes, deux livres d'Algèbre et trois de Géométrie. Tous ces ouvrages avaient un but essentiellement pratique, celui de procurer à l'élève les connaissances utiles et indispensables dans la vie de chaque jour. Ils contenaient les quatre opérations fondamentales de l'arithmétique, les fractions simples et décimales, les rapports et les proportions, la règle de trois, les problèmes d'intérêt, etc. La librairie Christo Danov prétend qu'il y a 50 ans on ne connaissait en Bulgarie que l'addition et la soustraction. A ce moment-là les seuls qui fussent capables de multiplier ou de diviser étaient les savants Kadies (juges) turcs qui jouissaient pour cela d'une grande réputation!

Avant 1877 les écoles étaient — toutes proportions faites — peu nombreuses en Bulgarie. Les popes (prêtres), donnaient aux enfants l'enseignement dans les locaux ecclésiastiques. Les « Daskal » (maîtres d'école) devaient subvenir à leur entretien par un autre métier, ou bien avoir recours à des dons volontaires. Ce n'est que dans les villes les plus importantes qu'on trouvait des écoles mieux installées, ayant deux ou trois classes. Sous Midhat Pascha la ville de Gabrovo fonda un Gymnase et Philippopolis un séminaire. La statistique de 1878-79 compte cependant 1027 écoles pour garçons et 61 pour jeunes filles. Après 1877 les Russes se mirent

à fonder des écoles moyennes en Bulgarie et consacrèrent de fortes sommes à l'entretien de plusieurs d'entre elles, comme par exemple celles de Slivno et de Lom-Palanko. Il y eut un essor vraiment réjouissant. On fit venir des instituteurs de la Bohème, la Croatie, la Russie pour enseigner les différentes matières. Les gymnases réaux de Philippopolis, Slivno, Gabrovo et Sofia parvinrent alors à un degré assez élevé de développement.

En outre on créa des écoles normales dont les élèves étaient destinés à répandre l'instruction dans le peuple. Dans toutes ces écoles les mathématiques formaient une branche de l'enseignement et dans la Bulgarie méridionale les leçons étaient réparties et données sur le modèle de l'Autriche.

On peut se faire une idée du développement rapide de l'instruction par les chiffres suivants. En 1880-81 la principauté possédait : 1 gymnase classique avec 5 classes, 7 professeurs et 228 élèves, 5 écoles réales (Gabrovo, Lom-Palanko, Kistendil, Ruscuk et Widin), 3 écoles normales (à Dupintza, Sylistra et Belogradcik), un séminaire ecclésiastique à Leskovec, 1 école normale de jeunes filles à Sihumla et 2 gymnases de jeunes filles à Sofia et Trnovo. La plupart de ces écoles n'avaient que 4 classes. Dans la Bulgarie méridionale, c'est-à-dire la Roumélie orientale, il y avait alors : 2 gymnases à Philippopolis et Slivno, 2 gymnases de jeunes filles à Philippopolis et Eski-Zagra et une école normale dans la belle ville de Kozanlik. Le gouvernement entretenait 380 boursiers dans le pays et 34 à l'étranger et accordait encore des secours à 28 étudiants bulgares à l'étranger.

De 1877 à 1887 la littérature mathématique bulgare s'enrichit de 19 traités d'arithmétique, 7 recueils de problèmes d'arithmétique, 3 traités d'algèbre, 10 géométries (planimétrie et stéréométrie), 1 table de logarithmes, 2 traités de trigonométrie et un de géométrie analytique.

Depuis 1887, les plans de l'enseignement ont subi plusieurs modifications, mais celles-ci n'apportèrent aucun changement important dans l'enseignement mathématique.

Voici le plan le plus récent de *l'enseignement mathématique des gymnases de jeunes gens :*

MATIÈRES	CLASSES :												
	Division inférieure.			Division réale.				Division classique.					
	I	II	III	IV	V	VI	VII	IV	V	VI	VII	Total
Arithmétique	3	3	3	—	—	—	—	—	—	—	—	9
Géom. et dessin géom.	—	2	2	—	—	—	—	—	—	—	—	4
Algèbre	—	—	—	5	5	5	4	—	—	—	—	19
et Géométrie	—	—	—	—	—	—	—	4	3	3	3	13
Géométrie descriptive	—	—	—	—	2	2	2	—	—	—	—	6
Physique	—	—	2	—	3	3	2	—	2	2	2	R. 10 Cl. 8

Voici en quoi ce plan diffère des plans antérieurs : le dessin géométrique a été supprimé dans la première et dans la quatrième classe et le nombre des heures de géométrie descriptive a été réduit de 9 à 6.

Le *programme* des matières dans les différentes classes est ainsi formulé :

I. Arithmétique.

I. Classe : Numération (calcul et mesure, systèmes décimal et métrique, chiffres romains et slaves).

II. Classe : Les quatre opérations fondamentales sur les fractions simples. Transformation des fractions simples en fractions décimales et vice versa. Fractions périodiques. Les quatre opérations fondamentales sur les nombres complexes.

III. Classe : Emploi des lettres et des parenthèses pour les quatre opérations simples. La notion de nombre. Rapport et proportion. Règle de trois simple et composée. Problèmes d'intérêt, d'escompte et d'échéances ; problèmes de partage et d'alliage. Deuxième et troisième puissance d'un nombre. Racines carrées et cubiques.

Notions de tenue de livres et de comptabilité commerciale.

II. Algèbre.

IV. Classe : Les quatre opérations fondamentales sur les nombres rationnels absolus. Divisibilité des nombres. Systèmes des nombres. Rapports et proportions. Nombres positifs et négatifs ; les quatre opérations sur ces derniers. Equations et inégalités du 1er degré à une inconnue.

V. Classe : Equation du premier degré à une ou plusieurs inconnues. Equations indéterminées. Puissances et racines. Equations du deuxième degré une inconnue. Equations qui peuvent se ramener à des équations du deuxième degré. Equations du deuxième degré à deux inconnues.

VI. Classe : Logarithmes. Equations exponentielles. Progressions arithmétiques et géométriques. Maximum et minimum. Problèmes et exercices sur ces notions.

VII. Classe : Les combinaisons. Binome de Newton à exposants entiers et positifs. Propriétés des coefficients de binomes. Notions élémentaires du calcul des probabilités.

III. Géométrie.

II. Classe : Notions fondamentales de la Géométrie et étude intuitive des solides simples : cube, prisme, pyramide, cylindre, cône, sphère. Les principales figures planes géométriques, leur description par la méthode intuitive. Mesures des aires du carré, rectangle, parallélogramme, triangle, etc. Exercices avec les compas. Dessin technique sur les matières traitées et d'après des modèles d'ornements simples.

III. Classe : Similitude des figures. Notions fondamentales de la stéréométrie. Détermination de l'aire et du volume des solides simples.

IV. Classe : Planimétrie. Les figures géométriques fondamentales. Théorie du parallélisme. Egalité et similitude des figures planes. Théorèmes, problèmes et constructions sur les propriétés élémentaires des figures. Egalité et similitude.

V. Classe : Planimétrie : égalité, transformation et division des surfaces. Mesure des aires. Transversales des triangles ; points harmoniques ; faisceaux de rayons. Centre et rayons de similitude, faisceaux de cercles. Puissance d'un point par rapport à une circonférence ; axe radical ; Pôles et polaires.

VI. Classe : Trigonométrie : fonctions goniométriques du triangle rectangle. Résolution du triangle rectangle, du triangle isocèle et des polygones réguliers. Généralisation des fonctions goniométriques. Règles de la résolution des triangles scalènes. Equations trigonométriques simples.

Stéréométrie : Principaux théorèmes concernant la ligne droite et le plan dans l'espace. Angles solides. Classification et propriétés des solides Egalité, symétrie et similitude des solides. Aire et volume du prisme, de la pyramide et de la pyramide tronquée. Aire et volume du cylindre, du cône et du cône tronqué, ainsi que de la sphère et de ses segments simples.

VII. Classe : Géométrie analytique. Ligne droite, cercle et sections coniques en coordonnées rectangulaires.

Géométrie descriptive.

V. Classe : Principaux théorèmes concernant la droite et le plan dans l'espace. Représentation du point de la droite et du plan. Exercices et problèmes simples.

VI. Classe : Projections des figures planes et détermination de leurs ombres. L'ellipse comme projection orthogonale du cercle. Propriétés de l'ellipse.

VII. Classe : Représentation de prismes, pyramides, cylindres, cônes et sphères. Leurs sections planes. Ombres de ces solides. Exemples élémentaires de la pénétration de ces solides.

Dans les gymnases classiques on enseigne l'algèbre d'après le même plan, mais avec moins d'exercices. Quant à la trigonométrie, elle ne comprend dans la sixième classe que les triangles isocèles et les triangles rectangles, ainsi que la ré-

duction des polygones réguliers. Dans la septième classe, il n'y a pas de géométrie analytique; la trigonométrie comprend l'étude des triangles scalènes.

On enseigne d'après le même programme à l'école militaire appelée « l'école des gentilshommes ». La géométrie descriptive y est étudiée au point de vue de ses applications stratégiques, d'après un traité spécial publié en langue bulgare.

Voici le *programme de l'enseignement mathématique dans les écoles de jeunes filles*, dites : « gymnases de jeunes filles » qui comprennent 7 classes.

	I	II	III	IV	V
Arithmétique	3	3	3		
Algèbre				3	3
Géométrie				2	2
Physique			2	2	2

A la fin de la cinquième classe les élèves doivent faire un examen pour être admises soit dans la section d'instruction complémentaire, soit dans la section pédagogique, qui ont toutes deux une durée de deux années. Dans la première de ces sections on consacre $5 + 4 = 9$ heures aux mathématiques et $3 + 5 = 8$ heures à la physique et la chimie.

Dans la *VI. Classe* on enseigne les matières suivantes :

1° *Algèbre :* Puissances et racines à exposants entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs. Grandeurs rationnelles et irrationnelles; puissances et racines; racines carrées et racines cubiques. Nombres imaginaires et complexes et leur représentation graphique. Equations du deuxième degré à une inconnue et équations qui s'y ramènent. Equations du deuxième degré à plusieurs inconnues. Logarithmes.

2° *La Géométrie* comprend d'abord la planimétrie avec des constructions, puis la trigonométrie plane étudiée même dans son application à la géométrie pratique.

Dans la *VII. Classe* l'enseignement porte sur les progressions, les intérêts, les amortissements. Les élèves doivent en outre répéter la stéréométrie qu'on leur a enseignée en cinquième. Enfin le programme de la VII. classe comprend encore la trigonométrie sphérique : formules principales du triangle rectangle sphérique, théorèmes du sinus et du cosinus; équations de Gauss et analogies de Neper; formules de l'excès sphérique et de la surface des triangles et leur application à la stéréométrie. Il n'y a pas de géométrie analytique.

Pour les *écoles normales* de la Bulgarie le programme est le suivant :

	1. Cours	2. Cours.	3. Cours.	4. Cours.	Total
Mathématiques	3 heures	4	3	—	10
Physique	2	2	2	—	6

On y enseigne l'algèbre, la planimétrie et la stéréométrie. L'algèbre comprend, outre les puissances et les racines, les logarithmes et leur application aux problèmes d'intérêt, de rentes et aux équations du deuxième degré à une inconnue.

* * *

Après les guerres d'indépendance le nombre des instituteurs et surtout de ceux qui possédaient une instruction mathématique solide était beaucoup trop restreint. C'est pourquoi le ministre de l'instruction publique, *Théodor Ivancov* fit décréter le 5 mai 1887 la fondation d'une huitième classe pédagogique au gymnase de Sofia. Mais il dut se retirer la même année et son successeur, *le Dr Comakov* donna à cette classe le nom de « classe pédagogique supérieure ». Le 2 septembre 1887 le ministre *Zivkov* publia une circulaire annonçant l'ouverture d'une section historique dans la classe pédagogique supérieure. Pour augmenter le nombre des auditeurs on distribua des bourses annuelles de 720 fr.

Une nouvelle loi du 18 décembre 1888 sépara complètement du gymnase cette classe pédagogique qui devint, à partir du 1er janvier 1889, une institution indépendante sous le nom de : « Vysso uciliste » (académie). La même année on inaugura un cours physico-mathématique avec 4 professeurs (pour les mathématiques, la physique et la chimie ; pas de sciences naturelles) et 34 étudiants. Le cours devait durer trois ans. A la fin de l'année scolaire 1891-92, 23 étudiants terminèrent ce cours ; parmi eux 16 mathématiciens.

En 1892-93 on fonda une Faculté de droit avec 7 professeurs et 67 étudiants.

Le 20 décembre 1894, à la suite d'un ukase princier, la loi concernant la formation d'une académie avec différentes Facultés et avec une organisation toute académique fut promulguée. En 1896-97 une loi complémentaire fixa l'autonomie de l'académie, la liberté des études et la durée de quatre ans des

cours. Jusqu'à la fin de l'année scolaire 1904, 244 étudiants ont achevé leurs études à la Faculté physico-mathématique. Parmi eux on compte 117 mathématiciens répartis comme suit :

Dans l'année	scolaire		1891-92	14
»	»	»	1892-93	8
»	»	»	1893-94	6
»	»	»	1894-95	9
»	»	»	1895-96	9
»	»	»	1896-97	8
»	»	»	1897-98	9
»	»	»	1898-99	3
»	»	»	1899-1900	11
»	»	»	1900-1901	6
»	»	»	1901-1902	15
»	»	»	1902-1903	5
»	»	»	1903-1904	14

Le 5 juillet 1897, le regretté Evlogi Georgiev légua à l'Académie un grand terrain de construction et une somme de 6 millions de francs. Le 23 janvier 1904 notre excellent ministre actuel, le Dr Sismanov promulgue une nouvelle loi d'après laquelle l'académie bulgare porte depuis le 1er octobre le titre d' « université ».

La nouvelle loi ordonne les branches suivantes pour l'enseignement à la *Faculté physico-mathématique :*

1° Eléments des mathématiques supérieures. — 2° Analyse supérieure. — 3° Géométrie. — 4° Physique expérimentale. — 5° Physique mathématique et mécanique analytique. — 6° Astronomie. — 7° Géométrie pratique. — 8° Chimie inorganique et analytique. — 9° Chimie organique et théorique. — 10° Technologie et chimie agricole. — 11° Physique industrielle. — 12° Technologie mécanique. — 13° Zoologie et embriologie. — 14° Anatomie comparée et hystologie. — 15° Botanique. — 16° Géologie et paléontologie. — 17° Minéralogie et pétrographie.

La Faculté physico-mathématique se subdivise en *3 sections :* I. Section de physique et des mathématiques. — II. Section de chimie. — III. Section des sciences naturelles.

La Faculté compte 10 professeurs ordinaires, 3 professeurs extraordinaires et 2 privat-docents avec 3 assistants. Les cours de mathématiques sont donnés par 3 professeurs ordinaires et 1 professeur extraordinaire.

Voici le plan des études mathématiques et physiques :

a. Cours.

	Semestres.							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1. Eléments des mathém. supér.	4	4	5	5	—	—	—	—
et Algèbre supérieure	—	—	1	2	—	—	—	—
2. Analyse supérieure I.	—	—	—	—	2	2	—	—
3. Analyse supérieure II.	—	—	—	—	4	4	2	2
4. Algèbre supérieure II.	—	—	—	—	2	2	—	—
5. Théorie des nombres.	—	—	—	—	2	2	—	—
6. Géométrie analyt. I.	3	3	—	—	—	—	—	—
7. Géométrie analyt. II.	—	—	3	3	—	—	—	—
8. Géométrie projective.	—	—	—	—	(3	3	3	3)
9. Géométrie descriptive.	(4	4	4	4	—	—	—	—
10. Géométrie supérieure.	—	—	—	—	—	—	2	2
11. Mécanique analytique.	—	—	—	—	4	4	2	2
12. Physique mathématique.	—	—	—	—	3	3	3	3
13. Physique expériment.	4	4	4	4	—	—	—	—
14. Météorologie.	—	—	2	2	—	—	—	—
15. Astronomie { sphérique et pratique.	—	—	—	—	3	2	—	—
15. Astronomie { théorique.	—	—	—	—	—	—	4	4
15. Astronomie { physique.	—	—	—	—	—	—	—	2

b. Exercices pratiques.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Eléments des mathém. supér.	2	2	2	2	—	—	—	—
Géométrie analyt. I.	2	2	—	—	—	—	—	—
Géométrie analyt. II.	—	—	2	2	—	—	—	—
Exercices de géométrie de position.	—	—	—	—	2	2	2	2
Exercices de géométrie descriptive.	2	2	2	2	—	—	—	—
Physique expérimen. } Météorologie. }	2	2	2	2	2	2	4	4

Ce tableau général exige des explications plus détaillées sur le champ parcouru dans chacun des cours mathématiques.

Le cours d'*Eléments des mathématiques supérieures* traite les matières suivantes : Nombres irrationnels, limites, séries, produits infinis et fractions continues. Les déterminants. Théorie des nombres complexes. Théorie des équations algébriques (Algèbre supérieur Ire partie). Calcul différentiel et intégral. Introduction à la théorie des équations différentielles, applications géométriques.

Analyse supérieure : 1° Algèbre supérieure (IIme partie). Théorie de la substitution linéaire. Théorie des nombres. — 2° Intégrales multiples. Equations différentielles. Calcul des variations. — 3° Théorie des fonctions.

Géométrie : 1° Géométrie analytique à deux et à trois dimensions. — 2° Géométrie projective (Géométrie de position). — 3° Géométrie descriptive. — 4° Géométrie supérieure et méthodologie.

Le cours de *géométrie analytique à deux dimensions* est de deux ans et comprend l'étude des points, des droites, du cercle, des courbes de second ordre dans des systèmes de coordonnées rectangulaires, obliques et polaires; puis viennent les tangentes, les polaires, les asymptotes; les diamètres conjugués et les axes principaux des courbes du second degré. En outre les étudiants abordent les courbes supérieures, par exemple la feuille cartésienne, la parabole cubique et semi-cubique, l'hyperbole cubique, la cissoïde et la strophoïde, les lignes Cassiniennes, la lemniscate, les courbes de Descartes, les conchoïdes, la conchoïde de Nicomède, le limaçon de Pascal, les cardoïdes, les paraboles bicarrées :

$$y^4 = a^3x,\ y^4 = ax^3 \quad \text{et} \quad y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4.$$

Viennent ensuite quelques lignes transcendantes, les trois sortes de cycloïdes : épicycloïdes et hypocycloïdes, les astroïdes, la développante du cercle; les spirales; les courbes exponentielles $y = Ce^{ax}$, la chaînette. Construction de ces courbes et étude de leurs tangentes, de leur courbure. Pour quelques-unes de ces constructions on utilise la géométrie

cinématique dont les étudiants apprennent aussi les fondements.

La Géométrie analytique dans l'espace fait également l'objet d'une étude assez détaillée : systèmes de coordonnées rectangulaires et polaires; relations entre ces deux systèmes. Les problèmes usuels relatifs aux points, à la ligne droite et au plan.

Détermination du volume du tétraèdre par les coordonnées de ses sommets, la longueur de ses arêtes et par ses faces. Projection d'un vecteur ou d'un contour polygonal. Les différentes formules de transformations, surtout celles d'Euler. La sphère. Les différentes surfaces : cylindre, cône, surfaces de révolution, rotation; leur équation; sections planes. Surfaces du deuxième degré et leurs sections circulaires.

Hélice : Courbes gauches, leurs tangentes, plans osculateurs, plans normaux, normale principale, binormale, courbure et torsion.

Enfin on étudie les surfaces en général et leurs courbures. On réunit ici la géométrie analytique à la géométrie différentielle.

Les cours de *géométrie descriptive* et de *géométrie de position* réunissent toujours les élèves de deux années consécutives.

Le cours de *géométrie descriptive* débute par l'étude générale des trois opérations fondamentales de cette branche : détermination, projection et construction des éléments dans les divers systèmes de projections : projections centrale, oblique, cotée et axonométrique. Projection sur un plan. Rapports entre les différents modes de projections. Projections perspectives et projections de Monge; leur application à des problèmes métriques.

Le trièdre et les polyèdres; les surfaces du deuxième degré; courbes dans l'espace (hélice, ligne géodésique du cône); surfaces développables, les dix espèces de surfaces gauches et les surfaces de rotation. Constructions relatives aux ombres.

Le programme de *géométrie projective* comprend l'étude des éléments fondamentaux, le principe de dualité, puis la

perspectivité et la projectivité, l'involution, la génération des sections coniques et des surfaces coniques ou gauches. Collinéation centrale.

La *géométrie supérieure* comprend outre la notion générale des coordonnées, l'essentiel de la théorie des transformations.

La *mécanique analytique* et *l'astronomie* sont données dans des cours assez détaillés. Des exercices pratiques à l'observatoire complètent le cours d'astronomie.

*
* *

Chaque étudiant de l'université est obligé de suivre tous les cours indiqués dans le plan d'étude. Les étudiants en physique doivent suivre pendant deux semestres les cours de chimie analytique et prendre part aux travaux du laboratoire. En revanche ils sont dispensés des exercices de constructions de la géométrie descriptive.

Les mathématiciens assistent pendant trois semestres, les physiciens pendant sept semestres aux exercices pratiques de l'institut de physique. Les étudiants sont obligés de prendre part à tous les exercices pratiques dans les séminaires et les laboratoires pour que leur semestre soit valable.

Ils ont à subir tous les deux ans un examen : Le premier examen d'Etat comprend : 1° les éléments des mathématiques supérieures ; 2° la géométrie analytique ; 3° la physique expérimentale et la météorologie.

Le second examen d'Etat comprend : 1° L'analyse supérieure ; 2° la mécanique analytique ; 3° l'astronomie ; 4° la géométrie supérieure projective et descriptive ; 5° la physique mathématique.

Chaque candidat doit choisir outre l'analyse supérieure, deux autres branches parmi celles qui sont énumérées ci-dessus. Les candidats pour la géométrie descriptive doivent choisir pour leur épreuve la géométrie supérieure et la géométrie projective ; ceux qui prennent la physique comme branche principale n'ont pas besoin de faire un examen de géométrie supérieure.

Une fois les études terminées, chaque candidat à l'enseignement supérieur doit faire deux ans de pratique après lesquels il a encore à subir un examen d'Etat très sévère.

Une *bibliothèque* et une *salle de lecture* sont à la disposition des étudiants. Ils peuvent y consulter les meilleurs périodiques et les encyclopédies mathématiques. Une *collection de modèles* de géométrie sert à faciliter l'étude de cette science. Elle se compose de 133 modèles de géométrie descriptive, 185 de géométrie supérieure, 50 de géométrie surtout de stéréométrie, 187 modèles divers et accessoires, le tout représentant une valeur de 6414 fr. 81.

Des photographies de ces collections se trouvent à l'exposition du Congrès. Une de ces photographies représente les modèles et les accessoires exécutés par l'auteur de ce rapport et qui ont remporté un prix à l'exposition universelle d'Anvers et à l'exposition nationale de Philippopolis.

Pour que notre université ait un personnel enseignant distingué, nous envoyons à l'étranger les étudiants les mieux doués; ils y suivent les cours des professeurs les plus célèbres et se spécialisent dans quelques branches des mathématiques.

* * *

La *société « physico-mathématique »* (« physoko-mathmaticesko druzestvo ») a pour but le développement des sciences mathématiques en Bulgarie. Elle cherche à atteindre ce but :

1° En donnant à ses membres l'occasion de se perfectionner dans les sciences mathématiques et de faire des travaux scientifiques ;

2° En facilitant le développement de la littérature mathématique ;

3° En s'occupant de toutes les questions concernant l'enseignement mathématique et en cherchant à améliorer l'enseignement en général ;

4° Par la détermination d'une terminologie générale ;

5° Par la critique sérieuse de divers ouvrages, surtout des manuels et des dissertations en langue bulgare ;

6° En favorisant moralement et matériellement la publica-

tion et la vente de travaux et de dissertations scientifiques ainsi que de bons manuels.

La société a une séance tous les quinze jours, avec des conférences sur des sujets scientifiques et pédagogiques. Elle possède une bibliothèque et est abonnée à beaucoup de journaux périodiques. Depuis quelque temps elle a son propre organe : « *Cnucanue na opusuko-mazemamureckomo dpys-cecmbo bo Cocpus* » qui se trouve également à l'exposition. Ce journal s'occupe avant tout de la méthodologie des sciences mathématiques en Bulgarie.

« Knizovno Druzcetvo », une sorte d' « Académie des Sciences » de la Bulgarie n'a guère contribué au progrès des mathématiques.

Les publications mathématiques ne sont pas encore nombreuses si l'on fait abstraction des manuels. Ce sont les ressources et les éditeurs qui font défaut pour la publication d'ouvrages importants ou de cours. On trouverait certainement des auteurs. Espérons qu'à cet égard aussi les progrès seront rapides et que nous pourrons en donner la preuve à un des prochains congrès.

A. V. Sourek (Sofia.)

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES GROUPES MÉTRIQUES

La Géométrie traditionnelle a pour objet l'étude de l'« égalité » des figures : elle ne peut constituer qu'un chapitre de la Géométrie, si celle-ci doit constituer la science de l'espace (ou plus simplement et tout aussi complètement : la science des figures). Il convient donc d'attribuer à la Géométrie traditionnelle un nom spécial, la *Métrique* par exemple.

La place que doit occuper la Métrique dans la Géométrie résulte nettement des travaux analytiques sur les Fondements de la Géométrie, qui ont pour aboutissement les Chapitres

définitifs consacrés par Sophus Lie[1] à cette question dans sa Théorie des Groupes de Transformation. Il ne paraît donc pas sans intérêt d'édifier une théorie de la Métrique en adoptant le même point de vue que les analystes, mais en proscrivant tout appel à l'Analyse mathématique, c'est-à-dire en remplaçant le raisonnement *numérique* par le raisonnement *géométrique*. C'est l'objet que nous nous sommes proposé dans les pages suivantes.

Nous émettrons aussi, à titre de conclusions, quelques considérations concernant l'aspect sous lequel se présente dorénavant la Géométrie.

Nous montrerons enfin, dans un second article, que les théorèmes qui auront été ainsi établis comprennent un ensemble de propositions déjà reconnues susceptibles de constituer une base logique suffisante pour l'édification de la Métrique.

La lecture de ce Mémoire n'exige aucune *connaissance* mathématique.

1. — TRANSFORMATIONS PONCTUELLES

Une *transformation ponctuelle* d'une figure est une opération par laquelle tout point de la figure est transformé en un autre point de l'espace.

Lorsqu'une telle transformation est définie pour tout point de l'espace indépendamment des figures auxquelles il peut appartenir, elle est appelée *transformation ponctuelle de l'espace* ou simplement *transformation ponctuelle*[2].

On ne considérera que des transformations ponctuelles telles que les transformés des points d'une ligne quelconque constituent également une ligne et que les transformés de deux points infiniment voisins soient aussi infiniment voisins.

Soit deux transformations ponctuelles S et S′ définies pour tous les points de l'espace. A tout point quelconque M la

[1] Sophus Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, 3er Abschnitt. p. 393 à 513 ; Teubner, Leipzig.

[2] Une transformation ponctuelle est en somme une *fonction ponctuelle de point*.

transformation S fait correspondre un point M', et l'application de S' à ce dernier point donnera un troisième point M''. On a ainsi déterminé, par l'application successive des deux transformations S et S', une nouvelle transformation faisant correspondre à un point quelconque M un point M''. On posera :

$$M'' = S'(M') = S'[S(M)] = S'S(M) \quad ,$$

et la transformation S'S sera appelée le *produit* de S et S'.

Soit trois transformations S,S',S''. La transformation S'S fait correspondre à un point quelconque M un point M'' ; en appliquant à ce dernier la transformation S'', on obtient un nouveau point M''', de sorte que la transformation S''(S'S) fait correspondre au point M le point M'''. La transformation S''S' fait évidemment correspondre au point M' le point M''', et par suite, en appliquant cette transformation S''S' à la suite de S, on voit que la transformation (S''S')S fait correspondre au point M le point M''', on a donc :

$$S''(S'S) = (S''S')S \quad ,$$

c'est-à-dire que le produit S''S'S a une signification précise sans qu'il soit besoin d'employer de parenthèse.

Si une transformation S fait correspondre à un point quelconque M un point M' de telle sorte que, lorsque le point M parcourt l'espace, il en soit de même de M', on voit qu'à tout point M' de l'espace correspond ainsi un point M ; la transformation ainsi définie est dite l'inverse de la première et est désignée par S^{-1}, c'est-à-dire que l'on pose :

$$S^{-1}S(M) = SS^{-1}(M) = M \quad .$$

Soit une transformation ponctuelle :

$$M' = S(M) \; .$$

Par l'application d'une autre transformation T à tous les points de l'espace, on aura :

$$P = T(M) \; , \qquad P' = T(M') \; ,$$

et la transformation S est changée elle-même en la transformation qui fait correspondre le point P' au point P.

Cette dernière transformation a pour expression :

$$TST^{-1},$$

ainsi qu'on le voit facilement en éliminant M et M′ des relations précédentes, ou encore en observant que P est le transformé par T de $T^{-1}(P)$, dont le transformé par S est $ST^{-1}(P)$, lequel devient enfin $TST^{-1}(P)$.

Si l'on a :

$$TST^{-1} = S ,$$

la transformation T laisse *invariante* la transformation S, et l'on dit que S *admet* T.

La relation précédente peut s'écrire :

$$TS = ST .$$

On voit sous cette forme qu'elle est réciproque et qu'elle est équivalente à la commutativité des deux transformations.

Lorsqu'une transformation fait correspondre à un point déterminé ou bien à tout point d'une ligne ou d'une surface le même point ou bien un point appartenant également à cette ligne ou à cette surface, on dit qu'elle laisse ce point ou bien cette ligne ou cette surface *invariantes* ou encore que ceux-ci *admettent* la transformation.

Un point, une ligne, ou une surface qui admettent deux transformations, admettent aussi leur produit.

En effet, si S et S′ désignent les deux transformations et M le point invariant ou bien un point quelconque de la ligne ou de la surface invariantes, S(M) coïncide avec le point invariant ou bien appartient à la ligne ou à la surface, et il en est par suite de même du point S′[S(M)] ou S′S (M) : la transformation S′S possède donc bien la propriété énoncée.

La proposition précédente peut évidemment être énoncée sous la forme suivante :

Une figure qui admet deux transformations admet aussi leur produit.

On peut encore énoncer la proposition suivante :

Si une figure F *est transformée en une figure* F′ *par chacune des transformations* S *et* S′, *la figure* F *admet les trans-*

formations $S'^{-1}S$ *et* $S^{-1}S'$, *et la figure* F', *les transformations* SS'^{-1} et $S'S^{-1}$.

On a en effet :

$$S'^{-1}S(F) = S'^{-1}(F') = F\ , \qquad S^{-1}S'(F) = S^{-1}(F') = F\ ;$$
$$SS'^{-1}(F') = S(F) = F'\ , \qquad S'S^{-1}(F') = S'(F) = F'\ .$$

Un ensemble de transformations ponctuelles est dit *continu* lorsque S_1 et S_2 désignant deux transformations de cet ensemble, M_1 et M_2 les transformés par ces transformations d'un point quelconque M_0, il est toujours possible de réunir les points M_1 et M_2 par une ligne telle qu'il existe, dans l'ensemble considéré, une transformation faisant correspondre au point M_1 un point quelconque de cette ligne.

Définition 1. — Un ensemble de transformations qui comprend le produit de deux quelconques d'entre elles s'appelle un *groupe* de transformations.

Nous nous proposons d'établir quelques propriétés des *Groupes continus comprenant les inverses de toutes leurs transformations*. Nous nous dispenserons le plus souvent de répéter ce qualificatif, qui sera toujours sous-entendu.

Définition 2. — Une figure F sera dite *congruente* à une figure F' par rapport à un groupe lorsque celui-ci contient une transformation S telle que l'on ait :

$$F' = S(F)\ .$$

La congruence par rapport à un groupe contenant les inverses de ses transformations constitue évidemment une relation réciproque. On pourra donc parler de la *congruence de deux figures*.

Un groupe comprenant les inverses de toutes ses transformations comprend la transformation identique, car celle-ci peut toujours s'écrire SS^{-1}, quelle que soit S.

Il résulte de là que, par rapport aux groupes que nous considérons, *une figure est toujours congruente à elle-même*.

Théorème 1. — *Les transformées par un groupe d'une figure déterminée (qui peut, en particulier, consister en un seul point) constituent le même ensemble que les transformées de l'une quelconque de ces transformées.*

En effet, si F_0 désigne une figure et F l'une quelconque de ses transformées, le groupe comprend une transformation S telle que l'on a :

$$F = S(F_0) .$$

et l'on aura, par l'application d'une transformation quelconque S' du groupe,

$$S'(F) = S'S(F_0) .$$

La transformation S'S appartenant au groupe, cette relation exprime que toute transformée S'(F) de F est aussi une transformée de F_0 et par suite fait partie de l'ensemble de ces transformés; la réciproque est également vraie, car F_0 est une transformée de F, puisque S^{-1} appartient au groupe.

Corollaire. — *Deux figures congruentes à une troisième sont congruentes entre elles.*

Car, si F et F' sont parmi les transformées de F_0, F' doit, en vertu du théorème 1, se trouver parmi les transformées de F, c'est-à-dire lui être congruente.

Théorème 2. — Si S *est le symbole de toutes les transformations d'un groupe laissant invariante une figure* F *et si* T *désigne une transformation déterminée du groupe transformant* F *en* F', *l'expression générale des transformations* T' *du groupe par lesquelles* F *est transformée en* F' *est* TS, *et l'expression générale des transformations* S' *du groupe admises par* F' *est* TST^{-1}.

En effet, T et T' étant deux transformations transformant F en F', on a vu que F admet $T^{-1}T'$, c'est-à-dire que cette transformation figure parmi les transformations dont le symbole est S ; autrement dit, il existe une transformation S telle que l'on a :

$$T^{-1}T' = S$$

ou

$$T' = TS .$$

En second lieu, si S' est le symbole des transformations laissant F' invariante, il résulte de la partie déjà démontrée du théorème que l'expression générale des transformations transformant F' en F est :

$$T'^{-1} = T^{-1}S' .$$

D'où :

$$S' = TT'^{-1} = TS^{-1}T^{-1} ,$$

ou enfin, comme les symboles S et S^{-1} correspondent au même ensemble de transformations,

$$S' = TST^{-1} .$$

Théorème 3. — *Les transformations d'un groupe qui laissent invariante une figure déterminée forment elles-mêmes un groupe.*

On a vu qu'une figure qui admet deux transformations S et S' admet également leur produit SS'; d'autre part, tout groupe qui comprend S et S' comprend aussi SS'; ce produit SS' appartient donc à l'ensemble des transformations défini dans l'énoncé, c'est-à-dire que cet ensemble constitue un groupe, Q. e. d.

II. — GROUPES MÉTRIQUES

Sophus Lie a résolu le problème suivant :

Déterminer tous les ensembles de transformation ponctuelles jouissant des propriétés suivantes :

M I. — *L'ensemble constitue un groupe continu comprenant les inverses de toutes ses transformations.*

M II. — *Si l'on fixe un point quelconque, le lieu des transformés d'un autre point quelconque est une surface contenant le second point et ne contenant pas le premier.*

M III. — *Il existe un volume N tel que, si l'on fixe un point quelconque à l'intérieur de ce volume, tout point de l'espace peut atteindre par un trajet continu tout point situé sur la surface correspondante.*

(Nous avons cru devoir adopter — à bon droit, croyons-nous, — pour l'axiome M III, un énoncé un peu différent de celui de Sophus Lie, lequel est ainsi libellé : si l'on fixe un point, il existe, *autour de ce point*, un volume tel que tout point pris à l'intérieur de ce volume peut atteindre, etc.)

L'illustre géomètre a démontré que ces propriétés suffisent à définir exactement les groupes qui servent à édifier les diverses métriques. Il doit donc être possible d'établir une

théorie de ces groupes indépendamment de tout concept d'origine métrique et notamment des concepts de droite et de plan.

Une telle théorie devrait réaliser deux objets : 1° montrer de quelle manière on peut construire un groupe de la catégorie visée en partant de données réalisables : familles de surfaces par exemple ; 2° établir les propriétés essentielles que présentent les figures par rapport à ces groupes. Nous nous bornerons à ce dernier objet : le seul but que nous nous proposons dans cette étude étant de mettre en évidence le vrai caractère mathématique des métriques, encore supprimerons-nous les démonstrations trop laborieuses et sacrifierons-nous la généralité à la simplicité en nous contentant de démonstrations largement esquissées et visant surtout les cas les plus simples. Il est donc entendu que les démonstrations doivent être suivies sur des figures ne différant pas trop des figures correspondantes de la Métrique ordinaire ; c'est ainsi que les surfaces jouant le rôle des sphères seront des sphéroïdes : toute objection sera ainsi évitée, et le discours pourra être allégé des discussions subtiles qu'exige en Mathématiques le souci de la généralité.

Définition 1. — Les groupes satisfaisant aux propriétés exprimées par les axiomes MI, MII et MIII seront appelés *métriques*.

Définition 2. — Les surfaces sur lesquelles se déplacent les divers points de l'espace lorsqu'un point est maintenu fixe seront appelées *surfaces isométriques* du groupe métrique.

Définition 3. — Un point sera dit le *centre* des surfaces isométriques qui sont décrites par les divers points de l'espace lorsque le dit point est maintenu fixe.

Nous admettrons qu'une surface isométrique est une surface fermée à simple connexion, c'est-à-dire telle que toute ligne fermée tracée sur la surface soit réductible à un point par déformation continue en restant sur la surface. Il suffit d'ailleurs de se représenter une telle surface sous la forme d'un sphéroïde.

Nous admettrons en outre le théorème suivant :

Théorème 1. — *Les surfaces isométriques ayant pour centre*

un point appartenant au volume (région de l'espace) N *entourent ce point.*

Des propriétés des groupes démontrées dans le § précédent résulte le théorème suivant :

Théorème 2. — *Une surface isométrique est le lieu des transformés de chacun de ses points lorsque son centre est maintenu fixe.*

D'après le théorème I 3, les transformations d'un groupe métrique qui laissent un point fixe forment un groupe (*sous-groupe* du groupe métrique). Une surface isométrique ayant pour centre ce point est, par définition, le lieu des transformés de l'un de ses points ; la proposition à démontrer résulte donc du théorème I 1, d'après lequel le lieu des transformés d'un point est le même que le lieu des transformés de l'un de ses transformés.

De ce théorème et de l'axiome M III résulte évidemment la proposition suivante :

Théorème 3. — *Les surfaces isométriques ayant pour centre commun un point de la région* N *n'ont pas de point commun.*

Les transformations d'un groupe métrique G qui laissent fixe un point P_1 forment elles-mêmes, d'après le théorème I 3, un groupe (*sous-groupe* du groupe G) ; ce groupe laisse invariante, d'après le théorème 2, chacune des surfaces isométriques de centre P_1 et par suite détermine, pour les divers points d'une telle surface Σ, un groupe de transformations g. L'établissement des propriétés de ce groupe g, qui doit précéder l'étude du groupe G, n'est pas sans présenter des difficultés : il s'agit en somme de transcrire en raisonnement géométrique les investigations analytiques de Sophus Lie. Nous nous bornerons à exposer la suite des propositions en mettant en évidence le mécanisme des déductions dans la mesure où ce sera possible sans une trop grande complication.

Nous prendrons le point maintenu fixe P_1 dans la région N, de sorte que la surface Σ entoure ce point.

Il résulte de l'axiome M III combiné avec le théorème 2 que, dans ce cas, le groupe g non seulement est transitif, mais encore permet de transformer un point quelconque de la surface Σ en tout autre point de cette surface. Or on démontre que

tout groupe dans lequel la fixation d'un point de la surface Σ suffit à fixer tous les points de cette surface jouit de la propriété de laisser invariants (fixes) deux points (réels) et une ligne réelle ; les groupes rentrant dans cette catégorie doivent donc être écartés.

Un point P_2 de cette surface étant maintenu fixe, un autre point P_3 de la surface doit rester sur la surface isométrique passant par P_3 et ayant pour centre P_2 : cette dernière surface ne se confond pas avec Σ, car elle passerait alors par son propre centre, ce qui serait contraire à l'axiome M II. Les deux surfaces fermées se rencontrent donc suivant une ou plusieurs lignes fermées dont l'une au moins passant par P_3, à moins qu'elles ne soient tangentes entre elles (le contact de deux surfaces est un concept totalement indépendant de l'idée métrique).

Nous admettrons que deux surfaces isométriques qui ont déjà un point commun se rencontrent suivant une seule ligne fermée sans point double, ligne qui se réduit à un point dans le cas du contact.

Le point P_2 étant maintenu fixe, ainsi que le point P_1, le point P_3 doit donc rester sur la ligne fermée C, courbe d'intersection des deux surfaces isométriques passant par P_3 et ayant pour centres respectifs P_1 et P_2 ; les surfaces isométriques de centre P_2 déterminent ainsi sur Σ une famille de courbes dont deux se réduisent à des points et correspondent à celle de ces surfaces qui se réduit au point P_2 lui-même et à celle de qui est tangente à Σ. En désignant par P'_2 le point de contact ainsi défini, on voit que chacune des lignes ainsi déterminée sépare les points P_2 et P'_2.

La famille des lignes relatives à P_2 jouit de propriétés qui ne lui permettent pas de jouer le même rôle par rapport à un autre point de Σ, à l'exception de P'_2. Il en résulte que, si l'on fixe un autre point P_3 de Σ, la position d'un point quelconque de cette surface doit se trouver à la fois sur deux lignes différentes et par suite est déterminée.

Le groupe g possède, d'après cela, les propriétés suivantes :

Tout point de la surface Σ peut être transformé en un autre point ; si l'on fixe un point P_2 de Σ, un autre point P'_2 se

trouve également fixé et tout point de la surface décrit une courbe fermée séparant les points P_2 et P'_2; enfin la fixation d'un nouveau point empêche toute transformation.

Théorème 4. — *Si deux points distincts sont maintenus fixes, il en est de même de tous les points d'une ligne continue, ouverte et sans points doubles passant par ces deux points.*

A et B désignant deux points distincts, à chaque surface isométrique de centre A l'on peut faire correspondre deux surfaces isométriques de centre B tangentes à la première. (On peut, par exemple, les déterminer comme limites de suites convergentes de surfaces.) On obtient ainsi, sur chaque surface isométrique de centre A, deux points qui restent fixes en même temps que A et B.

D'après les hypothèses faites sur les surfaces isométriques, les points de contact ainsi obtenus constituent une ligne sans points doubles, centinue et ouverte (c'est-à-dire s'étendant à l'infini dans les deux sens). Cette ligne passe d'ailleurs évidemment par les points A et B.

Définition 4. — Les lignes définies par le théorème précédent seront appelées *lignes axiales* du groupe.

Théorème 5. — *Lorsqu'une surface admet toutes les transformations d'un groupe métrique* G *qui laissent fixe un point ainsi que toutes celles qui laissent fixe un autre point, cette surface admet toutes les transformations du groupe* G.

D'après le théorème I 3, les transformations du groupe G qui sont admises par une surface déterminée forment un groupe G′ (sous-groupe du groupe G). Supposons qu'un tel groupe comprenne toutes les transformations T qui laissent fixe un point M ainsi que toutes les transformations T′ qui laissent fixe un second point M′; il devra comprendre les produits de ces diverses transformations et, en particulier, toutes les transformations de la forme :

$$TT'T^{-1}.$$

Cette expression représente, d'après le théorème II 3, l'ensemble des transformations laissant invariant le point :

$$T(M'),$$

c'est-à-dire un point quelconque de la surface isométrique passant par M′ et ayant pour centre M.

On poursuivrait la démonstration en prouvant par le même procédé que le Groupe G′ comprend toutes les transformations de G qui laissent invariant tout point appartenant à une surface isométrique de centre M′ et, par suite, tout point de l'espace. Ce groupe ne peut être que le groupe G lui-même.

Ce théorème peut évidemment s'énoncer sous la forme suivante :

Théorème 5 *bis*. — *Une surface isométrique d'un groupe métrique ne peut admettre pour centre deux points distincts sans admettre également tous les points de l'espace.*

Nous admettrons le théorème suivant :

Théorème 6. — *La condition nécessaire et suffisante pour que trois surfaces isométriques ayant un point commun soient telles que l'une passe par l'intersection des deux autres est que leurs centres soient situés sur une même ligne axiale.*

Théorème 7. — *Une ligne axiale est le lieu des points laissés fixes par toutes les transformations du groupe* G *qui laissent fixes deux quelconques de ses points.*

Ce théorème peut se décomposer en deux parties :

1° Deux points quelconques d'une ligne axiale l'admettent comme ligne axiale. Il suffit évidemment de démontrer que tout point P d'une ligne axiale déterminée par deux points P_1 et P_2 détermine la même ligne axiale conjointement avec P_1 par exemple. Les surfaces isométriques passant par P_2 et ayant pour centres respectifs P_1 et P doivent se couper, d'après le théorème précédent, suivant la même ligne que les deux surfaces isométriques ayant pour centres respectifs P_1 et P_2 et passant également par P_2. Cette intersection se réduit, comme la dernière surface elle-même, à un point : il en résulte que les deux premières surfaces sont tangentes en P_2, c'est-à-dire que P_2 appartient à la ligne axiale déterminée par P_1 et P et par suite reste fixe en même temps que ces deux points.

2° Aucun point extérieur à une ligne axiale n'est maintenu fixe par toutes les transformations qui laissent fixes deux points de cette ligne. Si M désigne un point quelconque ex-

térieur à une ligne axiale, une surface isométrique passant par M et ayant son centre P sur cette ligne rencontre celle-ci en deux points, M_1 et M_2, et on a vu que, parmi les transformations du groupe G laissant fixe P_1, il en existe par lesquelles les points M_1 et M_2 sont maintenus fixes tandis que le point M décrit une ligne fermée. L'existence de ces transformations établit la proposition.

Des propriétés déjà établies résulte évidemment le théorème suivant :

Théorème 8. — *Les lignes axiales d'un groupe métrique forment un ensemble de lignes jouissant des propriétés suivantes :*

1° *Une ligne axiale est déterminée par un couple de points ;*

2° *Elle passe par ces deux points ;*

3° *Tout couple de points appartenant à une ligne axiale l'admet comme ligne axiale.*

Théorème 9. — *Le lieu des centres des surfaces isométriques passant par deux points donnés est une surface.*

A et B désignent deux points appartenant à la région X, considérons une ligne quelconque L joignant ces deux points et considérons toutes les surfaces isométriques passant par A et ayant pour centres les divers points de la ligne L. Celle de ces surfaces qui a pour centre A se réduit à un point, celle qui a pour centre B entoure ce point. Comme on passe de l'une à l'autre de ces surfaces par une suite continue, il existe nécessairement, dans la suite ainsi définie, une surface qui passe par B.

Il existe donc sur toute ligne joignant les points A et B un point du lieu. Il est visible, dans ces conditions, que ce lieu est une surface.

Définition 5. — Les surfaces définies par le théorème précédent seront appelées *surfaces axiales* du groupe métrique.

Théorème 10. — *Une ligne axiale qui a deux de ses points sur une surface axiale y est située toute entière.*

Deux points A et B d'une surface axiale sont, d'après la définition d'une telle surface, les centres de deux surfaces isométriques passant à la fois par deux points C et D de l'espace. Il en résulte, d'après le théorème G, que tout point de la ligne axiale déterminée par les deux points A et B, est le

centre d'une surface isométrique passant à la fois par les points C et D et par suite appartient à la surface axiale considérée.

Théorème 11. — *Par trois points donnés passe toujours une surface axiale.*

En effet, les trois surfaces isométriques ayant respectivement pour centres les trois points donnés A, B et C, et passant par un point arbitrairement choisi M ont en commun ce dernier point plus (au moins) un autre N. La surface axiale déterminée comme lieu des centres des surfaces isométriques passant par les points M et N contient évidemment les trois points A, B et C.

Théorème 12. — *La surface décrite par une ligne axiale qui s'appuie sur une ligne axiale donnée en passant par un point fixe extérieur à cette ligne est une surface axiale.*

En effet il existe, d'après le théorème précédent, une surface axiale passant par le point fixe donné et par deux points pris sur la ligne axiale donnée. Cette surface comprend, d'après le théorème 10, tous les points de la surface définie dans l'énoncé et par suite coïncide avec cette dernière.

Théorème 13. — *Par trois points dont l'un n'est pas situé sur la ligne axiale déterminée par les deux autres il ne passe qu'une surface axiale.*

Il n'existe qu'une seule surface axiale passant par trois points A, B et C lorsque l'un des points, C par exemple, est extérieur à la ligne axiale passant par les deux autres. En effet, les diverses lignes axiales passant par le point C et par les divers points de la ligne axiale AB forment évidemment une surface si C est extérieur à cette ligne ; tout point de cette surface, d'après le théorème 10, doit appartenir à toute surface axiale passant par les trois points A, B et C, celle-ci doit donc se confondre avec la surface ainsi décrite, qui est évidemment unique.

Les théorèmes 11 et 13 peuvent être réunis sous la forme suivante :

Théorème 13 *bis*. — *Une surface axiale est déterminée par la condition de passer par trois points non situés sur la même ligne axiale.*

Deux autres théorèmes sont évidents, savoir :

Théorème 14. — *Lorsque trois surfaces axiales ont deux points communs, tout point commun à deux d'entre elles appartient à la troisième.*

En effet, la ligne axiale déterminée par les deux points communs aux trois surfaces appartient à chacune d'elles d'après le théorème 10 ; elles ne peuvent d'ailleurs pas avoir d'autre point commun, d'après le théorème 13, sans se confondre.

Théorème 15. — *Deux surfaces axiales qui ont un point commun en ont toujours un second.*

Théorème 16. — *L'intersection de deux surfaces axiales est constituée par une ligne axiale.*

En effet, si deux surfaces axiales ont un point commun, elles en ont au moins un autre d'après le théorème précédent ; elles contiennent par suite toutes les deux, d'après le théorème 10, la ligne axiale déterminée par ces deux points. Enfin, d'après le théorème 13, elles ne peuvent pas avoir un autre point commun sans se confondre.

Théorème 17. — *Les lignes axiales qui s'appuient sur deux lignes axiales concourantes sont situées sur une même surface.*

En effet si D et D′ désignent deux lignes axiales concourantes en un point O, la surface formée par les lignes axiales passant par les divers points de D′ et par un point M de D est, d'après le théorème 12, une surface axiale. Comme elle comprend d'ailleurs deux points O et M de D, elle comprend aussi, d'après le théorème 10, tout point N de cette ligne, et par suite, d'après le même théorème, elle comprendra toute ligne axiale passant par N et par un point quelconque de D′. Comme le point N est quelconque sur la ligne D′, la surface axiale ainsi définie comprend bien toutes les lignes axiales qui s'appuient sur les lignes D et D′.

Théorème 18. — *Toute surface transformée par un groupe métrique d'une surface isométrique de ce groupe est une surface isométrique ayant pour centre le transformé du centre de la première.*

Il résulte du théorème II 2 que, si T désigne l'expression générale des transformations d'un groupe admises par une

figure F, toutes les transformations du groupe admises par une transformée F′ de F sont comprises dans l'expression générale :

$$STS^{-1},$$

S étant une des transformations du groupe qui transforment F en F′. Or une surface isométrique F d'un groupe métrique G admet, d'après le théorème 2, les mêmes transformations de G que son propre centre : il résulte donc de l'expression précédente que la transformée F′ de F par une transformation S de G admet les mêmes transformations de G que le transformé par S du centre de F, ce qui équivaut à l'énoncé du théorème.

Théorème 19. — *La région N relative à un groupe métrique est le lieu des points transformés de l'un d'eux par les transformations du groupe.*

Il résulte de la démonstration du théorème 9 que, sur toute ligne joignant deux points A et B de la région N, il existe un point qui est le centre d'une surface isométrique passant à la fois par A et B. On peut d'ailleurs tracer cette ligne de manière qu'elle reste tout entière dans la région N. Dans ces conditions, il résulte de l'axiome M III que chacun des points A et B se trouve parmi les transformés de l'autre par le groupe G.

Il reste à démontrer que, si A est un point appartenant à la région N, il en est de même de tout transformé B de A :

$$B = S(A)$$

par une transformation S du groupe, autrement dit que la propriété attribuée par l'axiome M III aux points de la région N est invariante par rapport au groupe. Or ce fait résulte manifestement du théorème précédent combiné avec les propriétés exprimées par le théorème II 2 : en effet deux points appartenant à une même surface isométrique de centre B sont les transformés par S de deux points appartenant à une surface isométrique de centre A ; ces deux derniers points sont susceptibles d'être transformés l'un dans l'autre puisque A appartient à la région N : et la transformation qui permet

d'obtenir ce résultat devient évidemment, par l'application de S une transformation ayant la même propriété par rapport aux deux points situés sur la surface isométrique de centre B. Ce dernier point appartient donc à la région N.

THÉORÈME 20. — *Si* A, B *et* A' *désignent trois points appartenant à la région* N *relative à un groupe métrique, il existe sur toute ligne axiale passant par* A', *d'un côté donné de ce point, un point et un seul* B' *tel que le couple de points* (A, B) *soit congruent au couple* (A', B') *par rapport au groupe.*

On peut en effet, d'après le théorème 19, amener le point A en coïncidence avec le point A' ; le transformé du point B pourra alors, d'après l'axiome M III, atteindre tous les points d'une surface isométrique ayant pour centre A'. Or il résulte de la construction même des lignes axiales telle qu'elle est exposée dans la démonstration du théorème 4, qu'une telle ligne rencontre une surface isométrique ayant pour centre un de ses points en deux points situés de part et d'autre de ce centre, ce qui démontre le théorème.

THÉORÈME 21. — *Les transformées par un groupe métrique* G *d'une de ses lignes axiales sont également des lignes axiales du groupe.*

En effet la construction par laquelle on détermine une de ces lignes est invariante par rapport au groupe G, puisque toute transformée par ce groupe d'une de ses surface isométriques est une surface isométrique ayant pour centre le transformé du centre de la première et qu'en outre le contact de deux surfaces constitue une propriété invariante par rapport à toutes les transformations ponctuelles (c'est-à-dire que les transformées de deux surfaces tangentes entre elles sont également tangentes).

THÉORÈME 22. — *Un couple de points* (A, B) *est toujours congruent par rapport à un groupe métrique au couple* (B, A).

En effet, il résulte de la construction des surfaces axiales exposée dans la démonstration du théorème 9 qu'il existe sur la ligne axiale AB entre les points A et B, un point O qui est le centre d'une surface isométrique passant à la fois par les points A et B. Par suite, le point O appartenant d'ailleurs à la région N, il est possible, tout en maintenant fixe ce

point, de donner comme transformé à B le point A. La transformée de la ligne axiale AB ou OB est alors, d'après le théorème précédent, la ligne axiale OA, qui se confond, d'après le théorème 8, avec la ligne axiale AB. Le transformé du point A devant se trouver à la fois sur cette ligne axiale et sur la surface isométrique passant par A et ayant pour centre O doit coïncider avec le point B, de sorte que le transformé du couple (A, B) est bien le couple (B, A).

THÉORÈME 23. — *Tout couple* (D, D') *de lignes axiales concourantes d'un groupe métrique* G *est congruent par rapport à ce groupe au couple* (D' D).

La démonstration de ce théorème peut être calquée sur celle du théorème précédent en observant qu'il résulte des théorèmes 10 et 21, combinés avec les propriétés du groupe g relatif à une surface isométrique que, lorsqu'on maintient fixes un point et une ligne axiale passant par ce point, une autre ligne axiale passant également par ce point décrit une surface qui rencontre suivant deux lignes axiales la surface axiale déterminée par les deux premières lignes.

THÉORÈME 24. — *Si* h_1 *et* h_2 *désignent deux demi-lignes axiales d'un groupe métrique* G *issues d'un même point* O *et si* h'_1 *désigne une demi-ligne axiale issue d'un point* O'_1, *il existe, sur toute surface axiale passant par la ligne axiale complète correspondante à* h'_1 *et d'un côté donné de cette ligne,* UNE *demi-ligne axiale* h'_2 *et* UNE SEULE *telle que la figure* (h_1, h_2) *soit congruente à la figure* (h'_1, h'_2) *par rapport au groupe* G.

Les points de concours O et O' sont supposés appartenir à la région N relative au groupe G.

On peut amener O en coïncidence avec O' d'après le théorème 19 puis un point de h_1 en coïncidence avec le point de h'_1 qui se trouve sur la même surface isométrique de centre O; d'après le théorème 21, h_1 coïncidera alors avec h', et, en se servant de la propriété invoquée pour la démonstration du théorème précédent, on voit que la demi-ligne axiale h_2 peut occuper, sur une surface axiale passant par h', deux et seulement deux positions, dont l'une est située d'un côté et l'autre de l'autre de la ligne axiale complète sur laquelle est prise h_1.

Les propriétés qui viennent d'être exposées sont communes à tous les groupes de transformations ponctuelles qui ont été réunis sous le qualificatif de *métriques;* mais certains de ces groupes peuvent présenter des particularités qui jouent un rôle important dans la question des Principes de la Métrique. L'une de ces particularités concerne la région N, l'autre la famille des lignes axiales.

La région N relative à un groupe métrique peut s'étendre à tout l'espace. Dans ce cas, l'énoncé de l'axiome M III se simplifie, car il suffit alors d'attribuer à tous les points de l'espace les propriétés réservées par cet axiome aux points d'une région déterminée. Il résulte alors du théorème 19 qu'un point quelconque de l'espace se trouve parmi les transformés d'un autre point quelconque. Nous poserons la définition suivante :

Définition 6. — Un groupe métrique sera dit *archimédien* lorsque tout point de l'espace se trouve parmi les transformés par le groupe d'un point quelconque et qu'en outre une transformation quelconque du groupe, appliquée à un point quelconque de l'espace, aura pour résultat un point déterminé (réel).

Les groupes ainsi définis peuvent être aussi caractérisés en disant que la surface qui limite la région N est *rejetée à l'infini.*

La seconde condition qui figure dans la définition des groupes archimédiens a pour but d'en éliminer certains : il peut se faire en effet que la région N comprenne tous les points de l'espace, mais qu'à chaque transformation du groupe corresponde une région limitée comprenant tous les points qui ont, par cette transformation, des transformés déterminés (réels), les points situés sur la surface qui limite ladite région ayant alors des transformés, pour ainsi dire, rejetés à l'infini et les points extérieurs à la région n'ayant pas de transformés (réels). Dans ce cas, au point de vue analytique, le groupe laisse encore une surface invariante, mais cette surface est *imaginaire* (cas des groupes riemanniens, par exemple).

La seconde particularité affecte la famille des lignes axiales.

Considérons une ligne continue, ouverte et sans point

double D, un point O extérieur à la ligne D, ainsi que d'autres lignes D' continues, ouvertes et sans points doubles, passant par le point O et constituant un ensemble tel que l'une d'entre elles soit déterminée par l'un de ses points distincts du point O. Si l'on considère une surface à simple connexion, continue et ouverte passant par O et par D et, sur cette surface, une ligne fermée entourant le point O, les divers point de cette ligne fermée déterminent avec O des lignes D', parmi lesquelles certaines rencontrent D et d'autres ne la rencontrent pas.

Les deux lignes D' qui constituent la limite commune aux régions de la surface ainsi définie, sont *asymptotiques* à D, l'une étant asymptotique à l'une des deux branches infinies de D' et l'autre à l'autre de ces branches.

Si l'on admet qu'une ligne D' ne peut pas avoir plus d'un point commun avec D, aucune de ces deux lignes asymptotiques ne peut rencontrer D, de sorte que deux cas seulement sont possibles : ou bien il existe deux lignes asymptotiques comprenant entre elles une infinité de lignes D' n'ayant pas de point commun (réel) avec D, ou bien ces deux lignes se confondent et constituent la seule ligne D' ne rencontrant pas D en un point déterminé (réel).

Ces considérations sont directement applicables à tout l'ensemble de lignes déterminées par deux quelconques de leurs points et, en particulier, à l'ensemble des lignes axiales d'un groupe métrique. Nous poserons donc la définition suivante :

Définition 7. — Lorsqu'un ensemble de lignes dont chacune est déterminée par deux quelconques de ses points est telle que par un point extérieur à l'une de ces lignes on ne puisse lui mener qu'une ligne asymptotique appartenant à l'ensemble, on dira que cette famille jouit de la propriété de l'*unicité de l'asymptotique*.

Il est inutile de pousser plus loin l'étude des groupes métriques. On verra en effet dans un prochain article que les théorèmes déjà démontrés constituent une base plus que suffisante pour édifier la métrique au moyen de raisonnements purement logiques.

Nous ne nous dissimulons pas d'ailleurs les nombreuses

défectuosités de cette étude et surtout ses lacunes. Il convient en effet, en établissant les propriétés de nouveaux concepts, d'en démontrer en même temps l'existence et même de les déterminer, c'est-à-dire, en Géométrie, de les *construire*. Tout groupe métrique peut être obtenu comme transformé, par une transformation convenablement choisie, d'un groupe métrique déterminé, par exemple du groupe des déplacements sans déformation. Mais on admet ainsi l'existence d'un groupe métrique.

Quant à nous, si nous attachons quelque valeur à cette ébauche malgré ses trop manifestes imperfections, c'est qu'elle nous semble propre à jalonner une voie, dont l'intérêt a été signalé par Sophus Lie lui-même (en des termes qui témoignent d'ailleurs d'une défiance injustifiée pour l'efficacité géométrique de ses propres axiomes).

Conclusions. — Quelle que soit la base adoptée pour la Métrique, une conclusion s'impose :

1° La Métrique ne constitue qu'un chapitre de la Géométrie, science de l'espace ;

2° Les propriétés dont elle traite ne sont caractéristiques d'aucun concept spécial, et elles ne mettent en œuvre que l'idée de figure, qui réunit en elle les concepts géométriques généraux, savoir ceux de point, ligne, surface, continuité, infini, à l'exclusion de tout concept métrique, tel que le déplacement sans déformation, la droite, le plan, etc.;

3° A plus forte raison, la Métrique (et, par suite, le postulat des parallèles) ne peut-elle rien nous apprendre sur la nature ou les propriétés de « l'espace » et, d'ailleurs, le concept de figure invariable perd tout intérêt proprement géométrique pour ne conserver qu'un intérêt *physique*.

Qu'il nous soit permis, en terminant, d'émettre, brièvement et sous toutes réserves, quelques réflexions inspirées par ces résultats.

Ne semble-t-il pas que la Géométrie, ainsi affranchie de la suggestion métrique, prend un aspect nouveau ? En voyant s'abolir l'importance traditionnelle de l'idée de figure invariable, l'on n'aperçoit plus aucun motif de maintenir la Science tout entière sous sa dépendance, ainsi que le réa-

lise actuellement le principe de *Relativité géométrique*. Après l'émancipation de la Géométrie, on est donc conduit à poursuivre celle de la Mécanique et de la Physique.

Les objections se présentent évidemment en foule, mais sont-elles insurmontables ?

La lumière se propage en ligne droite *dans les milieux homogènes ;* mais un milieu homogène n'est-il pas, par définition, celui dont les propriétés en chaque point de l'espace ne changent pas dans un déplacement sans déformation ? La rectilinéarité du rayon lumineux est donc peut-être simplement *voulue* par notre esprit.

Un point matériel *soustrait à toute influence mécanique extérieure* se meut en ligne droite avec une vitesse constante ; mais a-t-on jamais déterminé la part d'arbitraire, d'anthropomorphisme, de suggestion métrique, que comporte l'expression écrite en italiques ?

Les équations de Lagrange relatives à un système matériel quelconque permettent de déterminer, à un instant quelconque, les dérivées secondes des variables par rapport au temps en fonction de ces variables et de leurs dérivées premières et les seuls concepts proprement mécaniques qui figurent dans ces équations sont la force vive et le travail virtuel ; a-t-on une raison de nier *à priori* la possibilité d'une généralisation de ces concepts qui en exclurait toute empreinte métrique ?

Signalons enfin qu'une telle transformation des Principes de la Physique et de la Mécanique, qui aurait peut-être pour effet de leur attribuer un caractère de nécessité logique, paraît s'accorder avec les idées émises par M. Poincaré [1] dans un de ces aperçus dont l'illustre géomètre a le secret et où l'on ne sait ce que l'on doit le plus admirer de la profondeur de la pensée ou de la limpidité de l'expression.

G. COMBEBIAC (Limoges).

[1] H. POINCARÉ, *L'état actuel et l'avenir de la Physique mathématique*, Revue des Idées, 15 novembre 1904 (reproduit dans *La Valeur de la Science*, 2e partie : Les Sciences physiques).

SUR LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

I. — Supposons n positif entier, puis posons

$$\cos(n\varphi) = a_{n,0}(\cos\varphi)^n + a_{n,2}(\cos\varphi)^{n-2} + a_{n,4}(\cos\varphi)^{n-4} + \dots, \tag{1}$$

Heine[1] a déterminé les coefficients $a_{n,2p}$ en applicant, pour

$$x = \cos\varphi \pm i\sin\varphi,$$

la série de puissances ordinaire qui représente $\log(1+x)$. Les mêmes coefficients et les coefficients de quelques développements analogues sont déterminés par Yvon de Villarceau[2] qui a appliqué les propriétés différentielles des fonctions trigonométriques et sa méthode a été modifiée par Catalan[3].

En étudiant pour le moment les fonctions sphériques généralisées, j'ai trouvé une détermination tout à fait élémentaire de tous les coefficients susdits, et cela en m'appuyant seulement sur la formule binomiale à exposant positif entier et sur la série géométrique ordinaire.

A cet effet, nous avons à partir de l'identité

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q}: \tag{2}$$

posons d'abord

$$q = x(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

puis

$$q = x(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

[1] *Mathematische Annalen*, t. II, p. 187, 1870.
[2] *Comptes rendus*, t. LXXXII, p. 1469-1471, 1876.
[3] *Nouvelles Annales*, 3e série, t. II, p. 529-536, 1883.

nous aurons, en additionnant puis soustrayant les formules ainsi obtenues, ces deux autres

$$(3)\quad \frac{1 - x\cos\varphi}{1 - 2x\cos\varphi + x^2} = 1 + x\cos\varphi + x^2\cos 2\varphi + \ldots + x^n\cos(n\varphi) + x^{n+1}\,Q$$

$$(4)\quad \frac{x\sin\varphi}{1 - 2x\cos\varphi + x^2} = \qquad x\sin\varphi + x^2\sin 2\varphi + \ldots + x^n\sin(n\varphi) + x^{n+1}\,Q_1 ,$$

où Q et Q_1 désignent des quantités qui resteront finies pour $x = 0$.

Cela posé, mettons encore dans (2)

$$q = 2x\cos\varphi - x^2 ,$$

nous aurons de même

$$(5)\quad \frac{1}{1 - 2x\cos\varphi + x^2} = 1 + x(2\cos\varphi - x) + x^2(2\cos\varphi - x)^2 + \ldots + x^n(2\cos\varphi - x)^n + x^{n+1}\,Q_2 ,$$

où Q_2 est fini pour $x = 0$.

Ordonnons maintenant suivant les puissances positives entières de x les premiers termes du second membre de (5), nous aurons à chercher le coefficient de x^r obtenu du terme

$$x^{r-p}(2\cos\varphi - x)^{r-p} \quad , \quad 2p \leqq r ,$$

pour lequel la formule binomiale donnera immédiatement cette expression :

$$(-1)^p \binom{r-p}{p} (2\cos\varphi)^{r-2p} \quad ,$$

de sorte que nous obtenons, en vertu de (5), une nouvelle identité de cette forme

$$(6)\qquad \frac{1}{1 - 2x\cos\varphi + x^2} = 1 + A_1(\cos\varphi)\,x + A_2(\cos\varphi)\,x^2 + \ldots + A_n(\cos\varphi)\,x^n + x^{n+1}\,Q_3 ,$$

où Q_3 restera fini pour $x = 0$, tandis que nous avons posé pour abréger

$$(7)\quad A_r(\cos\varphi) = (2\cos\varphi)^r - \binom{r-1}{1}(2\cos\varphi)^{r-2} + \binom{r-2}{2}(2\cos\varphi)^{r-4} - \ldots$$

Multiplions maintenant par $x \sin \varphi$ les deux membres de (6), il résulte, en vertu de (4), une identité de cette forme

$$(8) \quad x^2 \sin 2\varphi + x^3 \sin 3\varphi + \ldots + x^n \sin (n\varphi) = x^2 A_1 (\cos \varphi) \sin \varphi + x^3 A_2 (\cos \varphi) \sin \varphi + \ldots + x^n A_{n-1} (\cos \varphi) \sin \varphi + x^{n+1} Q_4 ,$$

où Q_4 restera fini pour $x = 0$. Divisons ensuite par x^2 les deux membres de (8), puis mettons $x = 0$, il résultera

$$\sin 2\varphi = A_1 (\cos \varphi) \sin \varphi ,$$

d'où en divisant par x^3 l'identité nouvelle obtenue de (8) en supprimant le premier terme de ses deux membres, l'hypothèse $x = 0$ donnera de nouveau

$$\sin 3\varphi = A_2 (\cos \varphi) \sin \varphi ,$$

et ainsi de suite. Nous aurons généralement

$$(9) \quad \sin (n\varphi) = A_{n-1} (\cos \varphi) \,.\, \sin \varphi .$$

Cela posé, multiplions par $(1 - x \cos \varphi)$ les deux membres de (6), puis comparons avec (3) la formule ainsi obtenue, nous aurons, en suivant le même procédé, l'autre formule générale analogue à (9) :

$$(10) \quad \cos (n\varphi) = A_n (\cos \varphi) - A_{n-1} (\cos \varphi) \,.\, \cos \varphi .$$

Or, la formule (10) nous permet de déterminer les coefficients $a_{n.2s}$ figurant au second membre de (1) ; nous aurons en effet, pour $r > 0$,

$$a_{n.2r} = (-1)^r \binom{n-r}{r} 2^{n-2r} - (-1)^r \binom{n-r-1}{r-1} . \, 2^{n-2r-1} ,$$

d'où, après une simple réduction

$$(11) \quad a_{n.2r} = (-1)^r \, \frac{2n-r}{r} \, . \binom{n-r-1}{r-1} . \, 2^{n-2r-1} ,$$

tandis que nous trouverons particulièrement, pour $r = 0$,

$$(11 \text{ bis}) \quad a_{n.0} = 2^{n-1} .$$

Pour déduire d'autres formules fondamentales, mettons

dans (9) (10) $\frac{\pi}{2} - \varphi$ au lieu de φ, nous aurons pour n pair, en mettant $2n$ au lieu de n :

$$(12) \qquad \sin(2n\varphi) = (-1)^n \left[A_{2n-1}(\sin\varphi) \cdot \cos\varphi\right],$$

$$(13) \qquad \cos(2n\varphi) = (-1)^n \left[A_{2n}(\sin\varphi) - A_{2n-1}(\sin\varphi)\sin\varphi\right],$$

et pour n impair, en mettant $2n+1$ au lieu de n :

$$(12 \text{ bis}) \qquad \sin(2n+1)\varphi = (-1)^n \left[A_{2n+1}(\sin\varphi) - A_{2n}(\sin\varphi)\sin\varphi\right]$$

$$(13 \text{ bis}) \qquad \cos(2n+1)\varphi = (-1)^n \, A_{2n}(\sin\varphi)\cos\varphi \,.$$

Cela posé, remarquons ensuite que le produit

$$P_n = \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{n}\right)\sin\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) \ldots \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

s'évanouira pour $x = \frac{p\pi}{n}$, où p désigne un nombre entier quelconque, puis appliquons l'identité

$$\sin\left(x + \frac{p\pi}{n}\right)\sin\left(x + \frac{(n-p)\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{p\pi}{n} + x\right)\sin\left(\frac{p\pi}{n} - x\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sin\left(x + \frac{p\pi}{n}\right)\sin\left(x + \frac{(n-p)\pi}{n}\right) = \sin^2\frac{p\pi}{n} - \sin^2 x \,.$$

il est évident que P_n est un polynome entier de $\sin x$, abstraction faite du facteur $\cos x$ dans le cas, où n est pair ; c'est-à-dire que P_n est une expression complètement de la même nature que le second membre de (12) et (12 bis) si nous y remplaçons φ par x ; de plus P_n s'évanouira pour les mêmes valeurs de $\sin x$ que $\sin(nx)$, d'où il résulte une identité de cette forme

$$(14) \quad \sin x = \alpha_n \cdot \sin\frac{x}{n} \cdot \sin\frac{x+\pi}{n} \cdot \sin\frac{x+2\pi}{n} \ldots \sin\frac{x+(n-1)\pi}{n} \,.$$

où α_n désigne un facteur indépendant de x.

Pour déterminer maintenant la valeur de α_n divisons d'abord

par x les deux membres de (14), puis posons $x = 0$, nous aurons

(15) $$n = \alpha_n \,.\, \sin\frac{\pi}{n} \,.\, \sin\frac{2\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

tandis que l'hypothèse $x = \frac{\pi}{2}$ donnera de même

(16) $$1 = \alpha_n \,.\, \sin\frac{\pi}{2n} \,.\, \sin\frac{3\pi}{2n} \ldots \sin\frac{(2n-1)\pi}{2n} \,.$$

d'où en multipliant (15) (16)

$$2n = 2\alpha_n^2 . \sin\frac{\pi}{2n} \sin\frac{2\pi}{2n} \sin\frac{3\pi}{2n} \ldots \sin\frac{(2n-1)\pi}{2n} \,.$$

ce qui donnera, en vertu de (15),

(17) $$\alpha_{2n} = 2\alpha_n^2 \,.$$

Cela posé, mettons dans (15),

$$\sin\frac{2p\pi}{n} = 2\cos\frac{p\pi}{2n} \sin\frac{p\pi}{2n} = 2\sin\frac{p\pi}{2n} \sin\frac{(n+p)\pi}{2n} \,,$$

nous aurons de même

$$n = \alpha_n \,.\, 2^{n-1} \frac{2n}{\alpha_{2n}} \,,$$

ou bien,

$$\alpha_{2n} = 2^n . \alpha_n \,.$$

d'où, en vertu de (17),

$$\alpha_n = 2^{n-1} \,;$$

car la valeur $\alpha_n = 0$ est impossible ici : nous avons ainsi démontré cette autre formule générale

(18) $$\sin x = 2^{n-1} \sin\frac{x}{n} \sin\frac{x+\pi}{n} \sin\frac{x+2\pi}{n} \ldots \sin\frac{x+(n-1)\pi}{n} \,.$$

tandis que les formules (15) (16) donnent ces résultats numériques

(19) $$\sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \sin\frac{3\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

(19 bis) $$\sin\frac{\pi}{2n} \sin\frac{3\pi}{2n} \ldots \sin\frac{(2n-1)\pi}{2n} = \frac{1}{2^{n-1}} \,.$$

11. — Pour donner une application des dernières formules que nous venons de développer, cherchons le discriminant Δ_n de cette équation algébrique

$$(20) \qquad a_{n,0}x^n + a_{n,2}x^{n-2} + a_{n,4}x^{n-4} + \ldots = \omega ,$$

où ω est une quantité donnée, tandis que les coefficients $a_{n,2p}$ sont les mêmes qui figurent dans (1).

A cet effet, désignons par α un des angles qui satisfont à l'égalité

$$\cos\alpha = \omega ,$$

de sorte que α deviendra imaginaire, quand ω n'est pas égal à une quantité réelle, telle que $-1 \leqq \omega \leqq +1$; mais, en tous cas, toutes les racines de (20) deviendront

$$\cos\frac{\alpha}{n},\ \cos\frac{\alpha+2\pi}{n},\ \ldots,\ \cos\frac{\alpha+(2n-2)\pi}{n}.$$

Cela posé, nous trouverons $\pm\sqrt{\Delta_n}$ égale au produit de tous les facteurs de la forme

$$(21) \quad \cos\frac{\alpha+2p\pi}{n} - \cos\frac{\alpha+2q\pi}{n} = 2\sin\frac{(q-p)\pi}{n}\cdot\sin\frac{\alpha+(p+q)\pi}{n},$$

où $q > p$, et où $0 \leqq p \leqq n-2$, $1 \leqq q \leqq n-1$. Or, le nombre de facteurs possibles de la forme (21) étant $\frac{n(n-1)}{2}$, nous aurons évidemment

$$(22) \qquad \Delta_n = 2^{n(n-1)}\cdot P_1^2 \cdot P_2^2 ,$$

où P_1 et P_2 désignent les produits de tous les facteurs possibles de ces formes

$$\sin\frac{(q-p)\pi}{n} \quad \text{respectivement} \quad \sin\ldots\frac{x+(q+p)\pi}{n} ;$$

c'est-à-dire que nous aurons d'abord

$$P_1 = \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{n-1}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{n-2}\ldots\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)^1 ,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$P_1 = \left(\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)^{n-1}\left(\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\right)^{n-2}\cdots\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^1;$$

car nous avons toujours

$$\sin\frac{(n-p)\pi}{n} = \sin\frac{p\pi}{n}.$$

Multiplions ensuite les deux expressions ainsi obtenues pour P_1, il résultera, en vertu de (19),

$$(23) \qquad P_1^2 = \left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)^n.$$

La détermination du produit P_2 est un peu plus difficile, parce qu'il faut considérer séparément les deux cas, où n est pair ou impair.

1° *n impair*, savoir $n = 2r + 1$; je dis que la somme $p + q$ peut avoir une des deux valeurs s ou $s + 2r + 1 \leqq 4r - 1$, où

$$s = 1, 2, 3, \ldots, 2r,$$

précisément pour r combinaisons des valeurs possibles de p et q ; on aura en effet pour s pair

$$p + q = S \text{ pour } \begin{cases} q = s,\ s-1,\ s-2, \ldots, \frac{s}{2}+1 \\ p = 0,\ 1,\ 2, \qquad \ldots, \frac{s}{2}-1 \end{cases}$$

et de même, pour $s \leqq 2r - 2$,

$$p + q = s + 2r + 1 \text{ pour } \begin{cases} q = 2r,\ 2r-1,\ 2r-2, \ldots, r+\frac{s}{2}+1 \\ p = s+1,\ s+2,\ s+3, \ldots, r+\frac{s}{2}, \end{cases}$$

tandis que le cas, où s est impair donnera de même

$$p + q = s \text{ pour } \begin{cases} q = s,\ s-1,\ s-2, \ldots, \frac{s+1}{2} \\ p = 0,\ 1,\ 2, \qquad \ldots, \frac{s-1}{2} \end{cases}$$

et, pour $s \leqq 2r - 3$

$$p + q = s + 2r + 1 \text{ pour } \begin{cases} p = 2r, 2r-1, \ldots, r + \dfrac{s+1}{2} + 1 \\ q = s+1, s+2, \ldots, r + \dfrac{s-1}{2}, \end{cases}$$

et voilà la démonstration de notre énoncé.

Cela posé, nous aurons évidemment

$$P_2 = \pm \left(\sin \frac{\alpha}{n} \sin \frac{\alpha - \pi}{n} \ldots \sin \frac{\alpha + (n-1)\pi}{n} \right)^{\frac{n-1}{2}},$$

d'où, en vertu de (18),

$$P_2^2 = \left(\frac{\sin \alpha}{2^{n-1}} \right)^{n-1};$$

or, la définition de α donnera

$$\sin^2 \alpha = 1 - \omega^2,$$

d'où finalement, en vertu de (22) et (23), pour *n impair*

$$(24) \qquad \Delta_n = \frac{n^n (1 - \omega^2)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{(n-1)^2}}.$$

2° *n pair*, soit $n = 2r$; je dis que la somme $p + q$ peut avoir une des deux valeurs s ou $s + 2r \leqq 4r - 3$, où

$$s = 1, 2, 3, \ldots, 2r - 1,$$

pour r respectivement $r - 1$ combinaisons de valeurs possibles de p et q, selon que s est supposé impair ou pair. On aura en effet pour $p + q = s$ les mêmes solutions que dans 1°, mais pour $p + q = s + 2r$, où $s \leqq 2r - 3$, les solutions suivantes, savoir pour s pair

$$q = 2r - 1, 2r - 2, \ldots, r + \frac{s}{2} + 1$$

$$p = s + 1, s + 2, \ldots, r + \frac{s}{2} - 1$$

et pour s impair

$$q = 2r - 1, 2r - 2, \ldots, r + \frac{s+1}{2}$$

$$p = s + 1, s + 2, \ldots, r + \frac{s-1}{2}.$$

ce qui donnera r respectivement $r - 1$ systèmes possibles, d'où

$$P_2^2 = \frac{\left(\sin\frac{\alpha}{n}\sin\frac{\alpha+\pi}{n}\dots\sin\frac{\alpha+(n-1)\pi}{n}\right)^n}{\left(\sin\frac{\alpha}{n}\sin\frac{\alpha+2\pi}{n}\dots\sin\frac{\alpha+(n-2)\pi}{n}\right)^2}$$

ou bien, en vertu de (18),

$$P_2^2 = \frac{(\sin\alpha)^n}{2^{(n-1)^2}\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{(1-\omega^2)^{\frac{n}{2}}}{2^{(n-1)^2}(1-\omega)},$$

de sorte que nous obtenons pour *n pair*

$$\Delta_n = \frac{n^n(1-\omega^2)^{\frac{n}{2}-1}(1+\omega)}{2^{(n-1)^2}}.$$

NIELS NIELSEN (Copenhague).

SUR L'APPROXIMATION DES RACINES D'ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

---

1. Les approximations successives.

Etant donnée l'équation

$$x = F(x) \tag{1}$$

dont on connaît une solution approchée x_0, formons les quantités x_ν suivant la formule

$$x_{\nu+1} = F(x_\nu) \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots) \tag{2}$$

x_n sera une valeur approchée de la racine x, si la différence $x_{n+1} - x_n$ est négligeable. Car on a

$$x_n - F(x_n) = x_n - x_{n+1}.$$

Pour juger l'approximation obtenue par la méthode, changeons ν en $\nu + 1$, dans l'équation (2), et retranchons avec l'équation (2) :

$$x_{\nu+2} - x_{\nu+1} = F(x_{\nu+1}) - F(x_\nu) .$$

Le théorème de la moyenne ou de Rolle permet de conclure

$$(3) \qquad x_{\nu+2} - x_{\nu+1} = (x_{\nu+1} - x_\nu) F'(\xi_\nu) ,$$

où ξ_ν fait partie de l'intervalle $(x_\nu \ldots x_{\nu+1})$. Il s'ensuit

$$(4) \qquad x_{n+1} - x_n = (x_1 - x_0) F'(\xi_0) F'(\xi_1) \ldots F'(\xi_{n-1}) .$$

Pour que la méthode soit applicable, il faut que la fonction $F'(\xi)$ soit petite aux environs de la racine cherchée.

Dans l'équation de Kepler

$$x = a + \varepsilon \sin x$$

on a

$$F'(x) = \varepsilon \cos x ;$$

la méthode des approximations successives fournira de bons résultats, si $|\varepsilon| \leq \frac{1}{10}$, ou si $|\varepsilon|$ étant toujours ≤ 1, la racine x est approchée de $\pm \frac{\pi}{2}$, ce qui exige que a soit approché de $\pm \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$.

2. La solution de l'équation

$$f(x) = 0$$

dont on connaît une valeur approchée x_0 se ramène au cas précédent en faisant

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)} .$$

Faisant $x = x_0 + h$, l'expression de la dérivée se développe en série

$$F'(x_0 + h) = -\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)} h - \frac{f'''(x_0)}{2!\, f'(x_0)} h^2 - \ldots$$

d'où il suit qu'on ait sensiblement

$$F'(\xi) = \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)}(x_0 - \xi)$$

Cette quantité sera petite, si la racine dont il s'agit, est simple.

Remarquons que, pour déterminer des racines multiples, on ne fait pas usage de l'algorithme du plus grand commun diviseur, impossible pour des équations transcendantes, et très rarement praticables pour des équations algébriques.

S'il s'agit d'une racine de multiplicité p, on résout l'équation

$$f^{(p-1)}(x) = 0$$

dont la racine en question est une solution simple.

3. La méthode de Newton successive.

Elle consiste dans la formation des quantités

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

et n'est autre que la méthode du numéro 1, pourvu que l'on fasse

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

On a ici

$$F'(x) = \frac{f''(x)f(x)}{f'(x)^2}$$

et il s'ensuit d'après (4).

$$x_{n+1} - x_n = (x_1 - x_0) \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{f''(\xi_\nu) f(\xi_\nu)}{f'(\xi_\nu)^2}.$$

Cette méthode est plus rapide que celle du numéro précédent, car ici le numérateur contient des facteurs $f(\xi_\nu)$ qui tendent vers zéro, tandis que les quantités $F'(\xi_\nu)$ du numéro 2 sont presque constantes ; mais cette dernière présente cet avantage que le dénominateur $f'(x_0)$ dans les formules

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f(x_\nu)}{f'(x_0)}$$

est constant.

4. Une méthode pour résoudre l'équation

$$f(x) = 0$$

consiste à effectuer l'inversion d'une série de puissances. Posant en effet

(5) $$f(x_0 + \xi) = f(x_0) + \eta ,$$

le problème prend la forme

(5 bis) $$a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + \dots = \eta ,$$

et on a, d'après un algorithme connu,

(6) $$\xi = b_1 \eta + b_2 \eta^2 + b_3 \eta^3 + \dots ;$$

il ne reste qu'à prendre $\eta = -f(x_0)$ pour avoir

$$f(x_0 + \xi) = 0 .$$

5. Le développement (6), borné à ses deux premiers termes, devient

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{1}{2} \frac{f''(x_0) f(x_0)^2}{f'(x_0)^3} ,$$

x_1 étant la nouvelle valeur approchée de la racine $x = x_0 + \xi$. Cette formule nous amène à prendre, pour employer la méthode du numéro 1,

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{1}{2} \frac{f''(x) f(x)^2}{f'(x)^3} , \quad x_{\nu+1} = F(x_\nu) .$$

On a ici

$$F'(x) = \frac{3f''(x)^2 - f'(x) f'''(x)}{2f'(x)^4} f(x)^2$$

et il est manifeste que la convergence est beaucoup plus rapide que dans la méthode de Newton ; mais elle est aussi plus pénible, puisque elle emploie des valeurs de la dérivée seconde.

6. On aura une généralisation de la *regula falsi*, si l'on effectue l'inversion de l'équation

$$f(x) = y$$

au moyen de la formule d'interpolation

$$x = x_0 + B_1(y - y_0) + B_2(y - y_0)(y - y_1) + B_3(y - y_0)(y - y_1)(y - y_2) + \dots$$

où l'on a posé

$$y_\nu = f(x_\nu),$$

en prenant pour les x_ν des quantités arbitraires aux environs de la racine cherchée x' ; en faisant $y = 0$, il vient

$$(7) \qquad x' = x_0 - B_1 y_0 + B_2 y_0 y_1 - B_3 y_0 y_1 y_2 + \dots$$

Quant aux quantités B_ν, on les calcule au moyen des équations

$$(8) \qquad \begin{cases} x_1 = x_0 + B_1(y_1 - y_0) \\ x_2 = x_0 + B_1(y_2 - y_0) + B_2(y_2 - y_0)(y_2 - y_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Pour avoir une approximation commode, on choisit x_0, x_1 et calcule y_0, y_1 ; cela permet d'évaluer B_1 ; puis on fait, pour se tenir à la méthode (7),

$$x_2 = x_0 - B_1 y_0,$$

et on détermine $y_2 = f(x_2)$; la deuxième équation (8) donne alors aisément la valeur de B_2. Ensuite, on fait

$$x_3 = x_0 - B_1 y_0 + B_2 y_0 y_1 = x_2 + B_2 y_0 y_1, \quad y_3 = f(x_3),$$

et on tire du système (8) la valeur de B_3, et ainsi de suite.

M. Lerch (Fribourg, Suisse).

A PROPOS D'UN LIVRE[1] DE M. COUTURAT

La lecture de l'opuscule de M. Couturat paru dans le recueil Scientia, sur l'Algèbre de la Logique, m'a vivement intéressé et m'a suggéré l'idée de présenter les choses traitées par l'éminent philosophe sous un aspect un peu différent ; contrairement à ce qu'il avance, je crois que l'algèbre de la logique fait partie de l'algèbre ordinaire et repose sur ses principes. Je vais essayer de m'expliquer.

Je me permets de rappeler.

1° Que deux choses identiques, sont deux choses qui ne diffèrent en rien l'une de l'autre, elles ne forment qu'une seule et même chose, car si elles ne formaient pas une seule et même chose, elles différeraient l'une de l'autre par quelque propriété.

2° Que deux choses égales sont deux choses qui deviennent identiques quand on fait abstraction d'un certain nombre de leurs propriétés. Un cheval et un lapin sont égaux quand faisant abstraction de toutes leurs autres propriétés, on les considère comme des animaux, c'est ainsi qu'un cheval et un lapin font deux animaux.

3° L'addition est l'opération commutative, ainsi la multiplication est une forme de l'addition, les objets nuls sont ceux qui peuvent être ajoutés sans modifier le résultat de l'addition. 1 est l'objet nul dans la multiplication des nombres considérés comme addition.

4° les quantités de même espèce sont les choses à propos desquelles on a défini l'égalité et l'addition.

5° Un nombre est une locution et un signe qui la repré-

[1] *L'Algèbre de la Logique,* Collection Scientia, Gauthier-Villars, Paris, 1905.

sente) qui sert à désigner avec précision une quantité, et celles qui lui sont égales, de manière à les distinguer des autres.

6° Pour désigner ainsi, ou comme l'on dit, pour mesurer une quantité, on en choisit une parmi celles de même espèce que l'on appelle unité, et l'on donne des noms à celles qui résultent de l'addition successive d'unités, ces noms sont les nombres entiers.

Il peut arriver que l'unité soit divisible en parties égales (locution à définir) alors on est conduit à la considération des nombres fractionnaires et même incommensurables, mais le contraire peut avoir lieu.

Après avoir fait cela, il peut arriver, et il arrive presque toujours, que l'on a défini toutes les quantités considérées de manière à les distinguer de celles qui leur sont inégales, mais il peut en être autrement. (On sait, par exemple, qu'après avoir défini l'égalité et l'addition des vecteurs on peut choisir parmi eux une unité, faire le travail indiqué précédemment, mais on ne définit ainsi qu'une partie des vecteurs de l'espace, à savoir ceux de même orientation que l'unité choisie).

Dans ce cas, on prend une seconde unité non comprise parmi les quantités déjà mesurées, cette seconde unité définit une nouvelle série de quantités, en appelant i la première unité, j la seconde, on peut représenter une quantité de la première série mesurée par le nombre a par ai, de même une quantité de la seconde série sera représentée par bj. Il peut arriver que $ai + bj$ soit un symbole capable de représenter toutes les quantités considérées, (c'est ce qui arrive pour les vecteurs d'un plan); le contraire peut avoir lieu, on prend alors une troisième unité, etc. Les nombres de la forme $ai + bj + ck + \ldots$ sont alors des nombres complexes (ou imaginaires) $i, j \ldots$ sont des *clefs*.

Enfin, il peut arriver que les unités étant indivisibles, les nombres complexes $ai + bj + \ldots$ sont des entiers complexes, $a, b \ldots$ désignant des entiers ordinaires.

Il peut arriver que les unités toutes, ou seulement une partie d'entre elles soient indivisibles. Les coefficients de cer-

taines clefs peuvent être nécessairement entiers. Par exemple ajouter des hommes et des chevaux, ce sera si l'on veut les amener sur un champ de bataille ; on considérera les hommes comme égaux entre eux, les chevaux comme égaux entre eux, mais non égaux aux chevaux, et on pourra baser un calcul sur des nombres complexes $ah + bc$, où h sera un homme, c un cheval.

Il peut arriver que non seulement les unités soient indivisibles, mais qu'elles soient en nombre limité, ce cas va nous intéresser tout particulièrement. Alors i désignant une clef, on aura nécessairement n désignant un entier $ni = i$ ou ri,.. et (mais peu importe pour notre objet) on aura $ni = i$, ce qui n'est contradictoire avec nos habitudes, qu'en apparence, la théorie des congruences présente des formules analogues à celle-ci.

Enfin il peut arriver que dans chaque série, il n'entre qu'une quantité qui sera à la fois unité et de nul effet, on aura en appelant i une clef $i + i = i$ puisqu'il n'y a qu'un objet dans la série relative à la clef i. Toutefois l'existence de pareilles quantités complexes est à démontrer. (Quoique l'on puisse, au point de vue logique spéculer sur de telles quantités en admettant leur existence, et par le fait on a longtemps spéculé sur l'imaginaire $\sqrt{-1}$ avant d'en avoir démontré l'existence, on a spéculé sur les systèmes linéaires de Laguerre avant d'avoir remarqué que ces imaginaires étaient des substitutions très réelles).

J'arrive à l'interprétation concrète de nos quanitités complexes. *Ce sont les diverses propositions que l'on peut énoncer.*

Ce sont des quantités, car on peut définir leur égalité et leur addition comme il suit :

1° *Deux propositions sont égales, quand elles expriment le même fait, vrai ou faux, dans les mêmes termes ou dans des termes équivalents.*

2° La somme de plusieurs propositions consiste dans leur affirmation alternative : Je m'explique : *si* i, j, k *sont des propositions*, i + j + k *voudra dire que l'une des propositions* i, j, k *est vraie.*

On a défini produit de plusieurs propositions i, j, k,

leur affirmation simultanée, ainsi $i\,j\,k$ est la proposition en vertu de laquelle $i, j, k,$ sont vraies à la fois.

Il est clair que l'on aurait pu appeler somme ce que nous avons appelé produit et vice-versa, et cela eut peut-être été plus simple.

Il est bien évident alors que $i + i = i$, si i est une proposition quelconque, car si i est vrai, ou i, ou i sera vrai, on voit que $i + j$ n'est pas égal à i ou à j, de même $i.i = i$. Dans le calcul de nos quantités complexes, il n'y aura donc ni facteurs *numériques*, ni exposants.

La différence $d = i - j$ de deux propositions est telle que ajoutée à j elle donne i. Ainsi $d + j = i$, donc si d ou j sont vraies, i est vraie.

Dans les théories ordinaires, la soustraction ne peut se faire que d'une manière, je rappelle la démonstration : si l'on pouvait avoir

$$\delta + j = i \quad \text{et} \quad \delta' + j = i$$

on en conclurait

$$\delta + j = \delta' + j$$

et en posant $\delta' = \delta + \varepsilon$, si δ' était plus grand que δ on aurait

$$\delta + j = \delta + j + \varepsilon$$

et ε serait un objet nul, et comme on *convient* de ne pas écrire les objets nuls, on a $\delta = \delta'$. Mais ici nous *convenons* au contraire d'écrire et de tenir compte des objets nuls, la soustraction, et aussi la division pourront se faire de plusieurs manières, donc dans la théorie des idées, il n'y a en résumé ni soustraction, ni division, ni multiplication par un *nombre* ordinaire, ni exposants, ni radicaux. Il y a là une simplicité apparente, au moins réelle dans les formules, et peut-être une complication dans les idées.

On a trouvé commode de prendre une clef égale à i, comme dans le calcul des imaginaires de la forme $a + bi$, et une autre égale à zéro.

i est l'expression de tout ce qui est vrai, o est le faux ou

l'absurde. Je préférerais la convention inverse, et en effet si l'on désigne par a' la négation de a on a

$$aa' = 0 \quad \text{et} \quad a + a' = 1,$$

on préférerait avoir

$$aa' = 1 \quad , \quad a + a' = 0,$$

cela choquerait moins les habitudes.

Je n'ai pas à examiner ici les conséquences du nouveau calcul, j'ai simplement voulu prouver que en partant de la définition nette et précise de la quantité, non seulement on peut, comme je l'ai fait voir dans mon opuscule sur les principes de la théorie des nombres et de la géométrie (Scientia) 1° établir sur des principes solides la mathématique pure et appliquée; 2° faire rentrer dans la mathématique pure, ou dans la théorie des nombres complexes, ce que l'on a appelé l'algèbre de la logique.

H. LAURENT (Paris).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sous ce titre nous publions les remarques et renseignements concernant plus ou moins directement l'enseignement mathématique, telles que des descriptions d'instruments ou d'appareils nouveaux, etc. Quant à la correspondance, elle permet à tout lecteur de présenter sous une forme rapide les idées qui lui semblent utiles, les remarques suggérées par la lecture d'un article, ou les questions sur lesquelles il aurait besoin d'un renseignement.

LA RÉDACTION.

Sur l'enseignement de la Géométrie.

(Extrait d'une lettre à M. Laisant.)

L'intéressant article de Mr Gino Loria (voir pp. 11 à 20) *sur l'enseignement des mathématiques élémentaires en Italie* m'a rappelé qu'à l'Ecole d'application de l'Artillerie et du Génie, où j'ai suivi un cours de Fortification permanente, la première leçon de ce cours m'a beaucoup troublé. Il m'a été impossible de comprendre le profes-

seur. Il parlait constamment des *contrebatteries de l'ennemi placées en arrière de la crête du chemin couvert du bastion opposé* et je n'étais pas préparé à ce langage. J'ai tiré alors cette conclusion :

L'étude d'une science doit être précédée de l'étude du langage qui lui est propre.

C'est ainsi qu'on procède en stéréotomie, la partie relative à la charpente commence par l'étude des principaux assemblages. On emploie différents modes de projection et de perspective pour faire concevoir la forme de ces assemblages comme application des procédés de la Géométrie descriptive; mais à côté de cela il y a les noms des assemblages. Ce sont ces noms et les termes en usage, successivement appris en même temps que la représentation des assemblages, qui permettent d'entrer facilement dans l'étude d'une charpente.

On devrait agir de la même manière pour l'enseignement de la Géométrie et n'arriver aux premières leçons qu'avec une certaine connaissance du langage géométrique. La chose serait très facile à obtenir si, donnant à l'enfant une règle, une équerre, des compas, on lui demandait de tracer des figures à côté desquelles il écrirait ce qu'elles représentent. Après avoir appris ainsi ce que sont les triangles divers, les quadrilatères, etc., etc., il aurait les mots nécessaires pour comprendre les premières notions géométriques. Vous partagez mon opinion, puisque vous dites à la page 220 de votre excellent ouvrage, *la Mathématique:* « Mais, de même que pour l'arithmétique il y a une préparation préliminaire, la pratique du calcul, de même il est utile que la Géométrie théorique soit précédée de la pratique du dessin. »

De là, à l'application, surtout en France, il y a très loin.....

MANNHEIM (Paris).

A propos d'un théorème sur le triangle[1].

XIII. — Lettre de M. V. RETALI (Milan) :

Le théorème que M. Kariya (Tokio) croit nouveau a été établi par moi en 1896, dans le *Periodico di Matematica* (Roma, XI, p. 71). La démonstration est celle même donnée par M. Harold Hilton dans sa note parue dans *l'Ens. math.* (1904, p. 237).

XIV. — D'autre part, M. CANTONI (Viadana, Mantova) nous écrit que suivant une information de M. Kariya, la propriété *d)* examinée par lui dans *l'Ens. math.* (1905, p. 46) aurait déjà été étudiée par M'CLLELLAND dans sa *Geometry of the circle*, p. 82.

XV. — M. J. NEUBERG a publié dans *Mathesis* (mai, 1905, p. 117-

[1] Voir l'*Ens. math.* 6me année, 1904, pp. 130-132, 236-239, 406-410; 7me année, 1905, pp. 44-51.

118) une note dans laquelle il mentionne les travaux antérieurs se rapportant au théorème étudié par M. Kariya et dont une bonne partie a paru dans *Mathesis* :

« M. Lemoine (AFAS, Paris, 1889, p. 202) abaisse d'un point quelconque dans les perpendiculaires MX, MY, MZ sur les côtés BC, CA, AB du triangle ABC et prend sur ces droites les longueurs MA_1, MB_1, MC_1, inversément proportionnelles à MX, MY, MZ. Il observe que les droites AA_1, BB_1, CC_1 concourent en un point L qui parcourt l'hyperbole équilatère ABCM, que le centre de cette courbe est le point de contact du cercle des neuf points de A B C avec un cercle tritangent lorsque M est le centre I, I′, I″, I‴ d'un tel cercle. A cause de cette dernière propriété, j'ai proposé la dénomination d'*hyperbole de Feuerbach* pour l'hyperbole équilatère ABCI. »

« M. Boutin (JMS, 1890, pp. 104 et 128) étudie les hyperboles équilatères ABCI, ABCI′, ABCI″, ABCI‴ comme transformées isogonales des droites OI, OI′, OI″, OI‴ et aussi comme lieux des points de Kariya. »

« Dans un article de *Mathesis* (1893, p. 81-89) que j'ai rédigé en grande partie d'après une note manuscrite de M. Mandart, l'hyperbole équilatère ABCI est le lieu du centre d'orthologie du triangle ABC et d'un triangle variable $A_2B_2C_2$ qu'on obtient en portant sur les médiatrices OA′, OB′, OC′ du triangle ABC, à partir des milieux A′, B′, C′ des côtés, trois longueurs égales variables $A'A_2 = B'B_2 = C'C_2$. »

« Enfin, M. Speckmann (*Mathesis*, 1903, pp. 265-270) part du théorème de M. Kariya et étudie comme MM. Boutin et Mandart, quelques involutions remarquables sur l'hyperbole équilatère ABCI. »

XVI. — Extrait d'une lettre de M. Tabakoff (Nancy) :

« Mon honorable compatriote, M. Stoïanoff, professeur de mathématiques à l'Ecole militaire de Sofia, a traduit toutes les propositions sur le triangle, suggérées par le théorème de M. Kariya et les a publiées dans notre petit journal de la Société mathématique de Sofia. A propos du même théorème j'ai donné une autre *proposition réciproque de celle de Kariya* dans le journal susdit, puis j'ai montré comment on peut généraliser le théorème de Kariya et sa réciproque. Dernièrement j'ai donné un *théorème réciproque de celui de M. Franke* et en même temps j'ai trouvé une généralisation des deux théorèmes qui est tout à fait différente de celle de M. Cantoni et même on peut généraliser, celle de M. Cantoni. »

Faute de place nous devons nous borner à donner les énoncés de ces deux propriétés :

a) La *réciproque du théorème de MM. Retali-Kariya* peut s'énoncer comme suit :

« Soit O le centre de la circonférence circonscrite au triangle

ABC. On joint OA, OB, OC; puis, à partir de O, on porte sur ces droites des longueurs OP, ON, OM égales à *d*. Par les points M, N, P on mène des perpendiculaires aux droites OC, OB, OA et l'on cherche les points d'intersection avec les droites AB, AC, CB; les trois points C_1, B_1, A_1 ainsi obtenus sont situés sur une même droite. »

b) Proposition réciproque de celle de M. Franke[1] *:*

« Soit O le centre de la circonférence inscrite dans le triangle ABC et M, N, P les points partageant les segments OA, OB, OC dans un rapport *q*; on mène par ces points des droites respectivement perpendiculaires à ces segments et l'on cherche les points d'intersection avec les droites BC, CA, AB. Les points A_1, B_1, C_1 ainsi obtenus sont situés sur une même droite. »

CHRONIQUE

Les nouveaux programmes des écoles moyennes en Italie.

Le 21 et 22 avril 1905 a eu lieu à Milan, sous les auspices de l'Association « Mathesis » une réunion régionale des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire et supérieur. Présidée par M. E. Pascal, professeur à l'Université de Pavie, les séances ont été principalement consacrées à la discussion des *conditions faites à l'enseignement mathématique des écoles classiques par le décret royal du 11 novembre 1904*. La réunion s'est terminée par une très intéressante conférence de M. G. Loria (Gènes), sur *les programmes du passé et les programmes de l'avenir*.

Nous aurons l'occasion de revenir sur cette importante réunion.

Faculté des Sciences de Paris.

Un nouveau certificat d'études supérieures. — Le certificat d'études physiques chimiques et naturelles (P. C. N.), spécialement créé en vue des études de médecine, vient d'être transformé en un certificat d'études supérieures. Suivant l'arrêté ministériel du 20 juin, ce 22e certificat portera le titre de « Certificat d'études supérieures de sciences portant sur la physique, la chimie et l'histoire naturelle. »

---

[1] Voir L'*Ens. math.*, 6me année, p. 147, 1904.

C'est là une excellente mesure qui, aura certainement pour effet d'encourager les étudiants à acquérir d'abord un fond solide de connaissances scientifiques générales. On sait, ainsi que nous avons déjà eu l'occasion de le rappeler, que le diplôme de licence est conféré à tout étudiant qui justifie de trois certificats d'études supérieures [1].

Cours de vacances à Munich.

Il sera organisé un cours de vacances à Munich, du 17 au 22 juillet, à l'usage des maîtres de Mathématiques et de Physique des écoles moyennes.

Prix académiques.

Académie royale de Belgique. — Prix proposés :

Pour 1905. 1° On demande une contribution importante à la théorie des complexes de droites du troisième ordre, par exemple l'étude des complexes représentés par une équation de la forme $\alpha\beta\gamma - K\alpha'\beta'\gamma' = 0$, où $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ... sont les équations de complexes linéaires, K un paramètre. Prix 600 Fr.

2° Trouver en hauteur et en azimut, les expressions des termes principaux des déviations périodiques de la verticale, dans l'hypothèse de la non coïcidence des centres de gravité de l'écorce et du noyau terrestres. Prix 600 Fr.

Pour 1906. 1° On demande une contribution à l'étude algébrique et géométrique des formes n-linéaires, n étant plus grand que 3. Prix 600 Fr.

2° Faire histoire et la critique des expériences sur l'induction uni-polaire de Weber, et élucider, au moyen de nouvelles expériences, les lois et l'interprétation de ce fait physique. Prix 800 Fr.

Les mémoires destinés aux concours doivent être rédigés en français ou en flamand. Pour ce qui est des conditions du concours s'adresser au Secrétariat-perpétuel, au Palais des Académies à Bruxelles.

Société scientifique de Bruxelles. — Prix proposé pour 1905 :

Trouver les caractères distinctifs des maxima ou minima d'une fonction de trois variables $f(x, y, z)$, dans le cas où l'ensemble des termes du second ordre dans le développement de $f(a + h, b + k, c + l) - f(a, b, c)$ peut s'annuler sans changer de signe.

Académie royale des Sciences de Naples. — Le prix de 1000 lires, destiné à récompenser la meilleure contribution à la théorie des formes ternaires biquadratiques, a été conféré à M. le professeur E. Pascal.

---

[1] Nous avons publié la liste des certificats relatifs aux sciences mathématiques pures et appliquées dans le n° du 15 juillet 1904, pp. 310-311.

L'Académie accordera un prix de 500 lires au meilleur mémoire sur la théorie des électrons et la dispersion de la lumière.

Smith-Prize. — Les Smith-Prize's de l'Université de Cambridge ont été accordés, cette année, à M. H. Batermann pour son travail intitulé « The solution of linear differential equations by means of definite integrals », et à M. P. E. Marrack pour ses recherches sur l'absorption par les rayons Röntgen et les rayons γ.

Prix Adams. — Prix proposé par l'Université de Cambridge pour 1906 :

Etudier les irrégularités du mouvement de la Lune qui peuvent être ramenées directement à une action planétaire. Prix : 4500 Sh.

Médaille de Morgan. — La Société mathématique de Londres a décerné cette année la médaille de Morgan à M. H. F. Baker pour ses travaux d'analyse.

Etats-Unis.

Columbia University, New York. — M. V. Fr. Bjerknes, professeur de Mécanique et de Physique mathématique à l'Université de Stockholm, a été appelé à donner, pendant le mois de décembre 1905, un cours de quinze leçons sur les champs de force et les analogies hydrodynamiques des champs électrostatiques et électromagnétiques.

Pendant les mois de mars et avril 1906, M. H. A. Lorentz, professeur de Physique à l'Université de Leyde, fera un cours sur les extensions de la théorie électromagnatique de la lumière d'après Maxwell et la dynamique des électrons.

American Mathematical Society. — La 12e réunion d'été aura lieu au Williams College à Williamstown, Mass, le 7 et 8 août 1905.

Nécrologie.

On annonce la mort de deux savants astronomes, O. W. von Struve, ancien Directeur de l'Observatoire de Pulkowa, décédé dans sa 86e année, et Pietro Tacchini, ancien Directeur de l'Observatoire du Collegio Romano.

Nous apprenons, d'autre part, la mort du mathématicien hollandais Corneille Louis Landré, actuaire de la « Société générale hollandaise ».

Nominations et distinctions.

M. J. Franel, professeur d'analyse à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich, est nommé Directeur de cet établissement.

M. Ernest Lebon, notre distingué collaborateur, a été élu Membre correspondant de l'Académie royale des Sciences de Lisbonne.

M. F. O. Lovett, professeur de mathématiques à l'Université de Princeton N. J., est nommé professeur d'Astronomie en remplacement de M. E. A. Young, retaité.

M. W. Wirtinger, professeur à l'Université de Vienne, est nommé Membre de l'Académie des Sciences de Vienne.

M. W. J. Hussey est nommé professeur d'Astronomie et Directeur de l'Observatoire de l'Université de Michigan, en remplacement de M. A. Hall qui a résigné ses fonctions.

M. St. Zaremba, prof. ext., est nommé prof. ord. à l'Université de Cracovie.

NOTES ET DOCUMENTS

Sous ce titre nous publions des renseignements relatifs à l'organisation de l'enseignement : créations nouvelles, programmes et règlements d'un intérêt général, liste des cours des principales Universités et Ecoles supérieures, etc. La Rédaction.

Cours universitaires.

ANGLETERRE

Oxford; *University*. — Mathematics. Lecture List for Michaelmas Term, begin 16 oct. 1905. — W. Esson : Analytic Geometry of Plane Curves. 2 h.; Synthetic Geometry of Plane Curves. — E. B. Elliott : Sequences and Series, 2; Elementary Theory of Numbers, 1. — A. E. H. Love : Magnetism and Electricity : the Mathematical Theory, 3. — H. H. Turner : Elementary Mathematical Astronomy, 2. — H. C. Plummer : Practical Work. Observatory. — C. E. Haselfoot : Theory of Equations. 1. — C. Leudesdorf : Projective Geometry (elementary), 3. — A. E. Jolliffe : Analytical Geometry, 2. — J. W. Russell : Differential Calculus, 2. — R. F. McNeile : Curve Tracing, 1. — A. L. Pedder : Problems in Pure Mathematics, 1. — C. H. Sampson : Higher Solid Geometry, 2. — J. E. Campbell : Differential Equations, 2. — C. H. Thompson : Integral Calculus, 2. — E. H. Hayes : Analytical Statics, 3. — A. L. Dixon . Hydrostatics, 1. — H. T. Gerrans : Tridimensional Rigid Dynamics, 2. — P. J. Kirkby : Attractions and Electrostatics, 2.

ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE

Cours annoncés pour l'année universitaire 1904-1905.

Bryn Mawr University (Pa.). — Professor Charlotte A. Scott : Algebraic invariants, with applications, 2 ; Modern analytic geometry, 2. — Mr. J. E.

Wright : Linear ordinary differential equations, 2 ; Higher analysis, 2. — Dr Isabel Madison : Analytic geometry of space.

University of California (Berkeley Cal.). — Professor I. Stringham : Quaternions, 3 ; Logic of mathematics, 3 ; Seminar, 2. — Professor G. C. Edwards : Differential equations, 3. — Professor M. W. Haskell : Analytic geometry, 3 ; Algebraic forms and geometric transformations, 3. — Professor E. J. Wilczynski : Projective differential geometry, 3. — Professor C. A. Noble ; Calculus of variations (first half year), 3 ; Theory of differential equations (second half year), 3. — Professor A. W. Whitney ; Analytic geometry of three dimensions (second half year), 3 ; Calculus of finite differences, 2 ; Theory of probabilities, 3. — Professor D. N. Lehmer : Theory of equations, 3. — Dr. T. M. Putnam : Synthetic geometry, 3 ; Theory of numbers, 3. — Dr. J. H. McDonald : Theory of functions of a real variable, 3. — Dr. B. L. Newkirk : Theory of complex functions, 3.

Cornell University (Ithaca, New-York). — Professor L. A. Wait : Differential calculus, 2 ; Analytic geometry, 3. — Professor G. W. Jones : Algebra, 3. — Professor J. Mc. Mahon : Theory of potential and spherical harmonics, 3 ; Mechanics, 3. — Professor J. I. Hutchinson : Projective geometry, 3 ; Infinite series and products, 2. — Professor V. Snyder : Differential equations, 2 ; Algebraic twisted curves, 2. — Dr. W. B. Fite : Definite integrals, 2 ; Theory of functions, 3. — Dr. C. N. Haskinks : Theory of invariants, 3 ; Calculus of variations, 2 ; Differential equations, II, 2.

University of Illinois. — Professor S. W. Shattuck : Differential equations and calculus of variations, 3. — Professor A. N. Talbot : Analytic mechanics, 4. — Professor E. J. Townsend : Theory of functions of a real variable, 3 ; Solid analytic geometry (second semester), 3 ; Seminar, 3. — By Professor A. G. Hall : Potential function and spherical harmonics, 3 ; Determinants, 2. — Professor H. L. Rietz : Theory of invariants and higher plane curves, 3. — Professor J. Stebbins : Least squares (first semester), 2. — Dr. H. L. Coar : Modern geometry and algebraic surfaces, 3. — Mr. E. L. Milne : Mathematical theory of statistics (second semester), 4.

Indiana University. — Professor R. J. Aley : Algebraic invariants (fall and winter terms) 3 ; Theory of numbers (spring term), 3 ; Ordinary differential equations (fall term), 5. — Professor S. C. Davisson : Modern geometry (fall and winter), 2 ; Theory of surfaces (winter and spring), 3. — Professor D. A. Rothrock : Partial differential equations (fall and winter), 3 ; Theory of functions (winter and spring), 3. — Professor U. S. Hanna : Groups of substitutions and Galois' theory (fall and winter), 2.

State University of Iowa. — Professor L. G. Weld : The general theory of functions, 2 ; Least squares (first semester), 2 ; Elliptic integrals and functions (second semester), 2 ; Fourier's serie and spherical harmonics, 2. — Professor J. V. Westfall : Advanced calculus, 3 ; Differential equations from the standpoint of the theory of functions, 2. — Dr. E. L. Dodd ; Vector analysis (first semester), 2 ; Non-euclidean geometry (second semester), 2.

University of Michigan. — Professor W. W. Beman : Solid analytic geometry, 2 ; Higher plane curves (second semester) ; Differential equations (first semester), 3 ; Linear differential equations (second semester), 2 ; Qua-

ternions, 2 (second semester); Seminar, 2. — Professor A. ZIWET Projectifve geometry, 3; Harmonic analysis, 2; Advanced mechanics (second semester), 3; Theory of potential (first semester), 3. — Professor J. L. MARKLEY: Theory of functions, 3; Advanced theory of functions, 2. — Professor J. W. GLOVER: Higher algebra, 3; Theory of annuities and insurance, 2. — Dr. A. B. PIERCE; Differential geometry, 3. — Mr. E. B. ESCOTT: Theory of numbers, 2.

University of Missouri. — Professor E. R. HEDRICK: Theory of functions, 3; Advanced calculus, 3; Higher analysis, 3. — Professor L. M. DEFOE: Analytic mechanics, 3; Fourier's series and potential function, 3. — Professor G. A. BLISS: Differential geometry, 3; Theory of groups, 3. — Dr. L. D. AMES: Infinite series and products, 3; Galois' theory of substitutions, 3. Mr. L. INGOLD: Theory of equations and determinants, 3; Elements of projective geometry, 3; Elements of differential equations, 3.

University of Nebraska. — Professor E. W. DAVIS: Theory of surfaces, 2; Pure mathematics, 2. — Professor CANDY: Differential equations, 3; Mathematical pedagogy, 3. — Professor C. ENGBERG: Theory of probability, 3 (second semester); Algebra of quanties, 3, or Higher plane curves, 2; Biometry, 1, 2. — Miss I. SINCLAIR: Geometry of position, 3, or Calculus of variations, 2.

University of Pennsylvania. — Professor E. S. CRAWLEY: Higher plane curves, 3: Solid analytic geometry, 2. — Professor G. E. FICHER: Advanced calculus, 2; Invariants and covariants (first half year), 3; Linear differential equations (second half year), 3. — Professor I. J. SCHWATT: Theory of functions of a real variable, 3; Infinite series and products, 3. — Professor G. H. HALLET: Theory of groups, 3; Calculus of variations (first half year), 2; Lie's theory of continuous groups (second half year), 2. — Dr. B. S. EASTON: Algebra (in German), 2; Theory pf higher equations, 2; Elementary divisors and group characters, 2. — Dr. F. H. SAFFORD: Curvilinear coördinates and orthogonal transformations with applications to the theory of potential, 3.

Summer session (July 5 to August 12, 1905). Each course will be given five hours per week. — Professor E. S. CRAWLEY: Theory of numbers. — Professor G. E. FISHER: Invariants and covariants. — Professor I. J. SCHWATT: Definite integrals. — Professor G. H. HALLETT: Theory of abstract groups. — Dr. F. H. SAFFORD: Differential equation.

Syracuse University. — Professor W. H. METZLER: Analytic geometry (first semester), 3; Modern geometry (second semester), 3; Newtonial potential and spherical harmonics, 3; General theory of functions, 3; Determinants, 3; Ellyptic integrals and elliptic functions, 3. — Professor E. D. ROE: Theory of invariants and covariants, 3; Theory of substitutions, 3; Advanced calculus (first semester), 3; Differential equations (second semester), 3; Analytic mechanics, 3; Theory of equations, 2; Analytic trigonometry (first semester), 1; Determinants (second semester), 1. — Professor W. G BULLARD: Projective geometry (first semester), 3; Higher plane curves (second semester), 3; Twisted curves and general theory of surfaces, 3.

University of Wisconsin. — Professor C. A. VAN VELZER: Differential

equations, 3 ; Analytic geometry, 3. — Professor C. S. Schlichter : Theoretic mechanics, 2 ; Theory of probabilities, 2 (second semester) ; Hydrodynamics, 2. — Professor E. B. Skinner : Geometry of three dimensions, 2 ; Advanced calculus, 2 ; Twisted curves and surfaces, 3 (first semester); Quaternions, 3 (second semester) : Seminar in groups, 2. — X : Projective geometry, 2.

Yale University (New Haven, Conn.). — Professor Beebe : Celestial mechanics, 2. — Professor J. Pierpont : Elliptic functions, 2 : Functions of a real variable, 2 ; Functions of a complex variable, 2 : Analytic geometry, 2 ; Theory of aggregates, 1. — Professor P. F. Smith : Continuous groups of transformations, 2. — Professor H. E Hawkes : Algebra, 2 ; Advanced algebra, 2 ; Teachers course in geometry, 2 ; Differential equations, 1. — Dr. W. A. Granville : Differential geometry, 1. — Dr. E. B. Wilson : Advanced calculus, 2 ; Analytic mechanics, 2 ; Theoretical mechanics, 2 ; Dr. C. M. Mason : Partial differential equations, 2 ; Functional equations, 1. — Dr. D. R. Curtiss : Harmonics analysis, 2 ; Taylor's series and analytic continuation, 1. — By Mr. Taylor : Scientific computation, 1.

BIBLIOGRAPHIE

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées. Publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. Edition française rédigée et publiés d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk, professeur à l'Université de Nancy. Tome I, premier volume : *Arithmétique*. Fasc. 1, 160 p., prix : 5 fr.; Gauthier-Villars, Paris; B. G. Teubner, Leipzig.

L'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, dont nous avons annoncé le plan général en son temps a été fort bien accuelllie des mathématiciens et n'a pas tardé à leur rendre de précieux services. Avec le développement considérable qu'ont pris les sciences mathématiques au cours du XIXme siècle, il devenait en effet indispensable d'avoir un exposé à la fois simple et concis, mais aussi complet que possible, des résultats acquis dans les différentes branches de la science mathématique. C'est ce qui explique le succès de l'*Encyclopädie* et la nécessité d'en publier une édition française.

Cette édition ne sera pas une simple traduction, mais elle sera le résultat d'une véritable collaboration entre les auteurs des articles allemands et ceux du texte français. Elle sera publiée sous la direction de M. Jules Molk, professeur à l'Université de Nancy.

L'édition française est divisée en *sept Tomes*, comprenant chacun trois ou quatre volumes gr. in-8° qui paraissent par livraison. Ces sept Tomes se répartissent comme suit :

Mathématiques pures :

Tome I. Algèbre, rédigé dans l'édition allemande sous la direction de

M. W. Fr. Meyer (Königsberg); rédaction française sous la direction de M. J. Molk.

Tome II. Analyse. Rédaction allemande : H. Burkhardt (Zurich); réd. franç.: J. Molk.

Tome III. Géométrie. W. Fr. Meyer et J. Molk.

Mathématiques appliquées.

Tome IV. Mécanique. Rédaction allemande : F. Klein (Göttingue) et C.-H. Müller (Göttingue); rédaction française : F. Appell (Paris) et J. Molk.

Tome V. Physique. Rédaction allem. : A. Sommerfeld (Aix-la-Chapelle); rédaction française : ... et J. Molk.

Tome VI. Première partie : Géodésie et Géophysique. Réd. allemande : Furtwängler (Potsdam) et Wieckert (Göttingue); réd. franç. : Lallemand (Paris) et J. Molk. — Seconde partie : Astronomie. Réd. allemande : Schwarzschild (Göttingue); réd. franç. : Andoyer (Paris) et Molk.

Tome VII. Questions d'ordre historique, philosophique ou didactique (ce tome est encore à l'état de projet).

Le tome I, intitulé Algèbre, comprend quatre volumes : 1. Arithmétique; 2, Algèbre : 3. Théorie des nombres ; 4. Calcul des probabilités, théorie des erreurs, applications diverses.

Le premier fascicule du premier volume a paru. Il comprend : les principes fondamentaux de l'arithmétique, exposés d'après l'article allemand de M. Schubert (Hambourg), par MM. J Tannery et J. Molk; l'analyse combinatoire et la théorie des déterminants, exposés d'après le texte allemand de M. Netto (Giessen), par M. Vogt (Nancy); la première partie de l'article sur les nombres irrationnels et les limites, exposé par M. Molk, d'après le texte allemand de M. Pringsheim.

La plupart des articles du Tome I sont en préparation ou sous presse, et les quatre volumes paraîtront simultanément.

Il s'agit, comme on le voit, d'une œuvre considérable qui exige le concours d'un grand nombre de savants et qui, en raison même de son but, a sa place marquée dans toutes les bibliothèques scientifiques.

H. Fehr.

W. M. Baker et A. A. Bourne. — **Elementary Algebra,** with 7000 Examples. The work is published in the following forms : *Complete*, with or without Answers, 544 pages, 4s. 6d. — *Part I.* To Quadratic Equations, Second Edition, revised, 276 pages, 2s. 6d.; Or, with Answers, 328 pages. 3s.; *Part II.* Including Logarithms (four-figure tables), Binomial Theorem, Exponential and Logarithmic Series. Interest, Undetermined Coefficients and Partial Fractions, etc., with or without Answers, 216 pages, 2s. 6d. — *Teacher's Edition.* In this Edition the Answers to each set of Examples are printed opposite each set of Examples on interleaved pages. In Two Parts, net each, 5s.; *Answers to the Examples*, 76 pages, net 1s. — George Bell and Sons, London, 1905.

Voici un excellent manuel qui rendra grand service à tous ceux qui sont chargés d'enseigner l'Algèbre élémentaire. Il renferme, sous une forme très concise et claire, l'exposé des éléments d'Algèbre depuis les premières notions sur les opérations jusqu'aux progressions, logarithmes et annuités. La place accordée aux méthodes graphiques et le choix remarquablement varié des applications montrent que les auteurs ont su adapter leur ouvrage *aux*

besoins actuels de la science et de la vie économique. Les 7000 exercices et problèmes contenus dans ce volume ont aussi été publiés à part, sous le titre : *Examples in Algebra*.

Francesco Brioschi. — **Opere Matematiche**, publicate per Cura del Comitato per le Onoranze a Fr. Brioschi. Tomo Terzo. 1 vol. gr. in-4°, X — 435 p. Prix : 25 L., Ulr. Hœpli, Milan.

Nous avons signalé, dès le début, la publication des *Œuvres de Brioschi*. Ce troisième volume renferme 55 mémoires (Nos XC à CXLIV). Ils sont consacrés, pour la plupart, à la théorie des formes, aux fonctions elliptiques et aux équations différentielles ; mais on y trouve aussi quelques notices nécrologiques des contemporains de Brioschi. Ces travaux ont été publiés dans divers périodiques italiens, notamment dans les *Annali di Matematica*, les *Atti* et les *Rendiconti dell' I. R. Istituo Lombardo* et les *Atti della R. Accademia dei Lincei*.

Ce volume a été préparé par les géomètres qui se sont chargés des deux premiers volumes et dont il convient de rappeler les noms : MM. Bianchi (Pise), Capelli (Naples), Cerruti (Rome), Gerbaldi (Palerme), Loria (Gênes), Pascal (Pavie), Vittarelli (Rome), Tonelli (Rome). Grâce au concours de ces savants et aux soins de l'éditeur, cette belle publication sera bien accueillie non seulement en Italie, mais dans tous les pays où se cultivent les sciences mathématiques. H. F.

F. Chomé. — **Cours de Géométrie descriptive**. T. I. 1898. 1 vol. grand in-4° de 160 pages avec atlas de 37 planches. Prix : 10 fr. — T. II, 1899, 1 vol. gr. in-4° de 340 pages avec atlas de 48 planches. Prix : 15 fr. — *Plans cotés*, 1904. (1 vol. gr in 4° de 172 pages avec atlas de 36 planches. Prix : 10 fr. Gauthier Villars, Paris; A. Castaigne, Bruxelles.

Ces trois volumes constituent le cours complet professé à l'Ecole militaire de Belgique par M. F. Chomé, et, sous peine de paraître bien tardivement renseignés, nous devrions parler seulement de la dernière partie relative à la géométrie cotée, les précédentes ayant été publiées il y a six ou sept ans.

Ce serait cependant méconnaître l'unité de l'œuvre. Les mêmes qualités s'y retrouvent d'un bout à l'autre et comme l'étude de la géométrie à un seul plan de projection n'est guère faite sans celle de la géométrie à deux plans, il est bon de signaler aux futurs étudiants de ces deux sciences qu'ils pourront sans aucun mal passer de l'une à l'autre en suivant l'esprit et les méthodes de l'excellent professeur belge.

Voyons d'abord rapidement la science de Monge proprement dite.

L'auteur a le grand mérite de chercher d'abord à guider les yeux. Tout ce qui pourra faciliter la compréhension rapide des épures sera bienvenu. On ne craindra pas de charger celles-ci de notations quitte à sacrifier un peu le côté esthétique du dessin. Et, en effet, cela guidera le débutant qui ne fait pas, en général, des épures bien propres et ensuite, quand il sera plus habile, il ne sera jamais forcé d'écrire toutes les indications du début ; il se contentera d'y penser et fera des dessins pas plus chargés que d'autres tout en ayant appris à les faire sans inutiles efforts d'attention. Ainsi un point, un plan vertical étant désignés par une lettre, on désignera la projection horizontale de ce point, la trace horizontale de ce plan par la même lettre affectée de l'indice h. Dans le cas de projections verticales on emploiera de

même l'indice v. Cela n'est pas précisément de l'esprit nouveau, car Olivier faisait quelque chose d'analogue, il est bon cependant de noter que de telles traditions sont conservées. Mais où ce livre ne se montre pas ami des inutilités, c'est quand il combat l'emploi de la ligne de terre déjà condamnée par des géomètres aussi éminents que le colonel Mannheim.

La direction de cette ligne importe seule et autrement n'influe en rien sur les projections du corps à représenter. Sous les yeux des élèves elle semble être une incitation perpétuelle à faire par exemple une foule de reports de hauteurs pour changer de plan à tort et à travers.

La notation de M. Chomé la rendrait d'ailleurs plus superflue s'il le fallait.

L'esprit de l'auteur apparaît encore nettement dans la question peu difficile mais parfois bien encombrante de la recherche des sections planes d'un polyèdre ou des intersections de deux polyèdres. On fera d'abord un tableau rectangulaire comprenant autant de lignes et autant de colonnes que le premier et le second polyèdre possèdent respectivement de faces. A chaque case du tableau correspond ainsi l'intersection de deux faces et l'on inscrira dans chacune tous les points relatifs à l'intersection élémentaire considérée. La confusion est d'ailleurs impossible et, au surplus, on ne s'interdira jamais de faire appel à l'intuition pour laisser tout d'abord de côté les parties inutiles des intersections.

De même les notations de M. Chomé rendent très simples les questions de changements de plans de projection. Du systéme primitif des plans H et V on passera par exemple à un système formé d'un nouveau plan vertical (système HV′) et tous les éléments projetés sur le nouveau mur seront affectés de l'indice V′. On passe de là aux systèmes H′V′, H′V″, H″V″,... toujours avec des conventions analogues.

Nous revenons sur l'importante question des notations au début du livre II. Ainsi A désigne un point, *a* une droite, A*a* le plan passant par la droite et le point précédents, etc...

Toutes ces conventions ont l'avantage, non seulement de parler aux yeux sur les épures, mais encore de simplifier considérablement l'exposition.

La géométrie analytique est parfois mise aussi à contribution et la notion de limite joue un rôle important. Les asymptotes des courbes planes sont immédiatement considérées comme des tangentes limites. Quelques pages, bien remarquables, sont consacrées à l'étude d'un point d'une courbe gauche. On sait combien cette question est délicate puisque des irrégularités de la courbe gauche peuvent parfaitement disparaître en les projetant d'une certaine manière, tandis qu'au contraire des irrégularités existent souvent en projection bien qu'il n'y en ait pas dans l'espace. M. Chomé fait une discussion complète qui se résume en un tableau. En tête de ce dernier il désigne le point examiné dans l'espace, à gauche il indique, en une colonne spéciale, la manière dont on projette et dans toutes les cases le résultat obtenu pour la projection. La construction pratique des courbes planes est étudiée en détail et, comme étude très élégante et très complète aussi, nous pouvons indiquer celle du contour apparent d'une surface. Signalons ce théorème que la projection d'un contour apparent peut toujours être considéré comme l'enveloppe des projections de sections faites dans la surface, théorème connu, sans doute, mais dont on ne tire pas toujours tout ce qu'il peut donner. Il établit notamment un lien remarquable entre la théorie des enveloppes des courbes planes considérées dans le plan et la géométrie dans l'espace.

Plus loin signalons l'étude des surfaces de révolution et particulièrement celle de la surface réglée (hyperboloïde à une nappe), la loi de distribution des plans tangents le long d'une génératrice et son interprétation géométrique au moyen d'un point représentatif.

Les surfaces développables et leur développement effectif sont précédés de l'étude des polyèdres développables, polyèdres limités par des plans dont les équations se déduisent d'une seule

$$z = \alpha x + y\,\varphi(\alpha) + z\,\psi(\alpha)$$

lorsqu'on donne à α une série de valeurs en nombre fini, les surfaces développables de la géométrie infinitésimale apparaissent alors comme cas limite du précédent. M. Chomé étudie aussi très soigneusement la relation qui existe entre la courbure d'une courbe cylindrique ou conique et la courbure de son développement plan. Le second volume se termine par des appendices sur la géométrographie de M. E. Lemoine, sur le rapport anharmonigue et les propriétés projectives des figures, sur les foyers des coniques; il est enrichi de nombreux exercices toujours soigneusement choisis et placés de telle sorte que l'élève puisse les résoudre après lecture consciencieuse du texte. Passons maintenant à l'ouvrage récent relatif aux plans cotés. L'esprit de l'auteur n'y est pas changé et le but pratique apparaît d'autant plus nettement qu'il s'agit d'un cours d'école militaire et que tous les travaux relatifs aux opérations topographiques, aux fortifications, etc... qui incombent aux officiers sont plus souvent traités en plans cotés qu'en épures géométrales proprement dites. Le dernier volume commence d'ailleurs très généralement par des considérations de transformations géométriques. Dessin géométral, géométrie cotée, plans, triangulations géodésiques, cartes, tout cela rentre dans le vaste problème de la représentation plane de figures qui ne le sont pas. Nous voyons alors comment il faut particulariser ce vaste énoncé et quelles sont les façons les plus judicieuses de le faire suivant le but poursuivi. En commençant nous trouvons des pages de grand intérêt sur les surfaces de niveau et les lignes de niveau de surfaces données. Les lignes de pente sont les trajectoires orthogonales de ces dernières, ce qui donne lieu à des théories analytiques qui n'ont pas été négligées. A signaler aussi l'étude de la surface d'égale pente et notamment de l'hélicoïde développable dont l'arète de rebroussement est une hélice circulaire. Par suite nous sommes déjà à même d'étudier les talus, les rampes et leurs raccords.

Insistons un peu sur les surfaces topographiques. Elles sont réprésentées par des sections horizontales dont les cotes sont connues. Pour une cote donnée la ligne de niveau correspondante représente ce qui resterait du terrain s'il était submergé jusqu'à la cote en question. Les fondateurs de la géométrie cotée et notamment Noizet, dans l'impossibilité où l'on est de traiter les surfaces topographiques comme des surfaces géométriques, essayèrent cependant de substituer des surfaces géométriques aux portions de surfaces topographiques comprises entre ces deux lignes de niveau consécutives. M. Chomé se sépare de ce système par une convention qui consiste simplement à admettre que les lignes de niveau seront toujours tracées en nombre suffisant pour qu'on imagine à vue toute ligne intercalaire et il va de soi en effet que la conception de Noizet n'est ni plus ni moins arbitraire puisqu'elle introduit aussi une apparence de régularité géométrique et de rigueur sur lesquelles on aurait bien tort de s'appuyer hors des cas où l'allure générale des lignes de niveau ne fait pas soupçonner d'intempestives

irrégularités. Le volume se termine par l'étude des tableaux graphiques et de leurs anamorphoses, c'est-à-dire des transformées de certains tableaux en d'autres dont les lignes élémentaires sont d'un tracé plus avantageux ou plus commode. A certains abaques formés de courbes on peut ainsi en substituer d'autres formés de droites.

D'excellents exercices ont été choisis par M. Chomé et l'Ouvrage complet peut conduire, avec une peine relativement minime, à une connaissance approfondie des sujets traités ; utile aux praticiens il ne le sera pas moins aux élèves faisant des études théoriques, car le côté pratique leur rappellera sans cesse que la géométrie descriptive n'est pas uniquement un jeu de patience.

A. Buhl (Montpellier).

G. Combebiac. — **Calcul des Triquaternions, nouvelle analyse géométrique.** Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris. 1 vol. in-4° 122 pag. Gauthier-Villars, Paris.

L'auteur s'est proposé d'établir un système d'analyse ou calcul géométrique se passant de tout système de référence, condition qui n'est pas réalisée dans le calcul des Quaternions, car l'emploi de celui-ci nécessite l'adoption d'une origine. Le calcul développé dans le Mémoire de M. Combebiac met en jeu trois catégories de « *quantités* » qui se différencient par les êtres géométriques qu'elles représentent et par les propriétés qu'elles affectent dans le calcul lui-même.

Les quantités formant l'une des catégories sont simplement les *nombres* de l'analyse ordinaire, positifs, négatifs et imaginaires, et les opérations auxquelles elles sont soumises ne donnent lieu à aucune règle spéciale; les quantités d'une autre catégorie représentent *les plans* (pourvus de coefficients numériques); enfin les quantités d'une autre catégorie représentent, sous la dénomination d'*éléments linéaires*, des êtres géométriques qui comprennent les *points* (affectés de coefficients numériques ou masses) et les *droites* (affectées également de coefficients numériques ou longueurs). Un *triquaternion* est la somme de trois quantités appartenant respectivement à ces trois catégories, cette somme étant d'ailleurs irréductible : on pose donc, r étant un triquaternion quelconque,

$$r = w + l + p = \mathrm{G}r + \mathrm{L}r + \mathrm{P}r.$$

Gr, Lr, Pr désignant respectivement la partie numérique w (ou *scalaire*), la partie linéaire (c'est-à-dire l'*élément linéaire*) l et la partie planaire p du triquaternion.

Les opérations fondamentales du calcul sont l'*addition* et la *multiplication*.

Les quantités appartenant à des catégories différentes ne se combinent pas par l'addition. Les règles de cette opération sont les mêmes que dans l'analyse numérique. Son interprétation géométrique est d'ailleurs simple. La somme de points (pourvus de masses) a pour résultat un point situé au centre de gravité du système et pourvu d'une somme égale à la totalité des masses; il en résulte que la différence de deux points de masses égales à l'unité est le vecteur allant du premier au second. L'addition des droites (dirigées et pourvues d'une longueur) correspond à la composition des forces ; le résultat est généralement un *complexe linéaire* et peut se décomposer en une droite et un vecteur, décomposition qui représente l'équivalence entre un système de forces non-courantes et l'ensemble formé par une force (résultante du système) et un couple. On voit qu'un vecteur équi-

vaut indifféremment à un couple (droite rejetée à l'infini) ou à un point (rejeté à l'infini), et c'est cette circonstance qui engendre la combinaison par addition des points et des droites pour constituer les quantités appelées par l'auteur *éléments linéaires*. Enfin, deux plans (pourvu de coefficients numériques) s'additionnent pour en donner un troisième qui passe par l'intersection des deux premiers et dont la direction et le coefficient sont obtenus au moyen de l'addition géométrique de deux vecteurs respectivement perpendiculaires aux deux plans et dont les longueurs sont données par les coefficients.

Les règles de la multiplication sont les mêmes que dans l'Analyse numérique en ce qui concerne la multiplication des scalaires entre eux et avec les quantités des deux autres catégories; la multiplication d'une de ces dernières par un scalaire a simplement pour effet de multiplier par ce scalaire son coefficient numérique (masse, longueur). La multiplication de deux quantités appartenant aux deux dernières catégories jouit de la même propriété que la multiplication numérique par rapport à l'addition, mais elle n'est généralement pas commutative, c'est-à-dire qu'on ne peut pas intervertir l'ordre des facteurs. Le produit est un triquaternion composé de ses trois parties, et les règles à appliquer dans le calcul, en plus des règles habituelles, sont exprimées par les formules suivantes, qui constituent proprement les règles du calcul,

$$\mathrm{G}\,(ll') = \mathrm{G}\,(l'l), \qquad \mathrm{L}\,(ll') = \mathrm{L} - (l''l), \qquad \mathrm{P}\,(ll') = \mathrm{P}\,(l'l),$$
$$\mathrm{G}\,(lp) = O, \qquad \mathrm{L}\,(lp) = \mathrm{L}\,(pl), \qquad \mathrm{P}\,(lp) = -\,\mathrm{P}\,(pl),$$
$$\mathrm{G}\,(pp') = \mathrm{G}\,(p'p), \qquad \mathrm{L}\,(pp') = -\,\mathrm{L}\,(p'p), \qquad \mathrm{P}\,(pp') = o,$$

(l et l' désignent des éléments linéaires; p et p' des plans).

Les interprétations géométriques auxquelles donne lieu la multiplication des quaternions sont simples et correspondent aux éléments les plus usuels des figures; nous citerons les suivantes :

G (dd'), cosinus de l'angle de deux droites;

G (pp') » » plans;

L (mm'), vecteur de m' vers m;

L (md), vecteur perpendiculaire au plan contenant le point m et la droite d;

L (mp), perpendiculaire menée par m au plan p;

L (pp'), droite d'intersection des plans p et p';

(m et m' représentent des points; tous les coefficients numériques ou *tenseurs* sont supposés égaux à l'unité).

On conçoit que les propriétés géométriques trouvent dans une telle Analyse une expression et des moyens d'investigation incomparablement plus simples et plus directs que dans les procédés de la géométrie analytique. L'étude du mouvement d'un solide, la théorie des complexes linéaires, enfin celle des surfaces du second ordre fournissent à l'auteur l'occasion de développements élégants où se manifestent toute la souplesse et l'efficacité du nouveau calcul.

Ajoutons que le calcul des triquaternions se rattache, par sa genèse et par le mode d'exposition adopté, à la théorie des groupes de transformations et à celle des systèmes numériques complexes.

L'auteur mérite les plus vifs compliments pour son ingénieuse analyse et pour la méthode d'exposition. Prof. C. ALASIA (Tempio).

E.-A. Fouët. — **Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques** (Deuxième partie). 1 vol. gr. in-8°, 300 pages. Prix : 7 fr. Gauthier-Villars, Paris, 1904.

L'ouvrage de M. A. Fouët sera hautement apprécié par toutes les personnes désirant se mettre au courant des conceptions modernes de la théorie des fonctions. C'est un résumé admirablement bien conçu de résultats touffus et dispersés et ce n'est cependant pas une compilation, tant l'auteur a mis de science à présenter simplement les résultats originaux dûs aux analystes modernes sans leur enlever jamais leur beauté originale.

La *Première partie* a déjà été analysée dans cette *Revue* (5me année, p. 368). Dans cette seconde partie l'auteur commence par étudier la façon dont naissent pratiquement les fonctions analytiques, point de vue qui est précisément celui qui a fait attacher tant d'importance à ces fonctions. Les premières fonctions implicites considérées, les fonctions définies par des équations différentielles et même, dans des cas étendus, les fonctions définies par les équations aux dérivées partielles sont analytiques.

Voici les méthodes de Weierstrass, le si fécond calcul aux limites de Cauchy, bien simple dans son principe même si l'exposition semble parfois un peu longue et rebutante aux débutants, puisqu'il repose sur la formation de séries acceptables d'abord au point de vue formel comme vérifiant les équations considérées, séries dont la convergence est vérifiée ensuite en les comparant à des séries majorantes fort simples. La question des irrégularités des intégrales nous apparaît ensuite avec toute la rigueur due à M. Painlevé et nous rencontrons les types d'équations signalés par l'éminent géomètre comme admettant des irrégularités fixes ou mobiles données.

Pour les équations aux dérivées partielles il faut particulièrement distinguer des procédés de Cauchy ceux de Dirichlet, Schwarz, Neumann, etc..., qui ont pour but de trouver directement une intégrale de l'équation prenant des valeurs données sur une certaine ligne du plan réel, ce qui est d'une importance immense en Physique mathématique.

M. Fouët consacre ensuite quelques pages aux fonctions définies par des propriétés fonctionnelles et rappelle notamment des points historiquement très intéressants.

D'ailleurs c'est bien à la suite de la considération de fonctions aussi simples que les fonctions circulaires qu'on a recherché des fonctions doublement périodiques, automorphes, etc...

La fin de l'ouvrage est maintenant consacrée aux fonctions analytiques étudiées sous les trois aspects différents d'où les envisagèrent Cauchy, Weierstrass et Riemann.

Pour Cauchy une fonction analytique était surtout une fonction conservant son sens, ses propriétés et notamment sa dérivabilité quand la variable d'abord réelle devenait imaginaire. On prouve alors que de telles fonctions sont développables en séries entières, propriété considérée au contraire comme primordiale par Weierstrass. Riemann s'appuie surtout sur le fait qu'une fonction de variable complexe se scinde toujours en deux parties satisfaisant séparément à l'équation de Laplace. Ce sont ces trois points de vue que M. Fouët développe de façon extrêmement complète et documentée. Signalons surtout la série de Laurent et celle de Mittag-Leffler dont il a été déjà question précédemment et les différents aspects sous lesquels on peut envisager la notion de résidu, la décomposition en facteurs primaires d'après Weierstrass. Quant aux procédés de Riemann on sait assez le rôle

qu'ils ont en Mécanique, en Physique et en Géométrie. Ainsi nous trouvons en terminant des chapitres peut-être un peu courts mais fort intéressants sur la représentation conforme, les surfaces minima, les interprétations hydrodynamiques et électriques de conceptions analytiques qui pourraient cependant être considérées comme bien plus abstraites.

En résumé l'ouvrage de M. Fouët n'est pas, comme je le disais en commençant, une vulgaire compilation, c'est un résumé précieux fait avec une grande science, très riche au point de vue bibliographique. Il nous montre rapidement où la Science est arrivée sans nous faire jamais perdre de vue l'ensemble de l'édifice. A. Buhl (Montpellier).

F. Klein u. E. Riecke. — **Neue Beiträge zur Frage des mathematischen u. physikalischen Unterrichts an höheren Schulen.** Vorträge gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern, 1904. Gesammelt und herausgegeben von F. Klein u. E. Riecke. Teil I. Enthaltend Beiträge der Herren O. Behrendsen, E. Bose, E. Götting, F. Klein, E. Riecke, J. Stark, K. Schwarzschild. — 1 vol. gr. in-8° VIII 190 p.; Mk. 3,60; (se vend également en deux fascicules séparés); B. G. Teubner, Leipzig, 1905.

L'Université de Göttingue a consacré ses cours de vacances de Pâques 1904 aux sciences mathématiques et physiques. Les conférences qui ont été faites à cette occasion viennent d'être réunies et publiées par MM. Klein et Riecke. Nous les recommandons vivement à l'attention de tous ceux qui s'intéressent aux progrès de l'enseignement mathématique. Ils trouveront, dans une première partie (p. 1 à 83), les conférences de M. Klein *sur une transformation, conforme aux besoins actuels, de l'enseignement des mathématiques dans les établissements secondaires supérieurs*, ainsi que divers mémoires de MM. Klein et Götting se rattachant à ce même objet, à savoir : l'introduction dans cet enseignement de quelques notions de calcul différentiel et intégral. Ces idées ont déjà été signalées à plusieurs reprises dans cette Revue et elles ont trouvé de chauds défenseurs dans les divers pays.

Dans une seconde partie (p. 83-190) viennent les conférences relatives à la Physique et à l'Astronomie, tandis que les conférences de M. Fr. Schilling, sur les applications de la Géométrie descriptive, font l'objet d'un fascicule spécial qui sera analysé plus bas. H. Fehr.

Les conférences relatives à la Physique ont été faites par MM. E. Riecke, O. Behrendsen, J. Stark, E. Bose et K. Schwarzschild. Le premier a résumé les nouvelles théories électriques, la radioactivité, les propriétés du radium. La notion des ions et des électrons est condensée en plusieurs formules qui laissent dans l'esprit les points de repère nécessaires à la compréhension des idées modernes.

M. Stark traite du rôle de la physique à l'école : il faut développer chez l'élève la pratique de l'induction et de la déduction, et ceci exclusivement au moyen des expériences. Il est de première nécessité que les appareils soient simples et que l'éclat des métaux, la complication des mécanismes, l'abondance des corrections ne cachent pas aux élèves la loi que l'on veut justement mettre au jour.

L'appareil d'expérience doit être démontable, élémentaire et tout différent des instruments que la technique construit actuellement. Il y a près d'un siècle et demi, l'abbé Nollet, dans la préface de son livre sur l'art des expériences, donnait un conseil analogue : « Evitez, — disait-il, — dans vos opé-

rations, un appareil superflu toujours dispendieux et souvent capable d'induire en erreur ». Malheureusement ni les conseils de l'abbé Nollet, ni ceux du professeur Stark ne sont suivis. Seuls les génies comme Tyndall, ce prince des expérimentateurs ou les pédagogues de race comme Schäffer de Berlin, l'auteur de la *Physica pauperum*, savent construire ces appareils dont la simplicité convainc les plus incrédules. L'adresse des mains est la première qualité que le physicien doit acquérir; aussi le professeur Bose recommande-t-il que les élèves soient entraînés à la fabrication et à la manipulation des instruments. Le laboratoire possédera ces appareils universels qui permettent d'exécuter des expériences variées, ainsi la machine rotative avec laquelle on montre les effets de la force centrifuge ou le mélange des couleurs, l'échauffement dû au frottement aussi bien que la naissance des courants dans les dynamos. Une entente entre les fabricants rendraient les plus grands services, s'ils s'organisaient pour construire des pièces inter-changeables, de façon qu'une expérience ne soit pas immobilisée par l'absence d'une vis convenable ou d'un support approprié. Bien mieux, le professeur Bose préconise la fondation d'un institut central qui aurait pour but d'étudier, de construire, de rassembler les appareils scolaires à l'usage des laboratoires. L'auteur indique une série d'instruments qui satisfont ses exigences et qui ont été construits dans les ateliers de Gottingue.

Il semble que les observations astronomiques nécessitent des appareils coûteux et compliqués, à moins que l'on ne se borne à admirer les constellations; c'est une erreur que le professeur Schwarzschild réfute en quelques pages dans lesquelles il développe l'art d'être astronome avec des moyens simples (mit elementaren Hülfsmittel).

La détermination du lieu géographique, celle de l'heure, exposées à l'usage des jeunes esprits et les instruments nécessaires doivent être construits par un garçonnet adroit en cartonnage ou en menuiserie. Le développement de ce sujet ardu étonne déjà par sa simplicité, mais l'étonnement devient de l'émerveillement en face des deux petits chefs-d'œuvre qui terminent cette série d'études et concernant les observations astrophysiques.

La lecture de ces conférences que nous venons de résumer trop rapidement est des plus captivantes; à chaque page on rencontre des exemples pédagogiques inédits et toute personne qui pratique l'art difficile d'enseigner trouvera dans cette publication des modèles, des méthodes et des encouragements de première valeur. Alph. BERNOUD (Genève).

Fr. SCHILLING. — **Ueber die Anwendungen der darstellenden Geometrie** insbesondere über die Photogrammetrie. Vorträge gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer des Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern, 1904. Mit 151 Figuren u. 5 Doppeltafeln. — 1 vol. cart. gr. in-8°, 198 p.; prix : Mk. 5; B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin.

Bien que la Géométrie descriptive soit née des applications, on ne la présente souvent que par son côté théorique et sous une forme très systématique, sans laisser entrevoir les nombreux et importants points de contact avec les sciences appliquées. Les conférences faites par M. Schilling aux cours de vacances destinés aux maîtres de mathématiques ont précisément pour but de mettre en lumière un certain nombre d'applications fondamentales, et, à ce titre, elles offrent un grand intérêt pour tous ceux qui enseignent la géométrie descriptive.

L'auteur passe d'abord en revue quelques applications dans les sciences

mécaniques, physiques et astronomiques, puis dans les sciences techniques. Il envisage la géométrie descriptive non seulement au point de vue de la représentation des objets à l'aide des méthodes de projection, mais il fait entrer aussi les représentations graphiques basées sur la notion des coordonnées et les calculs graphiques.

La seconde partie du volume (p. 98 à 182) est consacrée à la *photogrammétrie* et à ses applications. C'est là une branche nouvelle qui n'a guère pénétré dans l'enseignement. Tous ceux qui s'y intéressent trouveront dans ce volume un excellent aperçu des principes fondamentaux et leur application aux méthodes récentes pour les relevés photogrammétriques.

Ernest Lebon. — **Géométrie descriptive et Géométrie cotée.** Conforme au programme du 31 mai 1902 pour l'enseignement secondaire. Classes de mathématiques A et B. 1 vol. in-8°, 175 p. Prix : 3 fr. 50; Delalain frères, Paris, 1905.

Ce Volume est la suite de celui qui a été publié en 1903 pour les *Classes de Première C et D*, et dont nous avons parlé (mars 1904, p. 158-159). L'Auteur s'est astreint à suivre l'ordre des programmes en traitant les questions qui y sont énoncées et en ajoutant quelques problèmes qui s'en déduisent immédiatement; tels sont certains problèmes sur les angles et les constructions sur les ombres.

Les questions relatives à la Topographie ont été amplement développées; on y trouve la description des instruments employés, puis les méthodes usitées pour le levé des plans et le nivellement. Nous signalerons en outre les chapitres sur la représentation des surfaces topographiques par les courbes de niveau et par les hachures, ainsi que les paragraphes consacrés aux signes et teintes conventionnels et accompagnés de belles gravures dans le texte et d'une planche en chromolithographie. Cet ouvrage est rédigé avec le soin méticuleux qui caractérise les publications de M. Lebon, notamment son *Traité de Géométrie descriptive* et son *Histoire abrégée de l'Astronomie*.

H. F.

R. de Montessus de Ballore. — **Les fractions continues algébriques.** 1 vol. de 85 p. (Thèse de Doctorat), in-4°, Hermann, Paris.

La représentation des fonctions par les fractions continues pose trois problèmes très difficiles : déterminer les *réduites*, — trouver la zone de *convergence* de la suite des réduites, — enfin prouver que la suite *représente bien* la fonction.

I. Le premier problème se présente ainsi :

Soit
$$f(z) = \sum_0^\infty s_n z^n .$$

A cette fonction analytique correspond un double tableau de polynomes de degrés n et p, U_p^n, V_n^p, définis par cette condition :

$$f(z) - \frac{U_p^n}{V_n^p} = \sigma_1 z^{n+p+1} + \sigma_2 z^{n+p+2} + \ldots$$

Si l'on prend une *suite quelconque* :

$$\frac{U_{p_1}^{n_1}}{V_{n_1}^{p_1}},\quad \frac{U_{p_2}^{n_2}}{V_{n_2}^{p_2}},\ \ldots$$

et si l'on a : $p_1 + n_1 < p_2 + n_2 < p_3 + n_3 < \ldots$, cette suite est une suite de réduites convenables. Ce théorème a fait l'objet de la *Thèse* de M. Padé.

M. de Montessus, avec un réel talent d'algébriste, d'après quelques indications dûes à feu Laguerre, donne le développement de la fonction $f(z)$ définie par l'équation différentielle :

$$(a\,z + b)\,(c\,z + d)\,f' = (p\,z + q)\,f + \Pi$$

a, b, c, d, p, q sont des constantes; Π est un polynome en z.

Il semble que ce soit-là un développement très général.

II. L'auteur étudie, d'une manière générale, avec grand soin, la convergence pour des suites constituées par une *ligne horizontale* du tableau à double entrée (Ire partie, chap. Ier), pour des suites constituées par une *colonne verticale* (Ire partie, chap. IIme).

Dans certains cas ces dernières sont préférables.

La IIme partie contient l'étude générale de la convergence lorsque les polynomes U, V sont liés par des lois de récurrence données, ce qui amène à étudier une *série* compliquée. Il est très remarquable que le rapport d'un terme au précédent, dans cette série, ait pour *limite la racine de moindre module* d'une équation algébrique (que l'on peut former). Ce résultat est fondé sur les théorèmes connus relatifs aux singularités des fonctions analytiques.

M. de Montessus obtient ainsi *certaines courbes* dans le plan de la variable complexe z, telles que les fractions continues *ne convergent certainement pas en tous les points* de ces courbes.

C'est un résultat extrêmement important et M. de Montessus a certes bien mérité les éloges de MM. Appell, Poincaré, Goursat, membres du Jury.

III. Ce premier mémoire en annonce d'autres.

Il reste à prouver que *la divergence est certaine* sur ces arcs de courbe dont nous venons de parler. Il faudrait ensuite montrer que, dans les *aires de convergence*, la suite représente la fonction $f(z)$. Tout ceci paraît bien amorcé dans une *Note* présentée à l'Académie des Sciences aussitôt après la soutenance de la Thèse (29 mai 1905).

En tous cas, il est certain que M. de Montessus a déjà apporté une importante contribution à l'étude des fractions continues.

R. d'Adhémar (Lille).

Salv. Pincherle. — **Lezioni di Analisi algebrica**. Fasc. primo. 1 vol., 143 p. Prix : L. 4; Zanichelli, Bologna.

M. le prof. Pincherle, bien connu pour ses travaux sur le calcul fonctionnel, publie actuellement ses leçons de l'Université de Bologne.

Signalons son exposition très lumineuse de la définition des *irrationnelles*, son chapitre sur la correspondance des *nombres* et des *grandeurs*, sa théorie détaillée des *limites*.

Dans le dernier chapitre de ce fascicule est établi avec soin le théorème

fondamental relatif à la continuité : « une fonction continue de x, positive pour $x = a$ et négative pour $x = b$ *s'annule* au moins en *un* point c compris entre a et b ».

Ces leçons, parfaitement claires et élégantes, rendront le plus grand service aux étudiants pour qui elles sont publiées.

H. Poincaré. — **Wissenschaft und Hypothese.** Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. u. L. Lindemann. 1 vol. cart., 342 p.; prix : Mk. 4,80; B. G. Teubner, Leipzig, 1904.

L'ouvrage que M. H. Poincaré a publié sous le titre : *La Science et l'Hypothèse* a obtenu un succès bien légitime dans les divers milieux scientifiques. Hommes de science et philosophes, professeurs et étudiants ont lu et médité ces pages si suggestives dans lesquelles le savant mathématicien passe en revue les concepts et principes fondamentaux de l'arithmétique, de la géométrie, de la mécanique et de la physique moderne. Il n'y a donc pas lieu de revenir sur le contenu de l'ouvrage à l'occasion de l'édition allemande. Rédigée avec beaucoup de soin par M. et Mme Lindemann, cette édition est plus qu'une simple traduction. Elle contient en effet, sous forme d'appendice (pp. 244-342), un grand nombre de *Notes* dans lesquelles le célèbre professeur de Munich compare les vues de Poincaré à celles de ses contemporains. Ces Notes fournissent en outre d'utiles renseignements historiques et bibliographiques; elles seront examinées avec intérêt par tous ceux qui connaissent l'ouvrage de M. Poincaré; aussi ne saurions-nous assez recommander cette nouvelle édition à tous ceux qui lisent quelque peu l'allemand.

H. F.

Dav. Eug. Smith. — **A Portfolio of Portraits of Eminent Mathematicians.** First Serie : Twelve Great Mathematicians down to 1700 A. D., printed on Japanese vellum, 5 Doll.; on Plate paper, 3 Doll.; the Open Court Publishing Company, Chicago.

La première série de la Collection des portraits de mathématiciens publiés par M. Ed. Smith est consacrée à douze des plus éminents mathématiciens antérieurs à 1700. Quatre appartiennent à l'Antiquité, ce sont : Thalès, Pythagore, Euclide et Archimède, puis viennent Cardan, Viète, Fermat, Descartes, Leibniz, Newton, Neper et Fibonacci de Pise. Ces reproductions ont été exécutées avec beaucoup de soin, par des procédés photographiques, en format 17/21 sur papier Japon 27/34 ; elles sont accompagnées de courtes notes biographiques et bibliographiques.

Au moment où l'on recommande de toutes parts l'introduction de notions historiques dans l'enseignement secondaire supérieur, cette collection de portraits est appelée à rendre d'excellents services. Nous la signalons à l'attention des professeurs et des bibliothécaires.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaire des principaux périodiques:

American Journal of Mathematics edited by Frank Morley, published under the Auspices of the Johns Hopkins University. Vol. *XXVII*. The Johns Hopkins Press, Baltimore.

N° 1 (janvier 1905). — T. H. Jackson : Some Properties of a Generalized Hypergeometric Function. — Dr S. E. Slocum : Relation between Real and Complex Groups with Respect to their Structure and Continuity. — G. A. Miller : Determination of all the Characteristic Subgroups of any Abelian Group. — A. B. Coble : Collineations whose Characteristic determinants have Linear Elementary divisers with an Application to Quadratric Forms. — J. A. Miller : Concerning Certain Elliptic Modular Functions of Square Rank. — E. J. Nanson : Minors of Axi-symmetric Determinants. — V. Snyder : On the Forms of Sextic Scrolls having a Rectilinear Directrix.

N° 2 (avril 1905). — A. Chessin : On a Class of differential Equations. — L. P. Eisenhart : Surfaces with the Same Spherical Representation of their Lines of Curvature as Pseudospherical Surfaces. — V. Snyder : On the Forms of Sextic Scrolls Having no Rectilinear Directrix. — L. E. Dickson : Determination of the Ternary Modular Groups.

Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse. Deuxième série. T. VI, 1904. E. Privat, Toulouse; Gauthier-Villars, Paris.

Fasc. 2. — E. Goursat : Sur un problème relatif à la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre, 2me mémoire. — H. Bourget : Sur le théorème de Poisson.

Annali di Matematica pura ad applicata. Directeurs : L. Bianchi, O. Dini, G. Jung, C. Segre. Série III. T. XI. Rebeschini di Turati e C., Milan.

Fasc. 1 (novembre 1904). — Lovett : Singular trajectories in the restricted problem of four bodies. — Teixeira : Sur la théorie des cubiques circulaires et des quartiques bicirculaires. — Bortolotti : Contributo alla teoria degli infiniti. — Cigala : Sopra un criterio di instabilita. — Lerch : Sur quelques applications des sommes de Gauss.

Fas. 2-3 (avril 1905). — Bianchi : Ricerche sulle superficie isoterme e sulla deformazione delle quadriche. — Fubini : Sulla teoria dei gruppi discontinuti. — Frechet : Sur une extension de la méthode de Jacobi-Hamilton. — Calapso : Alcune superficie di Guichard e le relative trasformazioni.

Bolletino di Matematica. Diretto dal Dott. H. Alb. Conti, via S. Stefano, Bologna.

Anno III, 1904. nos 7 à 12. — Bindoni : Intorno a un principio sull' equi-

valenza delle equazioni. — Bonfantini : Sul concetto di infinito in Matematica elementare. — Di Dia : Sull' algoritmo algebrico. — Chiari : Lo studio dei teoremi. — Bottari : Alcune osservazioni sul concetto di radice quadrata in Aritmetica pratica. — Mancinelli : Questioni e proposte varie di terminologia e di metodo (Aritmetica pratica). — Catania : Appunti sulla Geometria elementare di G. Veronese. — Conti : La recente riforma della Scuola Classica. — *Nuovi Programmi di Matematica per i Ginnasi ed i Licei.* — Buffa : A proposito di una proposta per l'insegnamento della Geometria nelle Scuole Medie Inferiori.

Anno IV, 1905, n°s 1 à 4. — Amaldi : Dimostrazione secondo Max Dehn della impossibilità di decomporre in generale due poliedri di ugual volume in parti poliedriche soprapponibili. — Arzela : Numeri irrazionali. — Bindoni : Intorno a un metodo di trattazione della teoria dei numeri reali. — Ciamberlini : Sui problemi di geometria elementare. — Mortara : Un quesito comparativo circa le annualità. — Volpi : Sull' insegnamento della « Geometria sperimentale induttiva ». — Rozzolino : Nota di Geometria elementare. — Ciamberlini : Sull' ordine che si può seguire in una scienza di ragionamento e in particolare nella Geometria elementare. — La Marca : Sulle equazioni di 2.° e 3.° grado.

Sugli ultimi Programmi di Matematica per le Scuole classiche (A. Natucci).

Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, publiés par les secrétaires perpétuels. Gauthier-Villars, Paris, 1905. T. CXXX.

2 janvier 1905. — Fréchet : Sur les fonctions limites et les opérations fonctionnelles. — S. Lattiès : Sur les substitutions à trois variables et les courbes invariantes par une transformation de contact. — G. A. Miller : Sur le nombre des sous-groupes invariants d'indice p^2. — J. Boussinesq : Pouvoir refroidissant d'un courant fluide sur une ellipsoïde à axes inégaux immergé dans ce courant. — De Sparre : Causes d'erreur dans l'établissement de la formule de la déviation des corps.

16 janvier. — H. Poincaré : L'extension aux hyperespaces des théorèmes sur la somme des angles d'un triangle rectiligne. — E. Picard : Sur le nombre des intégrales de première et de seconde espèces d'une surface algébrique. — F. Enriques : Sur les intégrales des surfaces algébriques. — Remoundos : Impossibilité d'avoir 2 ν équations de la forme $\varphi(u) = Ae^{\alpha}$ admettant des racines algébriques. — S. Bernstein : Sur les équations du type parabolique.

23 janvier. — S. Carrus : Conditions nécessaires pour qu'une famille de surfaces admette des trajectoires orthoganales planes. — Darboux : Généralisation des résultats de M. Carrus. — A. Buhl : Sur l'approximation des fonctions par des polynomes. — E. Traynard : Sur les points doubles d'une surface du quatrième degré. — G. Castelnuovo : Sur les intégrales d'une surface algébrique. — Tzitzeica : Sur les équations différentielles du second ordre renfermant un paramètre. — F. Riesz : Sur la théorie des ensembles.

30 janvier. — E. Borel : Sur la théorie des ensembles. — Ed. Maillet : Les zéros des fonctions entières d'ordre infini non transfini.

6 février : E. Maillet : Sur les solutions des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients monodromes. — P. Fatou : Sur l'intégrale de Poisson et les lignes singulières des fonctions analytiques. — F. Severi : Sur les intégrales de Picard attachées à une surface algébrique.

13 février. — J. Hadamard : Sur les équations linéaires aux dérivées partielles admettant le principe d'Huygens.

20 février : P. Dienes : Sur le cercle de convergence de la série de Taylor. — A. Tzitzeica : Sur l'équation $y'' + k A(x) = o$ qui intervient dans le problème de Picard. — E. Cotton : Criterium permettant de reconnaître qu'une fraction donnée est assez près de satisfaire à l'équation différentielle $y' = f(x, y)$.

27 février. — G. Carrus : Sur les trajectoires orthogonales planes d'une famille de surfaces. — F. Enriques : Conditions pour qu'une surface algébrique puisse être transformée birationnellement en un cylindre. — M. Fréchet : Extension à l'espace E_x des principaux théorèmes énoncés dans l'espace ordinaire. — F. Fatou : Sur la convergence d'une série de Taylor.

6 mars. — G. Darboux : Sur une certaine famille de surfaces.

13 mars. — G. Darboux : Surfaces applicables sur la paraboloïde de révolution. — P. Painlevé : Sur le frottement de glissement.

20 mars. — M. Fréchet : Sur les opérations fonctionnelles dans un ensemble compact et fermé.

3 avril. — E. Picard : Sur la dépendance entre les intégrales de différentielles totales de première et de seconde espèce d'une surface algébrique. — Fr. Severi : Le théorème d'Abel sur les surfaces algébriques. — M. Bôcher : Sur les équations différentielles linéaires du second ordre à solution périodique. — E. Traynard : Sur une surface hyperelliptique. — Eug. et Fr. Cosserat : Sur la dynamique du point et du corps invariable dans le système énergétique.

10 avril : Eug. Fabry : Sur le genre des fonctions entières. — P. Zervos : Sur le problème de Monge. — Belzecki : Sur l'équilibre d'élasticité des voûtes en arc de cercle.

17 avril. — M. Mason : Sur l'équation différentielle $y'' + \lambda A(x) y = o$. — R. Liouville : Sur la relation qui existe entre la vitesse de combustion des poudres et la pression. — Pigeaud : Arcs associés à des longerons par des montants verticaux articulés.

8 mai. Alph. Demoulin : Sur les surfaces de Voss de la géométrie non-euclidienne. — Ed. Maillet : Sur l'équation indéterminée $x^a + y^a = bz^a$. — G. Rémoundos : Sur quelques points de la théorie des nombres et de la théorie des fonctions.

15 mai. — C. Stéphanos : Sur les forces à trajectoires coniques.

22 mai. — H. Lebesgue : Sur une condition de convergence des séries de Fourier. — E. Vessiot : Sur les courbes minima.

29 mai. — R. de Montessus : Sur les fractions continues algébriques de Laguerre. — S. Bernstein : Sur les équations dérivées partielles du type elliptique. — M. Krause : Sur l'interpolation des fonctions continues par des polynomes.

5 juin. — A. Demoulin : Principes de géométrie anallagmatique et de géométrie réglée intrinsèque. — H. Poincaré : Sur la dynamique de l'électron.

26 juin. — L. Raffy : Sur la recherche des surfaces isothermes.

Nieuw Archief voor Wiskunde, revue publiée par la Société scientifique d'Amsterdam et dirigée par J.-C. Kluyver, D.-J. Korteweg, et P.-H. Schoute. 2me série, VI, 3me et 4me fasc. ; Delsman et Nolthenius, Amsterdam.

Nyt Tidsskrift for Matematik, revue dirigée par C. Juel et V. Trier : série A, 15me année, 1904 ; série B, 15me année, 1904, L. Jorgensens, Copenhague.

Paedagogisches Archiv. Monatsheft für Erziehung und Unterricht an Hoch- Mittel- und Volksschulen, herausgegeben von Prof. Dr L. Freytag. 46. Jahrg., 1904 ; Fr. Vieweg und Sohn, Braunschweig.

Periodico di Matematica per l'Insegnamento secundario ; Diretto dal Prof. G. Lazzeri. Serie iii, Vol ii. Raffaelo Guisti, Livorno.

Fasc. 3 (Nov.-Déc. 1904). — M. Cipolla : Teoria dei numeri complessi ad n unità. — A. Calegori : I determinanti di ordine infinito et di specie superiore. — R. Marcolongo : Per il quarantesimo d'insegnamento di « Giov. Garbieri ». — E. Piccioli : Distanze di alcuni punti notevoli nel tetraedro. — Ascoli : Sui numeri primi. — Lazzarini : Ricerche sopra una nuova espressione di π in funzione di soli numeri primi, e sulla fattoriale di un numero. — R. Occhipinti : Su alcuni determinanti di funzioni composte.

Fasc. 4 (Janv.-Février 1905). — G. Lazzeri : Sull'utilità ed importanza della storia delle matematiche. — Cipolla : (suite du mémoire du fasc. 3). — R. Occhipinti : Equazioni a radici in progressione geometrica. — E. Piccioli : Contributo alla « Geometria recente del triangolo sferico ».

Supplemento al periodico di Matematica. Anno viii, fasc. 1 à 3, Nov. 1904-Janv. 1905.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Direttore G.-B. Guccia. T. XIX, 1905, Fasc. 1-6.

Bagnera : I gruppi finiti di transformazioni lineari dello spazio che contengono omoliogie. — Amato : Sul sistema di due integrali primi comuni ad una classe di problemi. — Orlando : Sopra alcune funzioni analoghe alla funzione di Green per un parallelepipedo rettangolo. — Orlando : Sulla deformazione di un solido isotropo limitato da due piani paralleli, per tensioni superficiali date. — Orlando : Idem : Nota addizionale. — Segre : La Geometria d'oggidi e i suoi legami coll'Analisi. — Marletta : Sulle curve razionali del quinto ordine. — Marletta : Distanza ed angolo di enti complessi. — Nielsen : Sur quelques applications intégrales d'une série de coefficients binomiaux. — Zaremba : Contribution à la théorie d'une équation fonctionnelle de la Physique. — Marcolongo : Le formule de Saint-Venant per le deformazioni finite. — Schoute : Le moment d'inertie d'un simplexe $S(n+1)$ de l'espace E_n par rapport à un E_{n-1} de cet E_n. — Sinigallia : Sugli invarianti differenziali. — Montessus de Ballore (de) : Sur les fractions continues algébriques. — Sbrana : I sistemi ciclici nello spazio euclideo ad n dimensioni. — Guldberg : Sur les communs multiples des expressions linéaires aux différences finies. — Torelli (R.) : Sulle involuzioni irrazionali nelle curve perellittiche. — Cantor (G.) : Ein Brief von Carl Weierstrass über das Dreikörperproblem. — Pompeiu : Sur l'extension du théorème des accroissements finis aux fonctions analytiques d'une variable complexe. — Berry : Note sur une formule de M. Schoute.

Parte seconda, biblioteca matematica : Repertorio Bibliograffico delle Scienze Matematiche in Italia : R. Accademia delle Scienze di Bologna (1731-1889) (ni 4053-4351).

School Science and Mathematics, a Journal for Science and Mathematics Teachers in Secundary Schools ; Vol. V, 1904. — Departemental Editors : Biologie, O.-W. Caldwell ; Chemistry, A.-L. Smith ; Earth Science, C.-E. Peet ; Mathematics and Astronomie, G.-W. Myers ; Metrology, R.-P. Williams ; Physics, W.-E. Tower. — Smith & Turton, Chicago.

Wiskundig Tijdschrift onder Redactie van F.-J. Vaes, Chr. Kredit, N. Quint. Eerste Jaargang, 1904-1905. — Blom & Olivierse, Culemborg.

Zeitschrift für das Realschulwesen, herausgegeben von Em. Czuber, Ad. Bechtel und Mor. Glöser. XXX. Jahrg., 1905 ; Alf. Hölder, Wien.

N° 1. — J. Pollak : Zur Theorie der abwickelbaren Flächen. — Rich. Suppantschitsch : Bemerkung zu den ebenen Schnitten bei Kegeln zweiter Ordnung.

N° 2. — V. Kohaut : Zur Trisektion eines Winkels. — † Fr. Haluschka : Eine Aufgabe über die orthogonale Projektion des Kreises.

N° 3. — H. Seidler : Die Verwendung des Krümmungsradius im Mittelschulunterricht.

N° 4. — J. Arbes : Sollen vierstellige Logarithmen an den österr. Mittelschulen eingeführt werden ? — Sertic : Ein geometrisches Problem.

N° 5. — L. Tesar : Zur Frage der Behandlung der Infinitesimal Rechnung im Mittelschulunterrichte.

N° 6. — H. Kleinpeter : Ueber den Begriff der Kraft. — R. Kirchberger : Zur Behandlung der gemeinen Brüche auf der untersten Stufe der Mittelschule.

Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von R. Mehmke u. C. Runge. — 51. Band, 1904. B.-G. Teubner, Leipzig.

M. Baroni : Untersuchung der Festigkeit von Eisenbetonbauten. — M. Disteli : Ueber instantane Schraubengeschwindigkeiten und die Verzahnung der Hyperboloidräder. — L. Erményi : Petzvals Theorie der Tonsysteme. — Viktor Fischer : Eine Analogie zur Thermodynamik. — E. Hæntzschel : Neuer Beweis einer Grünertschen Formel der Kartenentwurfslehre. — Hahn, Herglotz u. Schwarzschild : Ueber das Strömen des Wassers in Röhren und Kanälen. — Henneberg : Zur Torsionsfestigkeit. — Henneberg : Ueber einige Folgerungen, die sich aus dem Satze von Green für die Torsion von Stäben ergeben. — Ad. Kneser : Ein Beitrag zur Theorie der schnelllaufenden elastischen Welle. — Ludwig : Die biometrische Analyse einer Pflanzenspecies. — Mohr : Ein Beitrag zur Kinematik ebener Getriebe. — Runge : Ueber die Formänderung eines cylindrischen Wasserbehälters durch den Wasserdruck. — Bemerkungen über Hennebergs Aufsatz « Zur Torsionsfestigkeit ». — G. Scheffers : Ueber ein Problem, das mit der Theorie der Turbinen zusammenhängt. — Fr. Schilling : Ueber neue kinemat. Modelle zur Verzahnungstheorie nebst einer geom. Einführung in dieses Gebiet. — Schnöckel : Verwandlung der Polygone in Dreiecke von gleichem Moment beliebigen Grades. — Stäckel : Ueber das Modell einer Fläche dritter Ordnung, die das Verhalten einer krummen Fläche in der Nähe eines parabolischen Punktes darstellt. — Trotzewitsch : Zur Frage über das aplanatische System.

Zeitschrift für mathematischen u. naturw. Unterricht, herausgegeben von Dr. H. Schotten. — 35 u. 36. Jahrg., 1904 u. 1905 : B. G. Teubner, Leipzig.

N°s 6, 7 et 8 (1904). — O. Lesser : *L*-Kurven gegebener Grundkurven und ihre Benutzung bei der Konstruktion von Normalen und Tangenten. — E. Lampe : Ueber den Begriff « Logarithmus einer Zahl » für eine Basis *b*. — A. Pleskot : Bemerkung zur goniometrischen Lösung der quadratischen

Gleichungen. — A. Pleskot : Ueber die Berechnung der Parabelfläche. — C. Hildebrandt : Erzeugung konfokaler Kegelschnitte mit Hilfe des Dandelinschen Satzes.

Kleine Mitteil. — Literarische Berichte. — Pädag. Zeitung.

Nos 1, 2 et 3 (1905). — M. Nath : Zur Methodik des geometrischen Anfangs-Unterricht. — Burkhardt : Wie man vor Zeiten rechnete. — W. Killing : Eine elementare Behandlung der Polarentheorie für den Kreis. — E. Eckhardt : Ueber Dreiecke, in denen $a^4 = b^4 + c^4$. — K. Hagge : Ueber Umkreise u. Transversalen des vollständigen n-seits. — K. Krüse : Die unendliche geometrische Reihe.

Kleinere Mitteilungen. — Literarische Berichte. — Pädag. Zeitung.

2. Livres nouveaux :

Catalogue international de la littérature scientifique, publié par une une Commission internationale sous la direction de H. Forster Morley. Première année : 17 volumes en 21 fascicules. Fascicule A : *Mathématiques*. — 1 vol. in-8°, 201 p.; prix : 18 fr. 75 ; Gauthier-Villars, Paris

P. Appell et J. Chappuis. — **Leçons de Mécanique élémentaire** à l'usage des élèves des classes de mathématiques A et B, conformément aux programmes du 31 mai 1902. — 1 vol. in-16, 306 p.; prix : 4 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

P. Bachmann. — **Zahlentheorie.** Fünfter Teil : Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper. — 1 vol. in-8°. XXII-548 p.; prix : 16 Mk.; B. G. Teubner, Leipzig.

M. Chini. — **Corso speciale di Matematiche** con numerose applicazioni. ad uso principalmente dei Chimici e dei Naturalisti. — 1 vol. in-8°, X-295 p.; prix : L. 3,80; Raff. Guisti, Livourne.

L. Couturat. — **L'Algèbre de la Logique.** — 1 vol. in-8° écu, cart., 100 p.; prix ; 2 fr.; *Collection Scientia;* Gauthier-Villars, Paris.

Gust. Jäger. — **Theoretische Physik.** II Licht und Wärme, 153 p.; III Elektrizität u. Magnetismus, 149 p.; dritte, verbesserte Auflage *(Sammlung Gœschen)*. — 2 vol. cart à 80 pf. le volume, G. J. Gœschen, Leipzig.

Fr. Junker. — **Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Differentialrechnung.** Zweite, verbesserte Auflage *(Sammlung Gœschen)*. — 1 vol. cart., 129 p.; prix : 80 pf.; G. J. Gœschen, Leipzig.

Ernst Lindelöf. — **Le calcul des Résidus et ses applications à la théorie des fonctions** (Collection de monographie sur la théorie des fonctions, publiée sous la direction de E. Borel). — 1 vol. gr. in-8°, VII-144 p.; prix : 3 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

W. Franz Meyer. — **Differential u. Integralrechnung.** II. Band. Integralrechnung *(Sammlung Schubert)*. — 1 vol. in-8°, cart., XVI-444 p.; prix : 10 Mk.; G. J. Gœschen, Leipzig.

R. de Montessus de Ballore. — **Sur les fractions continues algébriques.** (Thèse de doctorat, Paris.) — 1 fasc. de 75 p., extrait des Rendiconti del Circolo mat. di Palermo. Librairie Hermann, Paris.

M. Salvadori. — **Esposizione della Teoria delle somme di Gauss** e di alcuni teoremi di Eisenstein. (Thèse de doctorat, Fribourg, Suisse.) — 1 fasc. de 116 p.; Fratelli Nistri, Pise.

H. Schubert. — **Beispiel-Sammlung zur Arithmetik.** Dritte, durchsehene Auflage *(Sammlung Gœschen)*: — 1 vol. cart., 147 p.; prix : 80 Pf.; G. J. Gœschen, Leipzig.

LA FÊTE DU SOLEIL[1]

Extrait du discours de M. C.-A. Laisant.

On raconte que jadis, à l'époque brillante de la *Revue des Deux-mondes*, Buloz reçut un jour la visite d'un jeune auteur, porteur d'un volumineux manuscrit. — « C'est un article philosophique auquel j'ai donné tous mes soins. » — « Sur quoi ? » interrogea Buloz ? — « Sur Dieu. » — « C'est un sujet qui manque d'actualité », répondit le célèbre directeur.

Beaucoup de gens estiment sans doute que le Soleil, lui aussi, manque d'actualité ; ils sont même en droit de trouver que ses adorateurs doivent finir par l'importuner. Les astronomes le mesurent, les mathématiciens le soumettent au calcul, les poètes le chantent ; on observe ses éclipses, on compte ses taches, on examine de près ses protubérances. Il n'a pas un instant de tranquillité. C'est un souverain que ses sujets persécutent, un père de famille obsédé par ses enfants. Je suis porté à croire, cependant, que dans son humeur calme et bonne, tout cela lui est bien égal, et qu'il n'en déversera pas sur nous un rayon de moins de sa bienfaisante lumière et de sa chaleur féconde.

Célébrer le Soleil comme nous le faisons, ce n'est pas restaurer je ne sais quelle antique idolâtrie grossière ; c'est, on vous l'a dit, célébrer la nature sous la forme moderne ; la nature conquise chaque jour un peu davantage, nous livrant,

---

[1] Extrait du discours prononcé par M. Laisant, à la *Fête du Soleil* célébrée le 21 juin 1905, à Paris, par la Société astronomique de France, à l'Hôtel des Sociétés savantes, sous la présidence de M. *Janssen*, membre de l'Institut.

pour prix de nos efforts incessants, une toute petite partie de ses secrets, et nous permettant ainsi d'accroître un peu le bien-être moyen de l'humanité, en même temps que le champ d'action de la science.

Ces fêtes civiles sont bonnes et saines. Elles ne sauraient froisser aucune conviction, aucune croyance sincère ; et elles sont pour nous une occasion de parler des choses terrestres, de revenir du ciel à notre petite planète et de travailler à la rendre progressivement plus habitable, en rendant les esprits moins enténébrés.

Si nous pouvions admettre qu'il y eût à la surface du Soleil des êtres organisés, capables de résister à sa température, doués de sens assez perfectionnés pour voir et entendre ce qui se fait et ce qui se dit sur notre petite boule de poussière, et doués de raison, nous serions en droit de nous demander ce qu'ils peuvent bien penser de nous.

Rien que depuis une année, à quelles réflexions étranges aurait été livré l'esprit de cet observateur hypothétique ! Que de questions il a dû se poser, et presque toutes sans réponse !

Comment, voilà un globe minuscule, couvert sur sa surface de nombreux millions d'animalcules d'espèce raisonnante. Ces sortes de microbes, une partie d'entre eux au moins, sont parvenus par leur industrie à faciliter leurs moyens de communication et à accroître leurs moyens de production. Le sol qu'ils habitent peut fournir largement à leur subsistance et à leur bien-être. Bref, ils possèdent tous les éléments de cette chose relative et indéfinissable qu'on appelle le bonheur. On devrait s'attendre à les voir unis entre eux, tout au moins calmes et paisibles, poursuivre tranquillement l'œuvre à laquelle la nature semble les avoir destinés.

Or, c'est tout le contraire qui se produit. En lutte perpétuelle dans leurs groupements partiels et d'un groupement à un autre, ils cherchent réciproquement à se nuire, à s'opprimer, à se massacrer ; ils rougissent de leur sang les plaines et les mers, et de tant d'assassinats ces bêtes malfaisantes tirent vanité, appelant cela de la gloire ! Et parmi les victi-

mes, pas une sur dix ne sait pour quelle cause on la conduite à tuer et à se faire tuer !

Camille Flammarion, savant doublé d'un poète, disait dans sa conférence, avec grande raison, que l'étude de la nature nous montre de l'intelligence dans l'univers, et son imagination chaude et généreuse lui faisait ajouter que la marche de l'univers représente une œuvre intelligente.

Pour l'honneur des mondes étoilés, je ne veux pas, comme contre-partie, croire à l'universelle bêtise, et j'y serais contraint pourtant, si j'assimilais à la Terre les astres innombrables qui planent dans les profondeurs de l'espace.

C'est d'ailleurs une grande satisfaction pour moi de me trouver en complète conformité d'idées, sur le point qui nous occupe, avec notre sympathique astronome. Dans son ouvrage *Dans le Ciel et sur la Terre*, remontant à une vingtaine d'années, il a consacré un chapitre à « la Bêtise humaine », cet inépuisable sujet, dont il se contente d'étudier une des faces.

N'allez pas vous imaginer que ces tristes constatations auxquelles ma raison m'oblige cachent une pensée de pessimisme et de misanthropie. Pour m'expliquer sans trop d'obscurité, il faut que je revienne à une thèse qui m'est chère, et que j'ai souvent produite par la parole et par la plume. Vous me le pardonnerez ; le droit de rabâcher est l'un des privilèges de l'âge. Et d'ailleurs, à ceux qui me le reprocheraient, ne pourrais-je pas répliquer, comme Pierrot dans *Don Juan :* « Je dis toujours la même chose parce que c'est toujours la même chose ».

A mes yeux, le mot de civilisation, dont on use et abuse, est à peu près vide de sens. L'humanité, au point de vue cérébral et moral surtout, est encore en pleine barbarie, et l'homme le plus raffiné diffère à peine de son ancêtre des cavernes. Et j'ajoute que cela s'explique très naturellement par ce fait que le monde — j'entends le monde humain — qu'on se plaît si souvent à dire vieux, est encore dans la période de la première enfance.

Sans que nous puissions avoir des données précises à ce

sujet, la géologie et la biologie concordent à nous faire admettre que l'apparition de l'espèce humaine sur la Terre remonte à quelques centaines de milliers d'années tout au plus.

D'autre part, nous sommes séparés de l'époque où le refroidissement solaire rendra la vie impossible pour l'homme par une durée de vingt à trente millions d'années, comme Flammarion l'indiquait dans sa conférence de l'année dernière.

Si nous rapprochons ces deux données approximatives, en comparant par la pensée la vie de l'humanité à la vie normale moyenne de l'un de nos semblables, l'espèce humaine actuelle peut être assimilée à un enfant âgé d'un an, de dix-huit mois peut-être. Comme il arrive pour l'enfant, elle progresse chaque jour ; mais, quant à présent, quelle raison pouvons-nous en attendre ? Comment nous étonner de ses puérilités, de ses aberrations, de ses contradictions, de ses caprices et de ses colères ? Elle n'a pas pris jusqu'ici possession d'elle-même.

Toujours comme il arrive chez le petit enfant, l'homme d'aujourd'hui, à peine sorti de la première période, où la satisfaction des besoins essentiels de la vie s'imposait seule, tente un commencement d'association d'idées, regarde, cherche à comprendre, prend goût aux jouets qu'il tient entre les mains. Ces jouets, ce sont les merveilles de notre industrie moderne ; ces tentatives premières d'une intelligence vague et obscure, ce sont nos sciences actuelles, dont nous tirons vanité d'une façon risible.

C'est ainsi, mes chers collègues, qu'à propos du Soleil, de sa grandeur, de sa durée, nous sommes invités à prendre une plus juste idée de notre minuscule planète, et de notre humanité estimée à son âge véritable.

Certes, il y a une différence marquée, un progrès important qui s'est accompli, si nous ne jetons nos regards qu'en arrière ; et en ce sens, il serait inexact de dire que la civilisation n'est qu'une chimère et une vaine apparence. Mais en faisant la comparaison avec l'avenir, l'avenir inévitable, nécessaire, on doit reconnaître que ce qui a été fait ne compte

pas, en regard de ce qui doit être fait, de ce qui sera fait, par la force des choses.

Bien que dans le domaine de la science, nous sommes très fiers de ce que nous connaissons, sans nous rappeler que le rapport de nos connaissances à nos ignorances est et sera toujours nul, et sans entrevoir que le rapport de nos connaissances *actuelles* à nos connaissances *futures* est extraordinairement petit.

Bien des penseurs ont été frappés de cette contradiction entre les prétentions orgueilleuses de l'homme prétendu civilisé, et les criminelles sottises dont il donne des preuves quotidiennes. C'est peut-être Jean-Jacques Rousseau qui a le plus éloquemment mis cette contradiction en lumière. Mais son génie paradoxal le portait à préconiser, sous le nom de retour à la nature, un retour en arrrière dont le moindre défaut est l'impossibilité. Est-ce guérir un enfant malade, que de lui conseiller de revenir au lendemain du jour de sa naissance ?

Le retour à la nature ! Comme si nous ne lui appartenions pas, bon gré mal gré ! Comme si nous pouvions échapper à ses lois ! Comme si nous n'étions pas condamnés, par le seul fait de notre existence, à lui arracher péniblement chaque jour de ses secrets ce que nous pouvons, pour profiter de ses bienfaits et nous préserver des dangers dont elle nous menace.

Ce que je vois de consolant dans cette doctrine, c'est qu'elle me révèle une humanité grandissante, perfectible, destinée à une amélioration progressive pour bien des millions d'années, et séparée par plus de temps encore de l'époque où pourra commencer la décrépitude.

Il m'est impossible d'adhérer à la définition ; l'homme est un animal raisonnable. Mais je dis : l'homme est un animal capable de raisonner et qui raisonnera un jour. Et ma conviction profonde, c'est qu'aux yeux de cet homme arrivé à la maturité, nous apparaîtrons, s'il a quelques documents sur notre histoire, non pas comme nous apparaissent les troglodytes ou les nègres anthropophages, mais fort au-dessous ; nous produirons sur lui, au point de vue de la culture mo-

rale, à peu près l'effet que produit sur nous le gorille ou le chimpanzé.

Oui, elle est inévitable, progressivement, la venue de ce surhomme, mais non pas selon la conception monstrueuse de Nietzsche, qui en faisait un oppresseur de ses semblables, dans l'hypertrophie d'un orgueil qui le conduisit à la folie. Ce surhomme de l'avenir sera l'espèce humaine entière, diversifiée dans les individus, mais unie, associée, éprise de beauté, de vérité, de justice, et poursuivant sa destinée naturelle sous les rayons, à peine affaiblis, du même Soleil qui éclaire aujourd'hui notre globe.

Avant même cette époque, lointaine encore, comme en moyenne nous sommes un peu moins stupides que nos pères, et comme nos enfants seront moins stupides que nous, de nouveaux progrès s'accompliront, inévitables. Demain, — j'entends, par là, avant dix siècles — l'humanité aura pris possession des deux pôles. C'est une conquête prochaine, presque imminente, en ce qui concerne la région arctique, comme nous le montrait tout récemment, ici même, mon vieil ami M. Schrader, dans une communication des plus remarquables. Pour employer sa belle expression, si juste, cette conquête sera, non pas internationale, mais supernationale, et produira des résultats immenses dont bénéficiera toute l'espèce humaine. C'est alors qu'on pourra commencer utilement le siège méthodique du pôle antarctique.

En ces deux points, je vois établis deux observatoires largement pourvus et aménagés. Alors il y aura lieu d'instituer, non plus une, mais quatre fêtes du Soleil.

Celle qui nous réunit aujourd'hui conviendra encore à notre hémisphère. Celle du solstice d'hiver, qui pourrait être célébrée dès maintenant, marquera pour nos confrères des antipodes le plus long jour de l'année.

Mais de plus, à l'équinoxe du printemps, quel spectacle au pôle nord, sera le lever du Soleil apparaissant pour la première fois après six mois de nuit, et faisant le tour entier de l'horizon ! Et il en sera de même au pôle sud, vers le 21 septembre, à l'équinoxe d'automne.

Naturellement, quelques heures suffiront alors, d'un point

quelconque de la Terre, pour faire le voyage. Et j'aperçois plusieurs milliers d'intrépides délégués de la Société Astronomique mondiale, ne redoutant pas la fraîcheur de la température, réunis fraternellement sur la plate-forme de l'observatoire polaire, applaudissant à l'apparition des premiers rayons du Soleil, et devisant des choses terrestres, avec moins de tristesse que nous ne sommes obligés de le faire aujourd'hui.

En saluant dès à présent ces solennités scientifiques futures, je veux encore garder l'espoir qu'on n'y montrera pas trop d'ingratitude pour les ancêtres de l'époque barbare, et qu'on y conservera pieusement le souvenir de noms tels que ceux de Flammarion, de Janssen, de Poincaré. Ceux-là, dès aujourd'hui, ont droit, avec toute la légion des hommes de science et de travail qui préparent l'avenir, à la reconnaissance et à l'affection de leurs contemporains. En les acclamant avec moi, vous acclamerez à la fois la science et l'humanité présentes, dont ils sont la gloire, et l'humanité future plus éclairée, dont ils auront été les précurseurs.

MÉTHODES EMPLOYÉES PAR LES CALCULATEURS EXTRAORDINAIRES

POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES COMPLIQUÉS

Le nombre peut être considéré ou bien dans son rapport avec d'autres nombres, ou bien en lui-même, comme étant entièrement indépendant des autres nombres, et appartenant à une suite indéfinie de nombres entiers et fractionnaires, disposés dans l'ordre de leurs grandeurs relatives.

Cette suite peut être nommée « indéfinie », parce qu'elle est infinie, non seulement dans son prolongement, mais aussi dans chaque intervalle compris entre deux nombres quelconques. On peut dire de même que, dans le second cas, le nom-

bre est envisagé dans son être individuel, tandis que dans le premier cas, il peut être envisagé dans sa connexion avec d'autres nombres.

Conformément à ces deux manières d'envisager le nombre, il existe deux méthodes pour le déterminer. Le nombre peut être trouvé, ou bien comme résultat de son expression en d'autres nombres donnés suivant les caractères qui le lient avec ceux-ci, ou bien comme un membre d'une suite indéfinie, selon le caractère qui le distingue de tous les autres nombres.

D'après ce qui précède, on voit que la seconde méthode peut être appelée *méthode de distinction*, et la première *méthode d'expression du nombre en d'autres nombres*.

En déterminant le nombre d'après la méthode de distinction, l'homme procède de la même façon qu'en cherchant un objet parmi d'autres, se laissant guider par le caractère essentiel de cet objet. Le problème de détermination d'un nombre se rapproche ainsi d'une énigme.

Donc, en employant la méthode de distinction, la première chose qui dans la pratique se présente à notre esprit c'est l'essai.

Guidés d'un côté par les traits caractéristiques du nombre cherché et de l'autre par notre connaissance de quelques-uns des nombres nous *essayons* de le trouver parmi les nombres connus, nous servant pour cela de la comparaison des traits distinctifs de ceux d'entre eux que nous choisissons avec les traits identiques du nombre cherché.

Autrement dit, nous contrôlons les essais par les conditions du problème.

Cette forme de la méthode de distinction se nomme *méthode d'essai*; et c'est la seule qui, jusqu'à présent, a été employée. Oubliée par la science, cette méthode est très répandue parmi ceux qui n'ont pas reçu d'instruction, comme le prouvent les observations faites sur les calculateurs extraordinaires, tels que Inaudi, Iwan Petroff.

Elle était plus en faveur encore dans l'antiquité, où non seulement la science l'adoptait, mais encore la faisait concourir à son développement.

Par l'étude de sa nature et de ses propriétés, elle devient très importante pour la méthodologie mathématique et surtout pour son histoire.

Les matériaux principaux, et presque uniques dont nous disposions encore pour cette étude, ce sont les problèmes posés aux calculateurs extraordinaires.

Parmi les problèmes posés à Iwan Petroff par le Prof. Pérévostchikoff sur l'équation du 2° degré, on trouve le suivant :

« *On a acheté quelques pouds de sucre pour 460 roubles;*
« *si pour la même somme, on eût acheté 3 pouds de plus,*
« *chaque poud aurait coûté 3 roubles de moins ; combien de*
« *sucre a-t-on acheté?*

Le Prof. Pérévostchikoff remarque ce qui suit à propos de la manière dont Iwan Petroff a résolu ce problème :

« Au premier moment cette question parut troubler l'enfant ; il se balança d'abord sur ses hanches, tourna la tête à plusieurs reprises, puis resta immobile et s'écria tout d'un coup : « Vingt pouds ! » Tout ce manège dura dix-sept minutes. »

« Frappé de l'exactitude de ce résultat exigeant la résolution d'une équation de second degré, je demandai à l'enfant quel procédé il avait suivi pour résoudre le problème. Quoique le petit répondit assez niaisement, je pus comprendre qu'il avait trouvé le chiffre exact *en examinant bien des nombres qui auraient pu satisfaire aux conditions du problème.* Ainsi notre calculateur, outre l'esprit de combinaison qu'il possède, est encore doué d'une mémoire surprenante qui lui permet de connaître un grand nombre de chiffres. »

D'après ces indications du procès-verbal, la marche qu'a suivie Petroff pour résoudre ce problème, selon la méthode d'essai, a pu être la suivante : Les conditions du problème, nous montrent tout de suite que le prix d'un poud de sucre ne peut être inférieur à 3 roubles. Ne sera-t-il pas de 4 roubles ?

Vérifions cette supposition par les conditions du problème. En admettant l'hypothèse de 4 roubles nous voyons que la quantité de sucre achetée se monte à 115 pouds. Si pour la

même somme on avait acheté 3 pouds de plus (118 pouds), le prix d'un poud aurait diminué de moins d'un rouble ($^6/_{59}$ rouble). Donc, notre essai n'est pas juste.

Pour les essais subséquents, avec des nombres supérieurs à 4, il faudra choisir ceux qui présenteront le moins de difficultés pour les vérifications suivantes:

Ce sont dans le cas présent, les diviseurs entiers du nombre 460, c'est-à-dire 5, 10, 20, 23, etc.

Si ces nombres n'aboutissent pas à trouver l'inconnu cherché, ils nous indiqueront en tous cas des limites plus étroites pour les essais suivants. La vérification des essais faits avec les nombres 5, 10 et 20 nous montre qu'ils restent également sans succès. En revanche, l'essai tenté avec le nombre 23 nous amène directement au nombre cherché — 20 pouds — car la diminution correspondante du prix d'un poud est exactement de 3 roubles. La solution du problème est donc trouvée après cinq essais. Remarquons que le nombre des essais peut être moindre encore et réduit à trois.

En effet, la diminution insignifiante du prix d'un poud de sucre, au premier essai avec le nombre 4 nous fait voir que des essais tentés avec le nombre 10, et à plus forte raison avec 5, ne pourront nous amener à la diminution de prix relativement forte de 3 roubles par poud, indiqué par le problème.

De tous les problèmes résolus par Iwan Petroff, au point de vue de l'intérêt qu'ils présentent sur la méthode des essais, la seconde place appartient au problème suivant, qui lui fut proposé par le Conseil du Gymnase de Kostroma, et qui rentre dans la catégorie des problèmes se résolvant par les théories des équations indéterminées :

« *Combien y aura-t-il de différents moyens de payer 78 roubles, avec deux genres de pièces : de 3 et de 5 roubles ?* »

Le procès verbal concernant ce problème nous apprend qu'Iwan Petroff le résolut par tous les 6 moyens. La condition du problème nous amène à essayer si nous pouvons payer la somme au moyen d'un seul genre de monnaie.

La vérification par les conditions du problème de l'essai de payer en se servant seulement de pièces de 3 roubles, soit la division du nombre 78 par 3, nous donne raison et

nous amène en même temps à l'un des moyens de résoudre le problème.

La même vérification appliquée à la pièce de 5 roubles nous fournit un second moyen de résoudre le problème, et en même temps nous prouve l'insuccès de l'essai concernant notre tâche directe. Il s'ensuit que le nouveau moyen a un caractère mixte, c'est-à-dire qu'il opère le paiement avec les deux genres de monnaie, 15 pièces de 5 roubles et 1 pièce de 3 roubles.

Après les deux premiers succès, immédiat dans le premier cas, et médiat dans le second, d'autres essais sont inutiles, attendu que les autres moyens de paiement s'obtiennent en remplaçant simplement, dans une des solutions déjà connues, un groupe de pièces par un autre groupe de valeur équivalente. Dans la première solution, soit 26 pièces de 3 roubles, on pourra faire 5 substitutions, en remplaçant 5, 10, 15, 20 et 25 pièces de 3 roubles par 3, 6, 9, 12 et 15 pièces de 5 roubles. En somme on obtient six solutions différentes, car la solution trouvée au moyen de la dernière substitution est identique à celle que nous a donnée le second essai. — Nous trouverons les mêmes solutions en faisant les substitutions correspondantes dans la solution trouvée au second essai, c'est-à-dire si nous remplaçons 3, 6, 9 et 12 pièces de 5 roubles consécutivement par 5, 10, 15 et 20 pièces de 3 roubles.

Le problème suivant, par son intérêt et par le caractère typique de sa solution, se distingue entre tous les problèmes purement arithmétiques : *De deux espèces de thé dont l'un coûte 7 roubles 50 kopecks la livre et l'autre 11 roubles, il faut faire un mélange et savoir combien l'on doit prendre de chaque sorte pour obtenir 50 livres et le vendre à 9 roubles ?*

Ce problème appartient à un genre de problèmes très connus sur la règle d'alliage de seconde espèce. D'après les mots du procès-verbal du Prof. Pérévostchikoff « Iwan Pétroff l'a résolu en 8 minutes : 22 ℔ de thé à 11 rb. et 28 ℔ de thé à 7 rb. 50 kop. L'inexactitude que présente cette solution est insignifiante Les vrais chiffres devraient être 21 $^{15}/_{35}$ et 28 $^{20}/_{35}$. »

La condition sous-entendue de ce problème exigeant que dans la vente du thé (à 9 rb. il n'y ait ni gain ni perte), exclut la possibilité de l'essai consistant à mélanger les deux qualités de thé en proportion égale ; elle indique clairement que pour ce mélange il faut prendre plus de thé bon marché que de thé cher. Les essais doivent donc commencer par la supposition que le mélange se compose de 26 ℔ de thé bon marché et 24 ℔ de thé cher. La vérification nous prouve que cet essai est faux, vu qu'il entraîne une perte de 9 rb. L'essai suivant avec 25 ℔ et 23, n'aboutit non plus à rien, car il ferait subir une perte de 5 rb. 50 kop. L'essai avec 28 et 22 ℔ donne de meilleurs résultats ; ici la perte n'est que de 2 roubles. Cet essai fut le dernier tenté par Iwan Petroff. Il s'en est tenu là, peut-être involontairement, à la suite d'une faute, peut-être intentionnellement, voulant éviter d'autres essais qui auraient pu tirer en longueur. La tentation qu'il eut d'agir ainsi fut d'autant plus grande que l'examinateur et les personnes présentes, ne comprenant pas le fond de la chose et trouvant insignifiante l'inexactitude de la solution, se déclarèrent entièrement satisfaits. Qu'aurait dù faire Iwan Petroff pour obtenir une solution rigoureusement exacte.

Puisque pour les essais subséquents, on aura affaire à des fractions, il est utile de remarquer qu'en les choisissant, il est indispensable d'observer le même *principe de préférence des nombres les plus favorables pour les calculs*, qu'on applique, comme nous l'avons vu, dans les cas d'essais faits avec des nombres entiers.

Si les fractions les plus approchantes ne sont pas en état de nous donner la solution cherchée, en tout cas elles nous conduirons au rapprochement des limites. Il faut donc commencer les nouveaux essais avec les fractions les plus simples, avec des fractions qui aient pour numérateur l'unité. Le premier essai, dans ce nouveau domaine, consistera donc dans la supposition que le mélange contient 28 $^1/_2$ ℔ de thé bon marché et 21 $^1/_2$ ℔ de thé cher. La vérification nous montre que l'essai aboutit à une perte de 25 kopecks. Il est donc sans succès. La quantité de 28 ℔ de thé bon marché doit être augmentée de plus d'une demi-livre. Les augmentations

en plus d'une demi-livre, pour les essais suivants, de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{13}$ donnent des gains conformes de $91\frac{2}{3}$ kopecks, $62\frac{1}{2}$, 45, $33\frac{1}{3}$, 25, $18\frac{3}{4}$, $13\frac{8}{9}$, 10, $6\frac{9}{11}$, $4\frac{1}{6}$, $1\frac{12}{13}$. Seul, l'essai d'augmenter la demi-livre de $\frac{1}{14}$, ou, ce qui revient au même, la composition du mélange de 28 ℔ $\frac{4}{7}$ de thé bon marché et de 21 ℔ $\frac{3}{7}$ de thé cher nous amène à une solution exacte. Il est clair que le nombre des essais examinés dans le domaine des fractions peut être considérablement diminué ; puisqu'on obtient un gain trop fort en augmentant la demi-livre d'un tiers, on peut passer immédiatement à l'augmentation de $\frac{1}{7}$, par exemple, ou même de $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{12}$.

On peut du reste réaliser une économie de temps et de travail, si tout de suite après le premier essai dans le domaine des nombres entiers, on remplace tous les essais suivants dans les deux domaines par *une composition progressive des nombres inconnus et cherchés selon les conditions du problème*. C'est pour cette raison que, comme dans le problème précédent, il faut seulement remplacer consécutivement les parties de la grandeur approximative de celui des inconnus qui doit être diminué, par des parties égales, dans un certain sens, de grandeur approximative, de l'autre inconnu, c'est-à-dire celui qui doit être augmenté. Dans le cas actuel, la raison d'un pareil remplacement est la diminution de la perte de 3, 5 roubles en remplaçant une livre de thé cher par une livre de thé bon marché. Il en résulte que la perte de 9 roubles obtenue au premier essai diminuera de 8 rb. 75 kop. en remplaçant $2\frac{1}{2}$ ℔ de thé cher par la même quantité de thé bon marché. Ainsi le mélange de $21\frac{1}{2}$ ℔ de thé cher donne une perte de 25 kopecks seulement. Remarquons ensuite que 25 kopecks sont le $\frac{1}{14}$ de 3,5 roubles ; on trouve que le supplément au remplacement précédent, qui nous donne le remplacement de $\frac{1}{14}$ de thé cher par la même quantité de thé bon marché n'entraîne ni gain ni perte. Le résultat de ces deux remplacements n'est autre chose que la réponse exacte du problème, déjà trouvée.

Des nombreux problèmes résolus par Inaudi, considérons-en deux qui lui furent proposés par l'Académie des Scien-

ces, à Paris, le 8 février 1892 : « *Quel est le nombre dont le cube additionné à son carré donne 3600?* » — Cette équation cubique pouvait être résolue par Inaudi de la manière suivante : Les conditions du problème montrent que l'inconnue cherchée doit être plus petite que la racine cubique du nombre 3600. La détermination de cette racine peut donc servir de point de départ aux essais, ou de limite supérieure, dans le cas présent. Attendu que les extractions des racines, même des degrés supérieurs, ne donnaient aucune difficulté au calculateur, il dut trouver aisément que la racine cubique du nombre 3600 est comprise entre les nombres 15 et 16. Au premier essai, on pouvait supposer que l'inconnue cherchée était 15. La vérification de cette supposition, c'est-à-dire la détermination de la somme du cube et du carré de 15 — confirmant entièrement la supposition — montre que la solution obtenue par le premier essai est parfaitement juste. De sorte que, grâce à sa mémoire numérique prodigieuse Inaudi donna une réponse instantanée, au grand étonnement des pesonnes présentes, qui ne comprenaient pas ce dont il s'agissait. Quelqu'un même qui se fût intéressé au succès d'Inaudi n'eût pu trouver de problème plus facile à résoudre, et plus sensationnel en même temps. La solution de ce problème, vu l'extraction du cube carré qui s'y fait, nous oblige à nous arrêter à la question des procédés employés par les calculateurs extraordinaires pour les *extractions des racines*. Quoique n'ayant aucune difficulté à trouver la solution des problèmes portant sur des racines à indices les plus divers, Inaudi ne put donner que des réponses très évasives et incomplètes sur la manière dont il s'y prenait pour les résoudre. D'après ce qu'il dit, on voit que pour les extractions des racines, il n'avait aucune méthode précise et ne faisait aucun calcul régulier. En faisant avec une rapidité extraordinaire l'élévation des nombres qu'il se représentait au degré correspondant, il arrivait enfin à découvrir parmi ceux-ci la racine cherchée. En vertu de ce qui vient d'être dit, il est certain qu'Inaudi se servait, pour l'extraction des racines, de la méthode des essais. L'adaptation de cette méthode au cas présent devait certainement commencer par la détermination des

limites entre lesquelles doivent rentrer les essais à accomplir. Le système de calcul décimal fournit, pour cette détermination, des indications primordiales très précieuses. Prenons comme exemple le nombre 1.048.576 et tirons-en à l'aide de la méthode des essais, la racine au 5me degré. L'élévation à ce degré des nombres 10 et 20 donne respectivement 100.000 et 3.200.000. Vu que le nombre donné se trouve entre ces puissances, elles constituent les limites qui contiendront entre elles les essais suivants. Si le nombre donné se trouvait près d'une de ces limites, cette dernière serait la limite supérieure ou inférieure par laquelle devraient commencer les essais. Mais dans le cas présent, le nombre donné se trouve loin de l'une et l'autre puissances trouvées. C'est pourquoi les essais devront commencer par un nombre intermédiaire qui se trouve entre leurs racines au 5me degré, c'est-à-dire par le nombre 15. La vérification de cet essai nous montre que l'élévation réelle du nombre 15 au 5me degré est sans succès, vu qu'elle nous donne le nombre 759.375. Malgré son insuccès, cet essai est néanmoins utile, car il rapproche les limites des essais suivants. En vérité, il donne un nombre qui remplace la limite inférieure par une autre limite plus proche du nombre donné. Les essais suivants doivent donc être commencés, en vertu du principe des nombres approchants, par le nombre entier le plus voisin de 15, c'est-à-dire 16. La vérification de l'essai consistant dans l'admission de ce dernier nombre comme la racine cherchée, confirme entièrement cette supposition et donne, dans le cas considéré, l'expression parfaitement juste de la raison cherchée.

Le second problème proposé à Inaudi par l'Académie des sciences est le suivant : *Trouvez un nombre composé de 4 chiffres, dont la somme égale 25, sachant que la somme des chiffres représentant les centaines et les milliers est égale au chiffre des dizaines et que la somme des chiffres des dizaines et des milliers égale le chiffre des unités, en outre que les chiffres lus dans l'ordre inverse de l'écriture donnent un nombre plus grand que 8082.*

En employant la méthode ordinaire, ce problème se réduit

à un système de quatre équations à 4 inconnues. Voyons comment il sera résolu par la méthode des essais. Le plus proche des nombres qui satisfasse à la première condition du problème sera évidemment un nombre de 4 chiffres, représenté par trois nombres 6 et un nombre 7. Pour décider la place que peut occuper ce dernier nombre. il suffit de se référer à la seconde condition du problème, qui montre que le chiffre des dizaines doit, en général, dépasser chacun des chiffres des milliers et des centaines, pris à part. Donc le nombre qui satisfera entièrement à la première condition, et partiellement seulement à la seconde, sera 6676. On peut accepter ce nombre comme point de départ pour les essais suivants, ou bien — ce qui dans le cas présent est plus facile — pour la formation graduelle de l'inconnue cherchée, selon les conditions du problème. Les moyens d'arriver à cette formation sont les changements faits, selon les conditions, dans le nombre choisi qui nous sert comme point de départ dans le premier essai. Pour s'approcher encore davantage du nombre à composer et remplir la seconde condition, les chiffres des milliers et des centaines ne doivent pas faire ensemble plus de 9 ; et pour atteindre définitivement pleine satisfaction, il faut que le chiffre des dizaines lui-même égale 9. Diminuant en vertu de ces considérations 12, soit la somme des chiffres des milliers et des centaines, de 3, et prenant à ce dernier chiffre 2 unités pour les ajouter au chiffre des dizaines, ou 7 et 1 au chiffre des unités, ou 6 on trouve l'un des deux nombres 4597 ou 5497, qui satisfont aux deux premières conditions. La troisième condition, de même que la seconde, exige du nombre cherché que la somme des chiffres de ses milliers et dizaines soit inférieure à 10 et égale au chiffre des unités. La première de ces exigences exclut de tout examen le second des nombres composés tout à l'heure, comme ayant une somme plus grande de chiffres des milliers et des dizaines. Quant au premier de ces nombres, après avoir diminué de 4 les chiffres des milliers et des dizaines, il faut distribuer ce 4 entre les chiffres des centaines et des unités, de manière à satisfaire entièrement à la troisième condition sans manquer à la seconde. Pour cela, il faut dimi-

nuer de 3 le chiffre des milliers, et le chiffre des dizaines de 1, et augmenter de 2 les centaines et les unités. Ces changements faits, nous obtenons le nombre 1789, qui remplit entièrement les 3 premières conditions. La vérification de ce dernier nombre par la quatrième condition du problème, soit la soustraction du nombre 1789 du nombre obtenu en inversant l'ordre des chiffres, 9871, confirme la justesse de cet essai et achève la solution du problème par la méthode des essais. La durée de cette solution peut être beaucoup plus abrégée si l'on prend de suite en considération plusieurs conditions, et même les 3 premières ensemble. Inaudi possédant une mémoire numérique si étonnante, et le talent qu'on lui prête de saisir avec une vitesse extraordinaire les relations existant entre les données du problème, on peut même s'étonner qu'il n'ait pas trouvé instantanément la solution du problème et qu'il y ait mis deux à trois minutes. Cet étonnement est parfaitement justifiable, en vertu de la soumission des conditions du problème aux lois du système hindou de calcul écrit, soumission qui, dans la méthode des essais, est tout à fait indispensable et rend la quatrième condition absolument superflue. L'exactitude de cette remarque peut être facilement prouvée, soit par la méthode des essais, soit par les méthodes ordinaires employées dans la science. En effet, l'examen du nombre 1789 par la première méthode montre qu'il n'existe aucun autre nombre qui soit en état de satisfaire à la fois aux 3 premières conditions du problème. De même, en employant les méthodes ordinaires, en laissant de côté la quatrième condition, et en ajoutant du système des 3 équations indéterminées à 4 inconnues.

$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 25 \\ x + y &= z \\ x + z &= u \end{aligned}$$

que nous obtenons des 3 premières conditions du problème les inégalités $x < 10$, $y < 10$, $z < 10$, $u < 10$, qui expriment les lois du système de calcul écrit hindou, toutes les solutions du système indéterminées seront éliminées, sauf une — le nombre 1789.

La description des solutions de divers problèmes à l'aide de la méthode d'essai nous permet de nous représenter cette méthode dans son aspect général. Comme nous le montre son nom même, elle consiste en une suite d'essais à l'aide desquels on tâche de parvenir à une solution aussi exacte que possible. Vu que, pour avoir du succès, il faut réduire autant que possible le nombre des essais, il est indispensable, avant de la commencer, de déterminer leurs limites, *inférieure* et *supérieure*, ou les deux ensemble selon les conditions du problème.

Pour le premier essai qui sert de point de départ aux autres, il faut prendre une de ces limites, ou bien un nombre qui s'en rapproche plus ou moins. En cas d'insuccès du premier essai, le choix des nombres pour le second se fait selon le principe des nombres favorables (principalement pour les calculs). Parvient-on, par ces essais, à la solution du problème ? ou bien, dans le cas contraire, jusqu'à quel point parvient-on à le résoudre ? C'est à l'aide de la *vérification du problème* que se résout cette question. Cette vérification s'impose si impérieusement par la nature même de la méthode, qu'il est indispensable d'en parler, non seulement comme du moyen unique et naturel provenant des conditions de la méthode pour l'estimation des essais ; elle représente un élément de la méthode si essentiel et si indispensable que sans cette estimation son emploi est absolument inadmissible. Le trait caractéristique de la méthode des essais, qui la distingue, d'une manière décisive des autres méthodes dans le même domaine, c'est son *caractère de généralité* ; vu qu'elle s'applique aux solutions des questions théoriques et pratiques et des problèmes les plus divers. Grâce à cette qualité importante, due à sa primitivité, elle est absolument exempte de tout ce qui est artificiel dans son origine, dérivée de la nature psychique de l'homme sans aucune participation de la conscience ni du cours des idées spécialisées qui surgissent en elle. Mais il faut remarquer que c'est seulement théoriquement que l'on parle de la généralité de la méthode des essais. En pratique, le succès de l'application est souvent très douteux et souvent très inaccessibles. Les questions compliquées contenant

beaucoup de conditions ou exigeant la détermination de beaucoup d'inconnues, de même que la recherche des solutions exactes dans un grand nombre de cas, exigent généralement un nombre très grand, et même indéterminé d'essais. On peut arriver à un essai heureux dans une quantité de pareilles questions soit par hasard, soit à l'aide d'une persévérante poursuite du but prolongée plus ou moins longtemps. — Enfin il n'est pas difficile de se représenter des cas où ni le hasard, ni une certaine persévérance n'aboutissent à rien. Un autre trait de la méthode des essais, c'est *l'incapacité de ses procédés de s'élever au-dessus du seuil de la conscience*, autrement dit leur *inconscience*, qui s'est manifestée aussi clairement dans l'antiquité que chez les gens des temps plus modernes se trouvant sur la même échelle de développement intellectuel.

Si dans la science parvenue à un état plus développé, l'emploi de la méthode des essais n'avait pas été exclus, certes, son inconscience l'aurait vu disparaître d'elle-même. La méthode d'essai peut être *directe*, quand les essais tendent à la détermination du nombre cherché, et *indirecte*, quand ils veulent déterminer un nombre qui se trouve dans des rapports connus avec le nombre cherché, selon les conditions du problème. Ce dernier, dans ce cas, se cherche indirectement à l'aide de son lien avec le nombre trouvé.

Un cas de méthode particulier des essais, soit sa forme particulière, c'est la méthode des formations graduelles, ou la composition de l'inconnu cherché selon les conditions de la question. Dans cette méthode, tous les essais, ou une partie des essais, excepté le premier nombre, se remplacent par une suite de changements apportés à un nombre qui sert de point de départ, ou bien, en général, par le dernier essai. Le rapprochement graduel de ce nombre de la solution cherchée et exacte de la question est le seul but de ces remplacements, et c'est par ce but seul qu'il faut se laisser guider en les effectuant. L'adaptation de cette méthode étant loin d'être admise dans toutes les questions qui peuvent être résolues à l'aide de la méthode des essais, on ne peut y voir qu'un cas particulier de cette dernière, comme on l'a déjà

fait remarquer plus haut. Mais ce cas particulier représente des avantages considérables et se trouve à un degré de développement plus haut que la méthode générale. Nous avons déjà vu que son introduction diminue considérablement la durée de la solution du problème. Mais ce n'est pas tout ; il apporte dans le procédé de la recherche de l'inconnu d'après la méthode des essais une plus grande précision, et dans quelques cas, comme par exemple dans le problème envisagé plus haut, dans la règle d'alliages, il rend ces procédés absolument précis. Enfin, exigeant une compréhension fondamentale du problème, et, en général une certaine maturité d'esprit, il constitue la plus haute expression de la méthode des essais, dont la possession et l'usage conscients ne peuvent être accessibles à l'homme avant qu'il soit parvenu à un degré assez élevé de développement intellectuel. Grâce à ces qualités, beaucoup de questions deviennent parfaitement accessibles à la méthode des essais ; le succès de leur solution représente, d'après ce qui a été dit, des difficultés considérables, souvent insurmontables, ou bien il est dù qelquefois, au hasard.

V. Bobynin (Moscou).

(Traduit par V. Fréedericksz, Genève).

SUR QUELQUES POINTS ÉLÉMENTAIRES DU CALCUL INTÉGRAL

Dans les lignes suivantes je me permets de communiquer deux remarques qui m'ont été utiles dans mon Cours universitaire sur le Calcul intégral ; la première se rapporte à la démonstration de l'existence de l'intégrale définie d'une fonction d'une seule variable réelle, l'autre à la notion de l'intégrale curviligne d'une différentielle exacte et à la démonstration des théorèmes fondamentaux, relatifs à ces intégrales,

desquels découlent les théorèmes de Cauchy sur les intégrales des fonctions monogènes d'une variable complexe.

I

Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle x, uniforme et finie dans l'intervalle.

$$p < x < q .$$

Pour démontrer l'existence de l'intégrale

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\, dx ,$$

a, b étant deux valeurs situées entre p et q, il faut démontrer, selon Riemann[1], que la somme

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_{k-1})$$

tend vers une limite déterminée, si l'on augmente le nombre n-1 des points $x_1, \ldots, x_{n-1}$, partageant l'intervalle $a \ldots b$ ($a = x_0$, $b = x_n$) en n parties, de manière que l'étendue de chacune des parties devienne aussi petite que l'on veut, et que cette limite soit indépendante du choix des points $x_1, \ldots, x_{n-1}$ et des points intermédiaires ξ_{k-1},

$$x_{k-1} \leqq \xi_{k-1} < x_k .$$

Si l'on forme la somme (2) pour les mêmes points $x_1, \ldots, x_{n-1}$, mais, pour deux séries différentes de valeurs intermédiaires ξ_{k-1} et $\bar{\xi}_{k-1}$:

$$S_1 = \sum_k (x_k - x_{k-1}) f(\xi_{k-1}) ,$$

$$S_2 = \sum_k (x_k - x_{k-1}) f(\bar{\xi}_{k-1}) ,$$

[1] *Werke*, (1892), p. 239.

la condition nécessaire et suffisante pour que la différence $S_1 - S_2$ devienne aussi petite que l'on veut en augmentant le nombre n de la dite manière, consiste — comme on sait — en ce que

$$\lim_{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, \sigma_{k-1} = 0 , \tag{3}$$

en désignant par σ_{k-1} l'*oscillation* de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $x_{k-1} \ldots x_k$, c'est-à-dire, la différence entre les valeurs extrêmes, dont la fonction $f(x)$ est capable dans cet intervalle. Quant à la démonstration que cette condition est suffisante pour que les sommes (2), formées avec des séries différentes de points de partition $x_1, \ldots, x_{n-1}$, tendent vers une limite commune, elle se fait ordinairement en appliquant le principe de la superposition des partitions, due à Cauchy[1]. Je vais montrer, en m'appuyant à une remarque due à Kronecker[2] que l'application du principe mentionné devient superflu, si l'on étend de la manière suivante le sens de la condition (3).

Soient $\zeta_{k-1} \ldots \zeta_k$ des intervalles embrassant les intervalles $x_{k-1} \ldots x_k$, mais tels que $\zeta_k - \zeta_{k-1}$ tende vers zéro en même temps que $x_k - x_{k-1}$; ces intervalles plus grands pourront d'ailleurs pénétrer l'un dans l'autre. En désignant alors par σ_{k-1} l'oscillation de $f(x)$ dans l'intervalle $\zeta_{k-1} \ldots \zeta_k$ et par ξ_{k-1}, $\bar{\xi}_{k-1}$ deux valeurs intermédiaires du même intervalle, la condition (3) continuera d'être nécessaire et suffisante pour que les sommes S_1, S_2 se rapprochent indéfiniment.

Augmentons maintenant le nombre n des parties $(x_{k-1} \ldots x_k)$ selon une loi arbitraire, de manière que ces parties tendent vers zéro, et soient

$$S_{n_1} , \; S_{n_2} , \; \ldots$$

les sommes (2), formées pour les partitions successives avec des valeurs intermédiaires quelconques; il faut démontrer

[1] *Résumé des leçons*, etc. (1823), p. 81.

[2] *Vorlesungen über Integrale* (1894), p. 6–7.

qu'étant δ une petite quantité positive donnée à l'avance, on puisse déterminer le nombre N de manière que l'on ait

$$\left| S_{n_{\lambda+\nu}} - S_{n_\nu} \right| < \delta$$

pour $\nu > N$ et λ arbitraire, c'est-à-dire que $\lim_\nu S_{n_\nu}$ existe. Puis il faut démontrer que cette limite soit indépendante de la manière, dont le nombre n a été augmenté. Soient donc $x_1, \dots, x_{n-1}$, avec les valeurs intermédiaires $\xi_0, \dots \xi_{n-1}$, et $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_{m-1}$, avec les valeurs intermédiaires $\xi_0, \dots, \bar{\xi}_{m-1}$, deux partitions, et

$$S = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_{k-1}),$$

$$T = \sum_{k=1}^{m} (\mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}_{k-1}) f(\bar{\xi}_{k-1})$$

les sommes correspondantes, il suffira d'établir que la différence T-S tende vers zéro, si l'on fait croître n et m de manière que les différences $x_k - x_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) et $\mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, m$) deviennent infiniment petites. A cet effet, désignons par $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_{n+m-2}$ les valeurs x_k et $\mathfrak{x}_k$, rangées par ordre croissant, et soit l'intervalle $\mathfrak{X}_{\lambda-1} \dots \mathfrak{X}_\lambda$ contenu dans l'intervalle $x_{\lambda_i - 1} \dots x_{\lambda_i}$ et dans l'intervalle $\mathfrak{x}_{\lambda_k - 1} \dots \mathfrak{x}_{\lambda_k}$: alors il est évident que nous aurons :

$$S = \sum_{\lambda=1}^{m+n-1} (\mathfrak{X}_\lambda - \mathfrak{X}_{\lambda-1}) f(\xi_{\lambda_i - 1}),$$

$$T = \sum_{\lambda=1}^{m+n-1} (\mathfrak{X}_\lambda - \mathfrak{X}_{\lambda-1}) f(\bar{\xi}_{\lambda_k - 1}).$$

Mais écrites de telle manière, les sommes S et T rentrent sous la forme des sommes S_1, S_2 prises dans le sens étendu, parce qu'en réunissant les intervalles $x_{\lambda_i - 1} \dots x_{\lambda_i}$ et $\mathfrak{x}_{\lambda_k - 1} \dots \mathfrak{x}_{\lambda_k}$, on obtient un intervalle $\zeta_{\lambda-1} \dots \zeta_\lambda$ qui contient les points $\xi_{\lambda_i - 1}$

et $\bar{\xi}_{\lambda_{\bar{k}}-1}$, embrasse à la fois l'intervalle $\mathfrak{X}_{\lambda-1} \dots \mathfrak{X}_\lambda$ et devient infiniment petit en même temps que $\mathfrak{X}_{\lambda-1} \dots \mathfrak{X}_\lambda$. La condition (3) est donc suffisante pour que S et T tendent vers une limite commune, *c. q. f. d.*

Il est évident que cette condition se trouve satisfaite, — aussi dans le sens étendu, — si $f(x)$ est une fonction continue, au sens de Cauchy, dans l'intervalle $p \dots q$.

II

Soient $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ deux fonctions des variables réelles ξ, η qui, à l'intérieur d'un domaine S simplement connexe du plan des (ξ, η), sont uniformes et finis et admettent des dérivées partielles par rapport à ξ et η. Si la condition d'intégrabilité.

(1)
$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial Q}{\partial \xi}$$

se trouve satisfaite à l'intérieur de S, l'équation différentielle

(2)
$$du = P d\xi + Q d\eta$$

possède une solution u qui est une fonction des deux variables indépendantes ξ, η uniforme à l'intérieur de S, et qui s'évanouit pour un point (ξ_0, η_0) de S, donné arbitrairement. C'est ce que nous allons démontrer, sans faire usage des notions de l'intégrale curviligne et de l'intégrale double ; au contraire, notre démonstration nous va permettre de démontrer d'une manière extrêmement simple les théorèmes classiques, relatifs aux intégrales curvilignes. Nous allons procéder suivant Euler [1].

1. Soient (ξ_0, η_0) et (ξ, η) deux points de S, tels que le rectangle déterminé par les points (ξ_0, η_0), (ξ, η_0), (ξ, η), (ξ_0, η) — qui seront désignés aussi par A, B, C, D — se trouve entièrement à l'intérieur de S. Nous considérons les deux expressions

[1] Voir *Institutiones calculi integralis*, t. I, caput II, art. 448 et suiv.

$$(3)\qquad v = \int_{\eta_0}^{\eta} Q(\xi_0, \eta)\, d\eta + \int_{\xi_0}^{\xi} P(\xi, \eta)\, d\xi\,,$$

$$(4)\qquad \overline{v} = \int_{\xi_0}^{\xi} P(\xi, \eta_0)\, d\xi + \int_{\eta_0}^{\eta} Q(\xi, \eta)\, d\eta\,,$$

qui pourront être caractérisées de manière, que la première v se rapporte à la *marche supérieure* (AD, DC), l'autre $\overline{v}$ à la *marche inférieure* (AB, BC), joignant les points A et C. Nous allons démontrer que v et $\overline{v}$ satisfont à l'équation (2) et que ces deux expressions sont identiques, c'est-à-dire que l'on a les équations

$$(5)\qquad \frac{\partial v}{\partial \xi} = P\,, \quad \frac{\partial \overline{v}}{\partial \eta} = Q\,.$$

$$(6)\qquad \frac{\partial v}{\partial \eta} = Q\,, \quad \frac{\partial \overline{v}}{\partial \xi} = P\,.$$

$$(7)\qquad \overline{v} - v = 0\,.$$

Les deux équations (5) se vérifient immédiatement ; quant aux équations (6), il suffira de donner la démonstration de la première.

Posons à cet effet

$$(8)\qquad w = \int_{\xi_0}^{\xi} P(\xi, \eta)\, d\xi\,,$$

nous aurons [1]

$$(9)\qquad \frac{\partial v}{\partial \eta} = Q(\xi_0, \eta) + \frac{\partial w}{\partial \eta}\,.$$

Mais

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(Q(\xi, \eta) - \frac{\partial w}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)\,.$$

[1] C. f. Euler, *l. c.*, art. 448. Pour que les calculs suivants soient légitimes, il faut imposer aux fonctions P, Q encore certaines conditions supplémentaires que l'on va tirer facilement de ces calculs mêmes.

donc en vertu de la condition d'intégrabilité (1)

$$(10) \qquad \frac{\partial}{\partial \xi}\left(Q(\xi, \eta) - \frac{\partial w}{\partial \eta}\right) = 0 ,$$

c'est-à-dire que l'expression.

$$(11) \qquad Q(\xi, \eta) - \frac{\partial w}{\partial \eta} = F(\eta)$$

est indépendante de ξ. Etant

$$(12) \qquad \lim_{\xi=\xi_0} w = 0 , \quad \lim_{\xi=\xi_0} \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 ,$$

on aura donc

$$Q(\xi_0, \eta) = F(\eta) ,$$

et d'après les équations (11) et (9),

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = Q(\xi, \eta) - Q(\xi_0, \eta) ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = Q(\xi, \eta) , \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Pour démontrer l'équation (7), nous remplaçons dans les limites supérieures de v, $\bar{v}$ les ξ, η par ξ_1, η_1 ; l'équation (7) s'écrit alors :

$$(7a) \quad \int_{\xi_0}^{\xi_1} P(\xi, \eta_0)\, d\xi + \int_{\eta_0}^{\eta_1} Q(\xi_1, \eta)\, d\eta + \int_{\xi_1}^{\xi_0} P(\xi, \eta_1)\, d\xi + \int_{\eta_1}^{\eta_0} Q(\xi_0, \eta)\, d\eta = 0 ,$$

équation qui peut s'énoncer en disant que l'intégrale de la différentielle exacte $P\, d\xi + Q\, d\eta$, menée au sens positif sur la périphérie du rectangle (A B C D) s'évanouit ; l'équation (7) n'est donc autre chose que le théorème de RIEMANN-CAUCHY [1] pour le cas du rectangle (A B C D) [2].

[1] RIEMANN, Werke (1892), p. 15, I.

[2] Quant à l'équation (7), EULER n'en donne pas de démonstration explicite, il s'exprime comme il suit (l. c., art. 452) : « Ex rei natura patet, perinde esse utra via procedatur necesse enim est ad eandem æquationem integralem perveniri ». Mais la démonstration qu'on va lire dans le texte, ne fait usage que des moyens qu'EULER avait à sa disposition.

Soit (ξ, η) un point quelconque à l'intérieur de $(ABCD)$ et posons

$$s(\xi, \eta) = \int_{\xi_0}^{\xi} P(\xi, \eta)\, d\xi + \int_{\eta_0}^{\eta} Q(\xi_0, \eta)\, d\eta,$$

nous aurons, d'après ce qui précède,

$$\frac{\partial s}{\partial \eta} = Q(\xi, \eta), \tag{13}$$

et le premier membre de l'équation $(7a)$ pourra s'écrire :

$$\int_{\eta_0}^{\eta_1} Q(\xi_1, \eta)\, d\eta - s(\xi_1, \eta_1) + s(\xi_1, \eta_0)$$

ou encore

$$\int_{\eta_0}^{\eta_1} \left(Q(\xi_1, \eta) - \frac{\partial s(\xi_1, \eta)}{\partial \eta} \right) d\eta,$$

intégrale qui s'évanouit d'après l'équation (13).

2. Soient maintenant (ξ_0, η_0) et (ξ, η) deux points quelconques à l'intérieur du domaine S, on pourra intercaler d'une infinité de manières des points en nombre fini

$$(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_{n-1}, \eta_{n-1})$$

appartenant également à S et tels que pour deux points consécutifs $(\xi_{\lambda-1}, \eta_{\lambda-1})$ et $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ (ou $\xi_n = \xi$, $\eta_n = \eta$) ou la marche supérieure ou la marche inférieure, joignant ces deux points, se trouve entièrement à l'intérieur de S. Suivant le cas qui se présente désignons par v_λ ou l'expression

$$\int_{\eta_{\lambda-1}}^{\eta_\lambda} Q(\xi_{\lambda-1}, \eta)\, d\eta + \int_{\xi_{\lambda-1}}^{\xi_\lambda} P(\xi, \eta_\lambda)\, d\xi \tag{15}$$

ou l'expression

$$(15\,a)\qquad \int_{\xi_{\lambda-1}}^{\xi_\lambda} P(\xi, \eta_{\lambda-1})\,d\xi + \int_{\eta_{\lambda-1}}^{\eta_\lambda} Q(\xi_\lambda, \eta)\,d\eta\ ;$$

si toutes les deux marches étaient situées à l'intérieur de S, les deux expressions (15) et (15a) seraient identiques d'après le théorème (7). La somme

$$(16)\qquad v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

représente alors une fonction de ξ, η, satisfaisant à l'équation différentielle (2) et s'évanouissant pour ξ_0, η_0. Pour démontrer que cette fonction est uniforme à l'intérieur de S, il suffit de faire voir qu'elle est indépendante du choix des points intercalés.

Soit donc

$$(14\,a)\qquad (\xi'_1, \eta'_1), \dots, (\xi'_{m-1}, \eta'_{m-1})$$

une autre série de points intercalés, et

$$(16\,a)\qquad v'_1 + v'_2 + \dots + v'_m$$

la somme des intégrales correspondantes ; les séries (14) et (14a) vont déterminer deux *escaliers*, joignant les points (ξ_0, η_0) et (ξ, η) et situés entièrement à l'intérieur de S. L'aire limitée par eux pourra évidemment être partagée en un nombre fini de rectangles, tels que (AB CD) ; en appliquant donc le théorème (7) sur chacun de ces rectangles, on démontrera immédiatement l'identité des sommes (16), (16a).

La somme (16) fournit la solution u de l'équation différentielle (2), dont nous nous sommes proposés de démontrer l'existence ; elle sera représentée par le symbole

$$u = S\int_{(\xi_0, \eta_0)}^{(\xi, \eta)} (P d\xi + Q d\eta)^1 .$$

[1] Le principe de la définition de l'intégrale (17) indiqué dans le n° 2, a été imaginé à peu près en même temps par mon ami HEFFTER et par moi (voir la communication de M. HEFFTER, *Göttinger Nachrichten*, 1904, p. 196). Pour moi les considérations de la note pré-

3. Pour passer encore à l'application des résultats obtenus à la démonstration des théorèmes fondamentaux relatifs aux intégrales curvilignes, soit C une courbe menée dans l'intérieur de S entre les points (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) et représentée par les équations

$$\xi = \varphi(t) , \eta = \psi(t) ,$$

$\varphi(t)$, $\psi(t)$ étant deux fonctions uniformes du paramètre t, et admettant des dérivées $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ continues dans l'intervalle $t_1 \dots t_2$, où

$$\xi_i = \varphi(t_i) , \eta_i = \psi(t_i) \qquad (i = 1, 2)^1.$$

Alors l'intégrale curviligne prise suivant C n'est autre chose que

$$(18) \qquad C\int_{(\xi_1, \eta_1)}^{(\xi_2, \eta_2)} (Pd\xi + Qd\eta) = \int_{t_1}^{t_2} (P . \varphi'(t) + Q . \psi'(t))\, dt .$$

Comme la fonction uniforme $u(\xi, \eta)$, donnée par l'expression (17) satisfait à l'équation différentielle (2), on a

$$P(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\, \psi'(t) = \frac{du(\varphi(t), \psi(t))}{dt} .$$

donc

$$C\int_{(\xi_1, \eta_1)}^{(\xi_2, \eta_2)} (Pd\xi + Qd\eta) = u(\varphi(t_2), \psi(t_2)) - u(\varphi(t_1), \psi(t_1)) = u(\xi_2, \eta_2) - u(\xi_1, \eta_1) ,$$

ce qui montre que l'intégrale (18) est indépendante du chemin d'intégration C, et que partant l'intégrale relative à une courbe

sente ne forment qu'une application très particulière des développements analogues que j'ai établis relativement aux solutions des systèmes d'équations différentielles linéaires, et qui seront publiés ailleurs.

[1] On sait d'après les travaux de MM. GOURSAT, *Transactions of the American Math. Soc.*, I (1900), MOORE, *ibid.*, PRINGSHEIM, *ibid.*, II (1904), HEFFTER, Gött. Nachrichten, 1902, 1903, 1904, que la définition de l'intégrale curviligne peut être donné pour des courbes d'un caractère beaucoup plus général, mais comme pour la plupart des applications analytiques la définition adoptée dans le texte est assez générale, elle suffira pour les buts de l'enseignement, et c'est à quoi nous nous restreignons dans cette note.

fermée se réduit à zéro [1]. Le passage aux théorèmes de CAUCHY, relatifs aux intégrales de fonctions monogènes, se fait maintenant de la manière usuelle.

Remarquons enfin que les considérations du n° I s'étendent sans difficulté aux intégrales multiples, aussi bien que celles du n° II, aux intégrales des différentielles exactes, à un nombre quelconque de variables indépendantes.

Kolozsvar, 18 décembre 1904.

L. SCHLESINGER.

SUR UNE MANIÈRE

D'EXPOSER LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

1. On sait que von STAUDT exposa, indépendamment de toute notion de distance, les principes de la Géométrie projective.

Son exposition est fondée sur les propriétés du quadrilatère complet. Je vais ici exposer la Géométrie projective d'une façon différente et que je crois plus simple. Je ne me servirai pas du quadrilatère complet.

J'admettrai les axiomes ordinaires concernant le point, la ligne droite, le plan.

On regardera deux droites situées dans un même plan comme se coupant toujours. Si le point d'intersection n'existe pas en réalité, on dira que les droites se coupent en un point fictif, ou idéal. Il sera toujours possible de projeter les droites sur un autre plan (en projection conique) de façon que leurs projections se coupent. Trois droites d'un plan se couperont en un même point idéal, si leurs projections se coupent en un même point réel.

[1] C. f. HEFFTER, *l. c.*, 1903, p. 123.

Trois plans qui n'ont pas une droite commune se couperont toujours en un point réel ou idéal.

L'exposé que je vais faire repose sur le théorème des triangles homologiques. *Si les trois droites* AA' BB' CC' *sont concourantes, les points* α β γ *où se rencontrent* AB A'B' ; AC, A'C' ; BC, B'C' *sont en ligne droite et* réciproquement.

Ce théorème, intuitif lorsque les deux triangles ABC, A'B'C' sont dans deux plans différents, se démontre pour le cas de la figure plane, en considérant cette figure comme la projection d'une figure de l'espace. M. Hilbert, dans son mémoire sur les principes de la Géométrie, montre que si on laisse de côté la notion de distance, on ne peut démontrer le théorème dont nous parlons qu'en se servant de la Géométrie à trois dimensions.

J'emploierai dans ce qui suit les mots « parallèle » ou « equipollent » dans un sens nouveau, que je vais définir.

Je choisis un certain plan que je nomme « plan de l'infini. » Deux droites seront « parallèles » si elles se coupent dans le *plan de l'infini*. Il résulte de là que *deux parallèles à une troisième sont parallèles entre elles*.

Dans ce qui suit *je me borne à la Géométrie plane*. Dans le plan j'aurai une *droite de l'infini*, et deux droites parallèles se rencontrant sur la droite de l'infini.

Un quadrilatère dont les côtés opposés sont « parallèles » se nommera un « parallélogramme. »

Je dirai que deux vecteurs AB et CD sont « équipollents » si AB et CD sont parallèles, ainsi que AC et BD. Il résulte de cette définition que si AB et CD sont équipollents, AC et BD sont aussi équipollents.

Deux vecteurs équipollents à un 3e sont équipollents entre eux. Soient en effet AB et CD deux vecteurs équipollents à EF, alors AB, CD, EF, concourent sur la droite de l'infini ; donc les triangles ACE, BDF sont homologiques, et comme AB et EF d'une part, CD et EF d'autre part se coupent sur la droite de l'infini, on en conclut que AC et BD se coupent aussi sur cette droite.

AB et CD d'une part, AC et BD d'autre part sont donc parallèles, ce qui démontre la proposition.

Si deux vecteurs sont situés sur une même droite, la définition de l'équipollence tombe en défaut. Nous dirons que deux vecteurs situés sur une même droite sont équipollents entre eux, s'ils sont équipollents à un même troisième.

L'addition géométrique de deux vecteurs se définit, comme dans la théorie ordinaire des équipollences, mais il faut ici démontrer la proposition suivante : si a et a' d'une part, b et b' d'autre part sont équipollents, $a + b$ et $a' + b'$ sont équipollents.

C'est-à-dire : si AB et A'B' sont équipollents, ainsi que BC et B'C' il en est de même de AC et A'C'.

Ou encore : *Si deux triangles ont deux couples de côtés équipollents, les troisièmes couples sont équipollents.*

En effet, par hypothèse AB et A'B' d'une part, AC et A'C' d'autre part, sont équipollents. Donc d'après ce qui précède, il en est de même de AA' et de BB' d'une part, de AA' et de CC' d'autre part ; d'où il suit que BB' et CC' sont équipollents entre eux, et par suite BC et B'C' le sont aussi.

La proposition est donc démontrée.

Les propriétés de l'addition géométrique : $a + b$ est équipollent à $b + a$, $a + (b + c)$ est équipollent à $(a + b) + c$ s'aperçoivent facilement.

Le cas où les segments à additionner sont équipollents entre eux doit être traité à part ; c'est sur ce cas particulier que repose tout ce qui suit.

Soient deux vecteurs AB et CD parallèles à une même droite $\triangle$. Prenons sur $\triangle$ un point M, et construisons MN équipollent à AB, et NP équipollent à CD, alors MP sera équipollent à la somme des deux segments.

On peut démontrer que l'addition est commutative dans ce cas particulier de la façon suivante. (Le lecteur est prié de faire la figure). Ayant effectué la construction précédente prenons MK équipollent à CD. Il s'agit de faire voir que KP est équipollent à AB, ou que BP et AK sont équipollents. Ceci résulte d'un théorème énoncé ci-dessus : Les deux triangles AMK, BNP ayant deux couples de côtés équipollents ont leurs troisièmes côtés équipollents.

Considérons une droite OX. Prenons un segment AB pa-

rallèle à OX, que nous nommerons le segment *unité*. Nous pourrons construire sur OX un segment équipollent à n fois AB, en ajoutant n fois à lui-même le segment AB. On aura ainsi le point d'abcisse n ; en remplaçant AB par BA on construirait le point d'abcisse $-n$.

Si deux triangles, ABC, A'B'C' *ont leurs côtés parallèles deux à deux, et si* AB *est équipollent à* A'B', *les autres côtés sont aussi équipollents deux à deux.* En effet dans nos deux triangles les points de concours des côtés correspondants sont en ligne droite (sur la droite de l'infini). Donc les triangles sont homologiques, et les droites AA', BB', CC' concourent au même point. Ce point est sur la droite de l'infini, puisque AB est équipollent à A'B'. Donc ACC'A' BCC'B' sont des parallélogrammes, et la proposition est démontrée.

Si deux couples de droites parallèles interceptent sur une première droite $\triangle$ des vecteurs AB, CD équipollents, ils interceptent sur une seconde droite $\triangle'$ des vecteurs $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ équipollents.

Pour le démontrer on mènera par α et γ des parallèles à $\triangle$, la première coupant $B\beta$ en H, la seconde coupant $D\delta$ en K ; on remarquera alors que d'après le théorème précédent les deux triangles $\alpha H\beta$, $\gamma K\delta$ ont leurs côtés équipollents.

Le théorème sur les lignes proportionnelles, tel qu'on l'énonce et le démontre au début du troisième livre de géométrie, peut maintenant être énoncé et démontré en attribuant un sens nouveau au mot *rapport de deux lignes*. Considérons deux vecteurs *parallèles* AB et CD, si AB est équipollent à la somme de p segments α, et CD à la somme de q segments α on dira que le rapport des deux vecteurs est $\frac{p}{q}$.

Dans ces conditions, et à l'aide de ce qui précède on démontrera, de la même façon qu'au début du troisième livre de Géométrie, dans tous les ouvrages élémentaires usités en France, le théorème suivant :

Sur deux droites $\triangle$ *et* $\triangle'$ *des parallèles interceptent des segments proportionnels.*

On pourra alors, comme on le fait en Géométrie élémentaire, *mais avec le changement convenable dans le sens des*

mots, résoudre le problème suivant : Partager un vecteur AB en *n* vecteurs équipollents. Nous avons vu ci-dessus, comment on pouvait prendre sur une droite OX un vecteur ayant pour *abcisse* un nombre positif ou négatif mais *entier*. A l'aide des propositions précédentes on pourra prendre sur OX un vecteur ayant pour abcisse un nombre positif ou négatif, entier ou fractionnaire.

2. — Peut-être le lecteur trouvera-t-il l'exposé précédent trop long pour un aperçu, trop court pour un exposé complet. Je n'ai pas voulu exposer les choses tout au long, comme il serait nécessaire de le faire par exemple à des élèves dans une classe, je n'ai pas voulu non plus être trop sommaire, de peur d'être obscur.

A l'aide de ce qui précède on donne à un point M des coordonnées de la façon suivante. On a deux axes de coordonnées OX et OY ; des parallèles aux axes menées par M, (le mot parallèle étant toujours pris dans le sens spécial que nous lui donnons) coupent l'une OX en A l'autre OY en B. Les abcisses de A et de B calculées comme il est expliqué ci-dessus, sont les coordonnées de M.

Pour avoir l'équation d'une droite joignant les points P et Q, considérons un point M sur cette droite, le rapport des segments PM et PQ est égal à celui de leurs projections sur OX faites parallèlement à OY d'après le théorème sur les vecteurs proportionnels. C'est donc :

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

x_0, x_1, x étant les abcisses respectives de P, Q et M ; c'est de même :

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0};$$

on a donc l'équation de la ligne droite,

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0};$$

c'est une équation du premier degré.

De là on peut déduire toute la Géométrie analytique projective.

3. — Cette manière d'exposer la Géométrie présente les caractères suivants :

1° On ne se sert pas de l'infini, *au sens ordinaire du mot.* Les points à l'infini sont les points d'une droite arbitraire, s'il s'agit de Géométrie plane, d'un plan arbitraire, s'il s'agit de Géométrie dans l'espace.

2° Comme conséquence le mot « équipollent » n'a pas le même sens que dans la Géométrie ordinaire, mais toutes les propriétés des équipollences subsistent, avec le nouveau sens attribué aux mots.

3° Si on nomme *translation* une transformation changeant les droites en droites, et changeant en lui-même tout point de la droite de l'infini, telle que deux vecteurs transformés l'un de l'autre soient équipollents ; ce qui précède peut être nommé Géométrie de la translation. Dans cette Géométrie on ne compare jamais deux vecteurs qui ne sont pas parallèles. Cette proposition $AB = CD$ n'a de sens que si AB et CD sont parallèles.

4° Si on redonnait au mot « droite de l'infini » son sens ordinaire, cela reviendrait à admettre le postulatum d'Euclide.

En somme nous avons défini « l'infini » *de façon que le postulatum d'Euclide soit vrai.*

4. — Dans cette façon d'envisager la Géométrie le postulatum est donc vrai par *définition ;* non pas par la définition de la ligne droite ou de la distance, mais par la définition de l'infini.

Or on sait que si l'on admet le postulatum d'Euclide, il n'y a plus qu'*une* Géométrie métrique possible, la Géométrie euclidienne. Il est donc possible, sans axiome nouveau, de constituer la Géométrie euclidienne. Il suffira de définir la *rotation.* Il suffira même de définir la rotation autour de l'origine, car une rotation quelconque résulte d'une rotation autour de l'origine et d'une translation. C'est ce que nous allons essayer de faire dans ce qui suit, *en montrant que la définition donnée est la seule possible.*

Les rotations du plan autour de l'origine doivent être des

transformations changeant les droites en droites, changeant l'origine en elle-même, et n'altérant pas la droite de l'infini. Ces rotations doivent former un groupe. De plus, aucune droite réelle passant par l'origine ne doit rester immobile dans la rotation, et une rotation finie ramenant OX sur lui-même doit ramener sur eux-mêmes tous les points de OX.

Les transformations n'altérant pas l'origine ni la droite de l'infini, et changeant les droites en droites sont évidemment de la forme

$$x' = ax + by$$
$$y' = px + qy$$

$a\ b\ p\ q$ seront des fonctions du paramètre t qui pour $t = 0$ donneront la transformation identique, et par conséquent se réduiront respectivement à 1 0 0 1. Soient A B P Q les valeurs respectives des dérivées de $a\ b\ p\ q$ pour $t = 0$. La transformation infiniment petite sera :

$$x' = x + (\mathrm{A}x + \mathrm{B}y)\,dt$$
$$y' = y + (\mathrm{P}x + \mathrm{Q}y)\,dt$$

On voit facilement qu'une droite passant par l'origine

$$ux + vy = 0$$

demeurera inaltérée par la transformation si :

$$\frac{\mathrm{A}u + \mathrm{P}v}{u} = \frac{\mathrm{B}u + \mathrm{Q}v}{v}$$

λ étant la valeur commune de ces rapports, devra être racine de l'équation :

$$(\mathrm{A} - \lambda)(\mathrm{Q} - \lambda) - \mathrm{PB} = 0\ .$$

Comme aucune droite réelle ne doit rester immobile dans la rotation, cette équation doit avoir ses racines imaginaires. Supposons qu'il en soit ainsi. Il y aura alors deux droites imaginaires restant immobiles dans cette rotation infiniment petite (et par suite dans toute rotation qui résulte de la répétition de celle-ci).

Soient

$$\mathrm{X} + i\mathrm{Y} = 0 \qquad \mathrm{X} - i\mathrm{Y} = 0$$

les équations de ces deux droites, X et Y étant des polynomes linéaires et homogènes du premier degré, réels.

Alors une rotation transforme X^2+Y^2 dans le même polynome multiplié par un facteur λ^2, nécessairement positif, qui sera une fonction du paramètre t; si l'on écrit

$$X'^2 + Y'^2 = \lambda^2 (X^2 + Y^2)$$

on en déduira facilement :

$$X' + iY' = \lambda e^{i\varphi} (X + iY)$$

$$X' - iY' = \lambda e^{-i\varphi} (X - iY)$$

φ étant comme λ une fonction de t. En donnant à φ la valeur 2π on reproduit la transformation identique ; chaque droite revient sur elle-même, mais d'après les conditions imposées à la transformation *tout point doit revenir sur sa position primitive*, donc λ^2 doit être égal à *un*. Si on veut que pour $t = 0$, $\varphi = 0$ il faut prendre $\lambda = 1$ on a alors les formules ordinaires de la rotation.

Ce qui précède montre comment on peut constituer une sorte de Géométrie où le postulatum d'Euclide est vrai, par définition.

5. — Dans l'enseignement de la Géométrie projective, qu'on emploie ou non l'analyse, on devra, pour rester suffisamment élémentaire, procéder d'une façon différente.

Au lieu de définir le mot « parallèle » comme nous l'avons fait, on admettra le postulatum d'Euclide. Deux vecteurs équipollents seront par définition les côtés d'un parallélogramme. On refera ce que nous avons fait, mais en donnant aux mots leur sens ordinaire. Tout ce que nous avons dit subsistera, sauf cette proposition : Deux parallèles à un troisième sont parallèles entre elles. Ceci devra se démontrer, comme on le fait d'habitude dans les géométries où l'on commence par les droites et plans parallèles.

On pourra aussi admettre d'emblée, pour abréger, cette proposition : « Des droites ou des plans parallèles découpant sur une première droite des vecteurs équipollents entre

eux, déterminent sur une seconde droite des vecteurs équipollents entre eux. »

Si l'on nomme translation une transformation changeant un vecteur en un vecteur équipollent, la Géométrie ainsi exposée est la Géométrie de la translation [1].

Lorsqu'on ne se sert pas de l'analyse il convient de démontrer d'abord le théorème des transversales, de la façon suivante :

Soit pour fixer les idées un quadrilatère ABCD, coupé par une transversale en $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$. On projettera tous les points sur une droite $\triangle$, parallèlement à la transversale. ABCD se projettent en $a\ b\ c\ d$, et tous les points de la transversale se projettent en un même point m. On aura par exemple

$$\frac{A\alpha}{\alpha B} = \frac{am}{mb}$$

d'après le théorème des vecteurs proportionnels.

En multipliant membre à membre les quatre égalités analogues à celles-ci on démontrera le théorème. (Il faut observers que les égalités ont lieu en signe).

Le théorème sur le rapport anharmonique se déduit de là. Un faisceau de sommet S étant coupé par deux sécantes en ABCD et $a\ b\ c\ d$, on démontrera l'égalité des deux rapports anharmoniques en appliquant le théorème des transversales au quadrilatère A B $a\ b$, coupé par les deux sécantes SCc SDd.

6. — On expose ainsi la Géométrie projective d'une façon simple, sans se servir du début si lourd et si pénible de la Géométrie ordinaire. Euclide dit un jour, paraît-il, qu'il n'y avait pas de chemin royal en Géométrie. On a dit depuis que la Géométrie projective était ce chemin royal. Ce que nous venons de dire permet d'atteindre ce chemin royal sans s'écorcher les pieds aux broussailles de la Géométrie métrique élémentaire.

J. Richard (Dijon).

[1] On pourrait exposer cette théorie en définissant la translation à la manière de M. Méray.

LES DEUX BASES DE LA MÉTRIQUE

Un coup d'œil d'ensemble jeté sur les nombreux travaux concernant les Principes de la Géométrie qui ont vu le jour dans le dernier demi-siècle laisse apercevoir une différence radicale (sans contradiction d'ailleurs) entre les tendances de ces travaux, suivant qu'il y est fait ou non emploi des ressources de l'Analyse mathématique. Tandis que le concept qui fait l'objet des études analytiques est le « déplacement sans déformation » (Helmholtz, Cayley, Sophus Lie) ou encore l'« élément linéaire » (Riemann), les travaux purement logiques ont pris jusqu'à présent pour concepts fondamentaux la droite, le plan, la congruence de deux segments et celle de deux angles.

De ces deux tendances, la plus conforme à la nature des choses est incontestablement celle qu'accusent les travaux analytiques, car il est manifeste que, psychologiquement, les concepts métriques ont bien leur origine dans la notion du déplacement d'une figure invariable. C'est en outre aux travaux analytiques que l'on doit la pleine clarté dans laquelle apparaît à présent la question dite des Fondements de la Géométrie, qui est en réalité celle des Fondements de la Métrique. On a essayé, dans un article précédent, de *géométriser* les investigations analytiques afin d'affranchir le domaine géométrique de l'ingérence de l'Analyse et de permettre une plus grande diffusion des résultats dus à cette dernière. Une première conclusion s'impose, que nous énoncerons en employant les termes introduits et définis dans ledit article.

Les propriétés métriques des figures, c'est-à-dire toutes les propositions de la Géométrie traditionnelle, résultent du fait suivant : *les déplacements sans déformation sont des*

transformations ponctuelles formant un groupe métrique archimédien dont les lignes axiales jouissent de la propriété de l'unicité de l'asymptotique.

Il est clair, d'après cela, que la Géométrie traditionnelle, c'est-à-dire la Théorie des déplacements sans déformation, ne saurait être considérée comme la « Science de l'espace » et qu'il est temps de faire cesser une confusion due probablement à la généralisation naturelle qu'a subie le sens d'un mot, phénomène linguistique d'ailleurs très commun, la notion du particulier devançant habituellement celle du général, auquel il transmet ensuite sa dénomination. Si donc l'on veut maintenir au mot « Géométrie » son sens le plus général — et c'est le plus sage —, il convient d'attribuer un nom spécial à la Théorie des déplacements sans déformation ou mieux à cette théorie généralisée. Ce nom paraît devoir être la « Métrique. »

De là résulte aussi la possibilité d'établir une théorie générale des métriques ou, si l'on veut, une Métrique générale sans faire appel à aucun concept spécial, ainsi d'ailleurs que cela a été fait dans l'article précédent.

Ces divers résultats ont pour effet de *situer* d'une manière précise la Métrique dans la Géométrie.

Ces conclusions se retrouvent d'ailleurs si l'on adopte, pour édifier la Métrique, les Principes pris pour base dans les travaux qui ont été caractérisés par le qualificatif de « logiques » ; il est toutefois nécessaire, pour cela, de faire subir au préalable à ces Principes certaines modifications, dont la nature et le résultat vont être maintenant exposés.

Nous prendrons pour représentant de ces travaux le Mémoire de M. Hilbert[1] sur les Fondements de la Géométrie, mémoire digne de l'admiration des Mathématiciens et appelé à marquer une date importante dans la Philosophie scientifique.[2]

M. Hilbert se place au point de vue logique, c'est-à-dire

[1] Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1899 ; traduit en français par M. Laugel, Gauthier-Villars, Paris, 1900.

[2] Les axiomes adoptés par M. Hilbert ne diffèrent guère au fond de ceux qui avaient déjà été mis en lumière dans les belles études consacrées, en ces dix dernières années, à la question des principes de la Géométrie. Citons notamment les travaux de MM. Veronese, Pieri, Padoa et Peano.

qu'il n'admet comme concepts fondamentaux que ceux qui font partie du domaine le plus général de l'intelligence, à l'exclusion notamment de tout concept *géométrique* (c'est-à-dire *spatial*). Quant aux mots qui expriment des idées géométriques, tels que les mots : point, droite, plan, situé, congruent, etc., ils doivent être employés sans aucune signification : ils entrent dans le discours avec les seules propriétés logiques qui leur sont attribuées conventionnellement par des propositions appelées *axiomes*. (Dans ces conditions, il serait peut-être préférable de remplacer ces mots par des signes conventionnels, qui n'auraient pas l'inconvénient d'évoquer des images visuelles.)

De ces axiomes, M. Hilbert déduit, par de simples transformations logiques, les propositions de la Géométrie ou plutôt — car il faut signaler encore là cette confusion tenace — de la Métrique.

Nous ferons subir une première transformation aux axiomes de M. Hilbert, tout en évitant d'en reproduire l'énoncé, qui occuperait plusieurs pages. Pour cela, restituant aux termes proprement géométriques leur sens habituel, nous allégeons le système d'axiomes de tout ce qui, dans leur énoncé, est une simple conséquence des conceptions géométriques *générales*. On conçoit en effet que, si la signification des axiomes métriques (et non pas géométriques) de M. Hilbert n'est plus exclusivement logique, mais si ceux-ci, au contraire, représentent des faits géométriques, certains doivent se simplifier et d'autres devenir superflus. M. Hilbert pose, par exemple, sous le titre d'Axiomes de distribution, un groupe d'axiomes, parmi lesquels nous citerons les deux suivants :

1° A, B, C *désignant trois points en ligne droite, si* B *est situé entre* A *et* C, *il l'est aussi entre* C *et* A.

2° A et C *désignant deux points d'une droite, il y a au moins un point* B *situé entre* A *et* C *et au moins un point* D *tel que* C *soit situé entre* A *et* D.

Il est évident que ces axiomes doivent disparaître si l'on considère comme acquises les propriétés générales des figures, conformément à ce qui a été admis dans les paragraphes précédents, et si l'on émet en outre la proposition suivante :

Une droite est une ligne continue, ouverte et sans points doubles.

D'autres axiomes concernant le plan disparaissent également moyennant une définition appropriée de cette surface.

Le système d'axiomes de M. Hilbert, ainsi allégé, comporte, en plus des concepts généraux, ceux de *droite, plan, congruence de deux segments* (ou de deux couples de points), *congruence de deux angles* (ou de deux couples de droites concourantes), l'égalité ou congruence des figures quelconques, étant d'ailleurs définie par la congruence des segments et des angles.

Ce système doit subir une seconde transformation ou plutôt une généralisation ayant pour but d'en faire disparaître totalement les mots de droite et de plan, de manière à lui donner le même degré de généralité que possède le système d'axiomes par lesquels ont été caractérisés les groupes métriques et de rendre ainsi les deux systèmes comparables. Il suffit pour cela de remplacer les droites et les plans par des lignes et des surfaces constituant des ensembles dotés de propriétés qui vont être précisées. Le système d'axiomes de M. Hilbert, ainsi *géométrisé* et généralisé, peut être exposé de la manière suivante :

Soit un ensemble de lignes D, satisfaisant aux propriétés suivantes :

P I. — Une ligne de l'ensemble est déterminée par deux quelconques de ses points.

P II. — Les lignes D qui s'appuient sur deux lignes D concourantes sont situées sur une même surface.

Définition. — On appellera surface P toute surface engendrée par une ligne D variable passant par un point fixe et s'appuyant sur une autre ligne D qui ne passe pas par ce point.

On considère une certaine relation susceptible d'avoir lieu entre deux couples de points. A cette relation, qui sera appelée congruence, sont attribuées les propriétés suivantes :

C I. — Si l'on désigne par A, B deux points et par A′ un point d'une droite, on pourra toujours, sur cette droite, d'un côté donné de A′, déterminer un point et un seul B′ tel que

le couple (A, B) soit congruent au couple (A′, B′). Un couple de points est congruent à lui-même.

C II. — Le couple (A, B) est congruent à (B, A).

C III. — Deux couples de points congruents à un troisième sont congruents entre eux.

C IV. — Soit trois points A, B, C en ligne droite, B étant situé entre A et C ; soit de même trois points A′, B′, C′ également en ligne droite, B′ étant situé entre A′ et C′ ; si les couples (A, B) et (A′, B′) d'une part (B, C) et (B′, C′) d'autre part, sont respectivement congruents, il en sera de même des couples (A, C) et (A′, C′).

On considère en outre une certaine relation susceptible d'avoir lieu entre deux couples de lignes D concourantes (ou angles). A cette relation, qui sera également appelée CONGRUENCE, sont attribuées des propriétés exactement correspondantes à celles qui sont exprimées par C I, C II et C III, les points en ligne droite étant simplement remplacés par des lignes D concourantes et situées sur la même surface P. Enfin l'on admet la proposition suivante :

C V. — Si deux figures constituées chacune par trois points (A, B, C et (A′, B′, C′), sont telles qu'il y ait congruence entre les couples de points :

(A, B) et (A′, B′),
(A, C) et (A′, C′),

et entre les couples de lignes D :

(AB, AC) et (A′B′, A′C′),

il y aura également congruence entre les couples de lignes D :

(BA, BC) et (B′A′, B′C′),
(CA, CB) et (C′A′, C′B′).

Sur la base ainsi exposée, on peut établir une théorie de la congruence des figures, c'est-à-dire une Métrique : une telle théorie a un caractère pleinement géométrique, en revanche elle est manifestement indépendante de tout concept spécial d'origine métrique, tel que droite, plan, etc.

Il est maintenant facile d'établir un parallèle entre cette théorie de la congruence géométrique et la théorie de la congruence relative aux groupes métriques qui fait l'objet de notre précédent article (p. 270-291).

Les propriétés P I et P II, attribuées aux lignes D, appartiennent aux lignes axiales d'un groupe métrique d'après les théorèmes II 8 et 17. Les propriétés attribuées à la relation de congruence par les axiomes C I à C V et par ceux qui n'ont pas été explicitement énoncés appartiennent à la congruence relative à un groupe métrique en vertu des théorèmes I 1, II 20, 21, 22, 23 et 24 sous la condition de prendre pour lignes D et pour surfaces P les lignes axiales et les surfaces axiales du groupe. La congruence relative à un groupe métrique remplit donc toutes les conditions émises à titre d'axiomes par M. Hilbert (il serait d'ailleurs facile de voir que ces conditions suffisent à caractériser complètement cette sorte de congruence).

M. Hilbert adjoint enfin à ces conditions : 1° sous le titre d'axiome d'Archimède, une proposition qui revient à attribuer au groupe métrique correspondant la propriété archimédienne ; 2° sous le titre d'axiome des parallèles, une proposition attribuant à l'ensemble des lignes D la propriété de l'unicité de l'asymptotique. Il résulte du Mémoire de M. Hilbert que, moyennant l'adoption de ces axiomes, toutes les propositions de la Géométrie traditionnelle, c'est-à-dire de la Métrique, peuvent être établies par simple déduction logique. D'autre part, les propriétés exprimées par ces axiomes appartiennent, en vertu de théorèmes et de définitions contenus dans la théorie qui fait l'objet de l'article précédent, à tout groupe métrique archimédien dont les lignes axiales forment un ensemble jouissant de la propriété de l'unicité de l'asymptotique ; on en conclut que la teneur de cet article constitue une base suffisante pour la Métrique, et c'est ce que nous tenions à établir.

Les deux bases de la Métrique qui viennent d'être exposées sont équivalentes, mais elles diffèrent par certains caractères. La notion du groupe métrique se rattache directement aux conceptions habituelles et présente en outre une significa-

tion géométrique parfaitement claire; celle de la congruence, uniquement définie par ses propriétés, est factice et ne correspond pas forcément *à priori* à une réalité géométrique : on serait plutôt tenté de penser qu'il y a peu de probabilité pour qu'il existe, entre les figures, une sorte de relation satisfaisant à toutes les conditions requises. En revanche, l'emploi de ce procédé accroît la faculté de généralisation de la Métrique : on peut en effet, par l'abandon de certains des axiomes de M. Hilbert, obtenir des métriques ne rentrant pas dans la catégorie de celles qui reposent sur la congruence relative aux groupes de transformations ponctuelles.

COMBEBIAC (Limoges).

ERRATA.

Corrections à l'article : *Théorie géométrique des groupes métriques* (n° du 15 juillet 1905, p. 270-291).

Page 282, avant-dernière ligne : au lieu de « théorème G », il faut « théorème 6 ».

Page 289, 23e ligne : au lieu de « tout l'ensemble », il faut : « tout ensemble ».

Page 290, 6e ligne : au lieu de : « par une transformation convenablement « choisie, d'un groupe métrique déterminé, par exemple du groupe des « déplacements sans déformation. Mais on admet ainsi l'existence d'un « groupe métrique. »

il faut :

« par une transformation convenablement choisie, soit du groupe des déplacements euclidiens, soit d'un groupe conservant un ellipsoïde réel ou « imaginaire (à centre réel). Mais on admet ainsi l'existence de ces groupes. »

RÉFORMES A ACCOMPLIR

DANS

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Nous avons rappelé dans un précédent numéro (mai 1905, p. 238) le vœu qui a été exprimé, l'an dernier, au Congrès de Heidelberg, en faveur de l'obtention des moyens indispensables à l'avancement de l'enseignement mathématique. Il a eu pour effet d'attirer l'attention des mathématiciens sur l'insuffisance de l'organisation actuelle de l'enseignement supérieur. Chacun reconnaît aujourd'hui qu'une transformation en vue d'une meilleure adaptation aux conditions modernes est devenue indispensable, mais il semble que l'on n'est pas encore fixé sur les idées directrices qui doivent présider à cette réforme et sur les moyens pratiques permettant de la réaliser.

Il nous a paru, dans ces conditions, qu'il y aurait un réel intérêt à consulter quelques uns des mathématiciens qui s'intéressent aux questions d'enseignement et à faire connaître leur opinion sur les *conditions que doit remplir un enseignement complet, théorique et pratique, des mathématiques dans les établissements supérieurs*. Nous avons attiré leur attention sur les trois questions ci-dessous, que nous soumettons également à nos lecteurs. Les réformes à accomplir exigent en effet le concours de tous ceux qui ont l'expérience des choses de l'enseignement et qui entrevoient quelques progrès à réaliser. Nous espérons donc que ceux qui ont quelques remarques à présenter sur l'une ou l'autre de ces ques-

tions, n'hésiteront pas à nous les adresser sous forme de correspondance.

1° Quels sont les progrès à réaliser dans l'organisation de l'enseignement des mathématiques pures.

2° Quel est le rôle que doivent jouer les établissements supérieurs dans la préparation des maîtres de mathématiques des écoles moyennes.

3° Comment organiser l'enseignement mathématique de manière qu'il réponde, mieux que par le passé, aux besoins des autres branches scientifiques pures et appliquées.

La Rédaction.

Opinion de M. Gino Loria *professeur à l'Université de Gênes.*

Si j'accepte la flatteuse invitation de participer au *referendum* dont l'*Enseignement mathématique* a pris l'initiative, ce n'est pas dans l'illusion d'avoir à dire quelque chose d'une importance considérable, mais seulement pour manifester mon intérêt pour les questions qu'on vient de mettre à l'ordre du jour. Mes connaissances limitées sur l'organisation de l'instruction mathématique en dehors de ma patrie me font craindre avec raison que les remarques qu'on va lire seront jugées applicables seulement à l'Italie ; j'espère que, malgré cela, elles ne seront pas trouvées tout à fait dépourvues d'intérêt.

Un premier progrès qu'il serait désirable de réaliser dans l'enseignement des mathématiques pures, consiste, d'après mon sentiment, dans une accélération, si je peux m'exprimer de la sorte, dans sa marche. Le grand bâtiment dont les anciens géomètres ont mis des bases solides, tend toujours à croître en hauteur, en ampleur et même en profondeur; si on se borne à apprendre aux élèves la configuration du rez-de-chaussée (qui est d'ailleurs l'étage le plus obscur et le moins attrayant , c'est très probable qu'ils n'auront pas ni le temps ni l'envie pour monter aux étages supérieurs, dans l'espérance de parvenir au faîte de l'édifice. Or cette aug-

mentation de vitesse est, sans doute, possible, car dans les éléments il y a plusieurs chapitres, qui étaient absolument indispensables sous l' « ancien régime » de notre science, mais qui pour des modernes apparaissent comme des objets de luxe, que l'historien doit garder religieusement dans le musée des gloires de l'esprit humain, mais qui, dans un premier enseignement, doivent faire place à des choses d'une utilité plus directe. Je me borne à citer comme exemples la *théorie des proportions* (que l'ombre d'Euclide me pardonne ce sacrifice que je demande du Vme livre de ses *Eléments*, l'un des plus beaux monuments de l'ancienne géométrie !) et la théorie élémentaire des sections coniques, création d'Apollonius certainement sublime, mais dont Descartes et Fermat d'un côté, Chasles et Steiner de l'autre, ont diminué l'importance ; je pourrais ajouter d'autres exemples, si je ne désirais pas d'être court. A leur place on pourrait mettre certaines théories soi-disant supérieures, mais qu'il serait possible et urgent de démocratiser (p. ex. géométrie analytique, géométrie descriptive, etc.).

D'autre part il serait désirable qu'on donnât une idée assez étendue des APPLICATIONS que reçoivent aujourd'hui les mathématiques. L'action réciproque de la science pure et de la science appliquée a été exposée tout récemment par M. Poincaré, dans son beau volume sur *La valeur de la science*, d'une façon si lumineuse qu'il est tout à fait inutile que je répète mal ce qu'il a dit si bien. Mais il n'est pas inutile de remarquer que les applications des mathématiques peuvent se trouver pour toutes les sections de notre science, depuis les plus élémentaires et anciennes jusqu'aux plus élevées et modernes. En les signalant, non seulement on parviendra à augmenter l'attrait des théories pures, mais on élargira l'horizon des idées chez les élèves ; on captivera l'attention de ceux qui s'intéressent aux *faits* aussi bien que de ceux qui n'ont en vue que les *idées*, et on organisera l'enseignement des mathématiques de manière qu'il réponde, mieux que dans le passé, aux besoins des autres branches de l'enseignement.

Pour ce qui se rapporte à la préparation des professeurs

de mathématiques, le changement qui me paraît nécessaire est encore plus profond. Car, tandis que, p. ex., les élèves-médecins ont toujours devant les yeux de l'esprit la vision de leur profession future, à ceux qui aspirent à devenir des maîtres de mathématiques on ne fait presque jamais (je pourrais même biffer le *presque !*) songer au rôle qu'ils devront jouer dans leur vie. Ils entendent parler haute science, ils s'efforcent même de contribuer au progrès de nos connaissances positives, mais jamais ils se préoccupent de la manière de se tirer d'affaire lorsqu'ils seront obligés de faire comprendre une théorie mathématique à un public ignorant. P. ex., sont-ils exercés aux calculs numériques ? leur apprend-on à dessiner au tableau des figures vraisemblables qui soient vraiment des aides pour les élèves ? connaissent-ils les résultats obtenus par la pédagogie dès qu'elle parcourut la voie frayée par la psychologie scientifique ?... Dans l'ignorance de tout cela le jeune professeur doit débuter par des essais plus ou moins heureux aux dépens de ses élèves !...

Dès 1898, dans une conférence que je fis à Turin à l'occasion d'un congrès (et qui a été publiée dans le *Periodico di matematica per l'insegnamento secondario*), j'ai exposé un programme assez détaillé d'un cours historico-critique sur les théories dont se composent les mathématiques élémentaires (géométrie et trigonométrie, arithmétique et algèbre), cours qui, d'après mon sentiment, servirait très bien comme trait-d'union entre l'enseignement universitaire et l'instruction moyenne. Le bon accueil que firent à mes idées des personnes de haute compétence me fait croire que j'étais alors sur le bon chemin. Malheureusement je n'ai pas encore eu le loisir de traduire mon programme dans un livre ou dans un cours de leçons ; mais je tiens à déclarer que cela est arrivé faute de temps et non faute de foi dans ma thèse ; car je crois toujours qu'une exposition comparée des méthodes suivies par les anciens et par les modernes pour concevoir et exposer les théories fondamentales de la géométrie et de l'algèbre élémentaires, accompagnée d'une revue critique des objections soulevées contre le manque de rigueur de certains procédés et des nouvelles doctrines en-

gendrées en conséquence (p. ex. géométrie non-euclidienne, nombres irrationnels, etc.) formerait une préparation excellente pour l'élève aspirant à devenir maître. Dans ce cas, on pourrait bien dire avec Cicéron : « historia magistra vitæ ».

Le perfectionnement du rôle que jouent les établissements supérieurs pour la préparation des maîtres de mathématiques des écoles moyennes est une question de haut intérêt général et il est vivement à souhaiter que le *referendum* auquel je viens de prendre une faible part donne des résultats que tous les gouvernements s'empresseront d'adopter.

Opinion de M. Emile Borel
professeur-adjoint à la Faculté des Sciences de Paris.

La réponse aux diverses et importantes questions que vous me posez dépasserait de beaucoup les limites d'une lettre. Je préfère donc me borner à traiter un point particulier auquel j'attache une grande importance.

Il s'agit de la réforme de l'enseignement de la géométrie élémentaire. Je crois que presque tout le monde est d'accord pour reconnaître que les méthodes purement euclidiennes ne sont plus en rapport avec les progrès des mathématiques modernes. « La géométrie est l'étude du groupe des mouvements » cette vérité fondamentale doit de plus en plus pénétrer l'enseignement.

Seulement, si l'on est généralement d'accord sur le fait qu'il y a quelque chose à faire, les divergences surviennent dès qu'il s'agit de préciser. Ceci ne doit pas nous étonner, car il est bien clair que toute solution proposée ne saurait être aussi *achevée dans le détail* que l'est la géométrie euclidienne, à la suite de perfectionnements successifs auxquels ont collaboré plusieurs générations de savants et de professeurs. Il convient donc de ne pas se montrer trop sévère pour les créateurs de méthodes nouvelles ; on doit, au contraire, chercher à retenir ce qu'il y a de meilleur dans leurs idées. Mais il ne faut pas se dissimuler que c'est seulement après beaucoup de livres, d'articles, d'expériences, que pourra être créée une géométrie aussi logiquement parfaite

que la géométrie euclidienne, mais plus vivante, plus intéressante et plus accessible. Un tel résultat serait du plus haut intérêt pour l'enseignement mathématique; aussi me semble-t-il que tous ceux qui s'intéressent à cet enseignement, qu'ils soient professeurs primaires, secondaires ou supérieurs (pour employer une classification qui devient de plus en plus surannée) doivent contribuer le plus possible à hâter l'avènement de la géométrie nouvelle, soit en écrivant des livres, soit en discutant ceux qui sont écrits, soit et surtout en expérimentant les méthodes nouvelles, en publiant les résultats de leurs expériences.

ENQUÊTE SUR LA MÉTHODE DE TRAVAIL DES MATHÉMATICIENS

LES RÉSULTATS. — I

Avant-propos. — Nous ne saurions commencer cette étude sur la méthode de travail des mathématiciens sans réitérer nos vifs remerciements à tous ceux qui ont bien voulu répondre à notre questionnaire ; nos sentiments de gratitude vont également à nos confrères de la presse scientifique périodique qui ont contribué à le faire connaître.

Notre étude est basée sur les documents provenant de plus d'une centaine de mathématiciens appartenant, pour la plupart, au temps présent, mais parmi lesquels figurent aussi quelques uns des grands géomètres décédés, depuis les Bernoulli jusqu'à Lie. Il y avait en effet un grand intérêt, surtout pour la question relative à l'hérédité du talent mathématique, à consulter les biographies de quelques savants des 17me et 18me siècles.

Chacun ayant été libre de ne répondre que sur les points à sa convenance, le nombre des réponses varie nécessairement d'une question à une autre.

Question 1 a.

A quelle époque d'après vos souvenirs, et dans quelles circonstances, le goût des sciences mathématiques s'est-il emparé de vous?

Pour les mathématiciens dont nous avons recueilli les réponses, cette époque varie de la première enfance à l'âge de 26 ans. Elle précède même, pour quelques-uns, la connaissance de l'alphabet; c'est alors par le calcul oral que se révèle le goût des mathématiques. Mais celui-ci se déclare le plus souvent au cours des études primaires ou secondaires, au moment de la première initiation à l'arithmétique et à la géométrie, ou aux mathématiques élémentaires. Les uns sont attirés par l'idée de nombre, par les calculs et problèmes arithmétiques ou algébriques; d'autres admirent l'enchaînement d'une démonstration géométrique ou s'intéressent plus particulièrement aux mathématiques appliquées.

Le goût des mathématiques existe à l'état latent chez bien des personnes, mais il lui faut pour éclore des circonstances favorables provenant, soit du milieu, soit de l'école, ou encore des premières lectures mathématiques. Son éclosion est souvent retardée par un enseignement défectueux, ainsi que cela ressort du reste d'un certain nombre de lettres. Toutefois le retard est aussi dû, dans certains cas, au fait qu'il s'agit d'un élève également doué pour toutes les branches de l'enseignement élémentaire.

Sur 93 réponses à la première question (a) le goût des mathématiques s'est déclaré

avant 10 ans révolus	dans	35	cas,	
de 11 à 15	»	»	43	»
de 16 à 18	»	»	11	»
de 19 à 20	»	»	3	»
et au-dessus de 20 (26 ans)	»	»	1	»

Il y a nécessairement beaucoup de réponses à peu près

identiques, surtout pour la période de 6 à 15 ans. Nous reproduirons ici les plus caractéristiques et nous les ferons suivre de quelques indications concernant des mathématiciens décédés.

Rép. VII (Allemagne). — Mon père s'était toujours beaucoup intéressé aux mathématiques, et, s'il avait pu faire des études, aurait certainement fait un bon mathématicien. C'est lui qui me donna les premières leçons de mathématiques ; il me fit résoudre des problèmes choisis dans le recueil Meyer-Hirsch et m'enseigna la géométrie d'Euclide d'après une traduction de Lorenz. A la fin des études du gymnase je me résolu à faire des études mathématiques.

Rép. XV (Allemagne). — Mon oncle, qui était mathématicien, me donna des leçons particulières pour compléter l'enseignement mathématique que je recevais à l'école et qui laissait beaucoup à désirer. Il éveilla en moi un grand intérêt pour l'astronomie. Je fis d'abord des études techniques, jusqu'à l'âge de 21 ans, mais, à la suite des leçons extrêmement captivantes de Clebsch et des entretiens que j'eus avec lui, je me décidais à me consacrer entièrement aux mathématiques.

Rép. XXI (Allemagne). — A l'âge de 6 à 8 ans, j'avais établi une formule me permettant de calculer, pour ma mère qui jouait à la loterie, le nombre des ambes et des ternes d'un nombre déterminé de numéros. A une autre occasion j'ai résolu un problème de permutations concernant le jeu de cartes.

Rép. XXXI (Allemagne). — A huit ans je fis passionnément du calcul algébrique ; à 12 ans sous l'influence d'un excellent maître ma vocation était décidée.

Rép. XIX (Angleterre). — Je pris le goût des mathématiques à 10 ans à la suite de la facilité que j'avais à résoudre des problèmes proposés à l'école.

Rép. XXXIII (Autriche). — Assez tôt ; j'avais 16 ans, dans l'enseignement secondaire (j'avais commencé l'enseignement primaire à 10 ans) lorsque j'ai composé un mémoire sur les fractions pour perfectionner la théorie qu'on nous a exposée à l'école. Une année plus tard, mon professeur de langue tchèque m'ayant indiqué les mathématiques comme vocation probable, je me mis aux études privées ; au bout d'une année je connaissais le programme du baccalauréat, à l'exception de la Géométrie analytique dont je n'avais appris que les premiers éléments. J'abordais ensuite l'étude du Calcul différentiel et intégral, mais sur de mauvais manuels. J'étais plus heureux avec la Géométrie projective. Je trouvais un plaisir particulier dans la recherche des théorèmes projectifs généralisant des constructions de la Géométrie projective.

Rép. LIII (Belgique). — A $3^1/_2$, mon attention était fortement fixée sur l'idée de nombre.

Rép. XLVI (Espagne). — Le goût des sciences mathématiques s'est emparé de moi quand j'étais âgé de 17 ans. Quand j'étudiais la physique, j'aimais fortement tout ce qui contenait des formules mathématiques, la mécanique, la théorie de la lumière. Je fus ému en ouvrant pour la première fois un traité de Géométrie analytique et la Philosophie des Mathématiques de Wronski, la Philosophie de la technique algorithmique, etc.

Rép. L (Etats-Unis). — A l'âge de 12 à 13 ans, les premières leçons d'Algèbre et de Géométrie.

Rép. LV (Etats-Unis). — Dès l'âge de 5 ans. J'ai toujours eu une avance d'environ deux ans sur mes camarades pour ce qui concerne le programme des mathématiques. A 12 ans j'étais décidé de faire des mathématiques.

Rép. LXXII (Etats-Unis). — A l'âge de 14 à 15 ans, grâce à mon excellent maître de mathématiques et aux intéressants problèmes qu'il nous proposait.

Rép. I (France). — Le goût de *toutes* les sciences m'est venu à l'âge de 11 à 12 ans par la lecture de livres enfantins sur les sciences et les savants, puis de livres de physique et de chimie amusantes et autres, enfin par les suggestions continuelles de mon père (notaire de petite ville) qui ne voyait rien au-dessus des choses et des hommes de science et encore comme contre-partie d'un prompt et insupportable dégoût des études *littéraires*, telles qu'elles se faisaient au lycée. Mis au latin à moins de sept ans, j'ai d'abord réussi, mais une maladie m'a fait placer dans une école primaire où j'ai eu des succès ; ensuite, de la septième à la rhétorique (je n'ai pas fait de Philosophie), j'ai croupi *misérablement* dans la paresse et dans des punitions aussi continues et multipliées qu'impuissantes à la corriger. Mais pendant toute cette triste période de ma vie, tout ce qui avait rapport aux sciences, à l'industrie, n'a jamais cessé de me passionner, comme une terre de délices dont j'étais exilé. — Les mathématiques m'ont captivé par leur précision, et leur caractère spécial, comme l'aurait fait un magicien capable de deviner l'inconnu. Les problèmes d'arithmétique m'enchantèrent bien avant que je fusse capable de les résoudre, ce qui a été long. A 11 ans, mon père m'a fait donner des leçons particulières de sciences (Algèbre, Physique, etc.) qui me passionnaient, bien que je n'y comprisse presque rien, cela sans excepter les commencements de l'Algèbre de Lefébure que mon maître m'avait sottement mis entre les mains. A moins de 13 ans, en 4me, j'ai remporté le premier prix pour une composition remarquée, si je me souviens bien, dans un cours *commun* professé par ce maître au collège de Châlons sur Saône devant toutes les classes réunies de la 4me à la Philo-

sophie et ce premier succès m'a enflammé, en partie, par son contraste avec ma nullité du côté du grec et du latin. En 3me, j'avais reçu des leçons particulières de géométrie données par un vieux professeur, ami de mon père, qui m'accablait de reproches, même d'injures, et cependant j'aimais ces choses. En seconde et en rhétorique, au lycée de Dijon, j'étais toujours un cancre en lettres, accablé d'arrêts et de retenues de promenade, mais je lisais comme un livre sacré l'histoire des Mathématiques de Montucla sans toutefois en saisir grand chose, je fréquentais les élèves de spéciales en enviant leur sort ; à ce moment j'ai épelé les premiers paragraphes de la Géométrie analytique de Cirodde qu'ils m'avaient prêtée, et ça été pour moi une sorte de révélation, un ravissement. Les notes techniques de la Trigonométrie de Lefébure me plongeaient dans l'extase comme des paroles magiques, cependant, je n'y comprenais presque rien. Entré en mathématiques élémentaires, à 16 ans (Classe de M. B. Amiot au lycée St-Louis, 70 élèves) je me suis trouvé classé le premier dans la première composition de mathématiques de l'année, et dès lors toutes mes prédilections se sont portées sur les Mathématiques. En 1re année de spéciales (prof. Briot) j'étais considéré à Paris comme une sorte d'élève phénomène. En 2me année, je me suis désintéressé de ce cours pour lire les livres de Duhamel sur l'Analyse et la Mécanique et m'enflammer de plus en plus au contact de choses que je trouvais transcendantes en les comprenant fort imparfaitement.

Rép. II (France). — A 14 ans, en 4me, au lycée de Moulins. Jusque-là, au lycée Bonaparte à Paris, puis au lycée de Moulins en 5me, on n'avait fait appel qu'à mes facultés de *perroquet*, fort peu développées et j'étais un cancre. Je cessais de l'être dès qu'on fit tant soit peu appel à mon raisonnement.

Rép. XXIII (France). — Dès mon enfance ; ma première vocation (la marine), m'a poussé de fort bonne heure à des études qui m'inspiraient un grand attrait.

Rép. XXVI (France). — Etant jeune j'avais l'arithmétique en horreur. Le goût des mathématiques m'est venu en commençant l'étude de l'algèbre.

Rép. XLIII (France). — A 17 ans, quand j'entrai en mathématiques élémentaires.

Rép. LXXV (France). — A 15 ans. Après une année passée au lycée de Douai (une année de troisième-sciences) qui m'avait laissé indifférent et presque dégoûté des mathématiques qu'on m'y avait enseignées, ayant pris à Paris, pendant les vacances, quelques leçons particulières, j'ai senti venir en moi le goût des mathématiques. Le professeur particulier auquel je fais allusion ici n'a été pour rien, ou pour peu de chose, dans cette transformation. Autant qu'on peut analyser, à mon âge, les souvenirs de quin-

zième année les impressions scientifiques surtout!) je crois pouvoir déclarer qu'il y avait en moi tout simplement un goût latent qui n'avait pas encore trouvé le moment d'éclosion.

Rép. LXXVI (France). — A l'époque où dans l'enseignement secondaire on bénéficiait dans la classe d'un vrai professeur de mathématiques (à mon époque de 3me).

Rép. XXV (Hollande). — A l'âge de 13 ans, par des leçons particulières d'un professeur dont les connaissances, comme je m'en suis aperçu plus tard, n'étaient pas très étendues, mais qui était enthousiaste et savait entraîner ses élèves. Aujourd'hui encore je pense à lui avec admiration.

Rép. XXIX (Hollande). — A l'âge de 8 ans, soudain, à la lecture d'un traité d'algèbre, qui me tomba sous les mains absolument par hasard.

Rép. V (Italie). — Dès mon enfance. Les premiers calculs, les premiers problèmes m'intéressaient déjà beaucoup.

Rép. XVIII (Italie). — A 14 ans, quand je commençai à étudier l'arithmétique théorique et à résoudre des problèmes algébriques simples sans connaître encore l'Algèbre.

Rép. XLII (Italie). — Au moment où je fréquentai le second cours de l'Ecole technique.

Rép. LXXIV (Italie). — Le goût des sciences mathématiques s'est emparé de moi dès les premières études de l'Arithmétique et surtout de la Géométrie plane.

Rép. XXX (Norvège). — A l'âge de 15 ans, à l'école. C'est en remarquant certaines lois dans les séries arithmétiques que le goût a commencé.

Rép. XI (Russie). — A onze ans, j'ai remarqué que $(a+1)^2 = a^2 + a + (a+1)$. Mon maître m'a dit que c'est un cas particulier du binome de Newton. Je me suis imaginé que j'étais mathématicien ; je me mis à lire l'astronomie populaire d'Arago. Ma vocation était décidée.

Rép. XLVII (Suisse). — A l'âge de 14 ans lorsque, à l'école secondaire, j'entendis pour la première fois les démonstrations de la Géométrie euclidienne.

Rép. LX (Suisse). — Au collège, à la fois sous l'influence d'un excellent professeur et de l'intérêt que je portais à l'histoire des mathématiques.

Parmi les *mathématiciens décédés*, nous en citerons d'abord quelques-uns qui étaient doués d'une remarquable précocité pour les mathématiques.

Pascal (1623-1662). — Chacun connait le cas de Blaise Pascal qui, dès la première enfance, témoignait d'un vif intérêt pour les sujets mathématiques. Dans la crainte de le fatiguer, son père,

comptait ne faire donner les premiers éléments des mathématiques qu'à partir la seizième année. Blaise résolut de commencer seul l'étude de la Géométrie et, n'ayant encore que douze ans, il parvint, sans le secours d'aucun livre, à démontrer une série de propositions de la Géométrie d'Euclide, notamment le théorème relatif à la somme des angles d'un triangle. A seize ans, il composa son *Traité des sections coniques*.

Clairaut (1713-1765). — Alexis-Claude Clairaut « fut un enfant merveilleusement précoce. Son père, pauvre professeur de mathématiques, chargé d'une nombreuse famille et forcé à une grande économie, instruisait lui-même ses enfants ; tout naturellement il leur enseignait de préférence ce qu'il savait de mieux, et la géométrie occupait une grande place dans leurs études. Les éléments d'Euclide servirent de premier alphabet à Clairaut ; il se trouva bientôt capable de les entendre et d'en raisonner. Attiré par le charme des démonstrations abstraites qui lui semblaient claires et faciles, il avait lu et compris, à l'âge de dix ans, l'*Analyse démontrée* de Guinée et le *Traité des sections coniques* du Marquis de l'Hôpital. Vers le milieu de la treizième année, il composa un mémoire sur les propriétés de quelques courbes nouvelles qui, présenté à l'Académie des Sciences et approuvé par elle, fut imprimé à la suite d'un travail de son père, dans le recueil intitulé : *Miscellanea Berolinensia*... A l'âge de seize ans, Clairaut avait terminé un traité sur les courbes à double courbure. » Joseph Bertrand, *Eloges académiques*, nouvelle série, pp. 232-233 ; Paris, 1902).

Gauss (1777-1855). — Le grand géomètre allemand Ch.-Fréd. Gauss, disait lui-même qu'il avait su calculer avant de savoir parler. A l'âge de trois ans, il reprit son père sur une erreur de calcul ; à neuf ans il découvrit la propriété de la somme des termes d'une progression arithmétique. Gauss était également très doué pour les langues, aussi, à son entrée à l'Université, en 1795, hésita-t-il d'abord entre la Philologie et les Mathématiques : il ne tarda d'ailleurs pas à choisir celles-ci.

Ampère (1775-1836). — Comme Gauss, A.-M. Ampère fut, dès la première enfance, remarquablement doué pour le calcul oral.

J. Bertrand (1822-1900). — L'illustre académicien Joseph Bertrand était prodigieusement doué dès l'enfance. « On ne croyait pas, écrivit-il [1] à son ami Pasteur, que je fusse destiné à vivre jusqu'à l'âge d'homme. Les études dès lors, pour moi, étaient traitées comme un passe-temps inutile et, si j'y prenais trop de goût, dangereux... Mon père m'empêchait d'étudier, mon instruction cependant était sa plus chère préoccupation... Lorsque, à l'âge de neuf ans, j'eus le grand malheur de perdre mon père, j'avais appris

[1] Voir l'*Eloge historique de Joseph Bertrand*, par Gaston Darboux.

par surprise, en quelque sorte, les éléments de la Géométrie et la partie élémentaire de l'Algèbre ». En 1838, Bertrand passait avec succès les examens de bachelier ès lettres (20 mars), de bachelier ès sciences (10 avril) et de licencié ès sciences (4 mai); l'année suivante il se présenta au doctorat ès sciences, et il fut reçu premier à l'Ecole polytechnique.

Jacob Steiner (1796-1863). — Le géomètre suisse J. Steiner montra dès son enfance des aptitudes pour le calcul oral et l'astronomie. Toutefois il n'entreprit que très tard l'étude des premiers éléments des mathématiques ; lorsqu'à l'âge de 18 ans il entra à l'Institut Pestalozzi, à Yverdon, il dut d'abord apprendre à écrire.

Chez d'autres géomètres les dispositions pour les mathématiques ne se manifestèrent que plus tard, après la quinzieme année. Il en est ainsi, entre autres, pour deux des plus grands génies mathématiques du XIXme siècle ; mais ils n'en furent pas moins précoces dans la publication de leurs premiers travaux. Nous voulons parler d'Abel et de Galois, dont les travaux ont exercé une influence si considérable sur le développement des mathématiques.

Niels-Henrik Abel (1802-1829). — Abel entra au Lycée de Christiania en 1815. L'enseignement se donnait alors dans des conditions très défavorables et la plupart des maîtres étaient incapables. Il ne semble pas que l'étude des mathématiques ait exercé une grande attraction sur Abel pendant cette première période. Les aptitudes pour les mathématiques ne commencèrent à se révéler qu'en 1818, sous l'influence d'un jeune maître B.-M. Holmbœ qui devint pour lui un bienfaiteur et un ami. « L'enseignement de Holmbœ fut aussitôt plus jeune, plus vivant que l'enseignement habituel de cette époque, en ce qu'il laissa s'exercer la réflexion de ses élèves en leur proposant des problèmes variés, et ainsi apparut soudain un jour ce que renfermait l'esprit d'Abel. Au bout de peu de temps Holmbœ dut lui donner des exercices à part, et dès cette année Abel, qui avec cet enseignement eut achevé les éléments en un tour de main, et était avide d'en apprendre davantage, demanda des leçons particulières ». Holmbœ ne tarda pas à être fixé sur la valeur de son élève ; en 1819 il accompagne les notes d'Abel de l'appréciation « Génie mathématique remarquable », et en 1820 « Au génie le plus remarquable il joint un goût et une ardeur insatiables pour les mathématiques, et certainement il deviendra, s'il vit, un grand mathématicien ». (Niels Henrik Abel, *Mémorial* publié à l'occasion du Centenaire de sa naissance, pp. 7-11).

Galois (1811-1832). — Evariste Galois est né à Bourg-la-Reine, près de Paris, le 25 octobre 1811. « Dès l'âge de quinze ans, écrit M. E. Picard dans son Introduction aux *Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois*, ses dispositions extraordinaires pour les mathématiques commencèrent à se manifester ; les livres élémentaires d'algèbre ne le satisfont pas, et c'est dans les Ouvrages classiques de Lagrange qu'il fait son éducation algébrique. Il semble qu'à dix-sept ans Galois avait déjà obtenu des résultats de la plus haute importance concernant la théorie des équations algébriques... Après deux échecs à l'Ecole polytechnique, Galois entra à l'Ecole normale en 1829 et fut obligé de la quitter l'année suivante. Dans la dernière année de sa vie il se donna tout entier à la politique, passa plusieurs mois sous les verrous de Sainte-Pélagie et, blessé mortellement en duel, mourut le 31 mai 1832. En présence d'une vie si courte et si tourmentée, l'admiration redouble pour le génie prodigieux qui a laissé dans la science une trace aussi profonde ; les exemples de productions précoces ne sont pas rares chez les grands géomètres, mais celui de Galois est remarquable entre tous ».

Jacobi (1804-1851). — C.-G.-J. Jacobi était remarquablement doué, dès son enfance, pour toutes les branches. Au Gymnase il se distingua tout particulièrement pour la philologie et les mathématiques. Pendant ses deux premières années d'études universitaires, à Berlin (1821-1825), il se consacra à la fois à la philosophie, à la philologie et aux mathématiques, sans avoir de préférence bien marquée. Il avait déjà dix-neuf ans lorsqu'il choisit définitivement les mathématiques.

Il serait facile de continuer cette liste et de montrer par d'autres exemples qu'il y a de grands géomètres qui n'ont pas été précoces dans le développement de leur talent mathématique. L'éclosion de leur talent a quelquefois même été très tardive. Ce fut le cas de l'un des plus grands mathématiciens de la seconde moitié du XIXme siècle, S. Lie.

Sophus Lie (1842-1899). — Au Gymnase et à l'Université de Christiania, Lie était également doué pour toutes les branches ; il se destinait à l'enseignement scientifique et, en 1865, subit avec succès l'examen d'Etat. Pendant toutes ses études il ne montra aucune prédilection pour les sciences exactes. Mais, en 1868, il trouva par hasard les œuvres de Poncelet et de Plücker qui éveillèrent en lui un goût irrésistible pour les mathématiques : l'année suivante il obtint une bourse de voyage qui lui permit de faire un séjour à l'étranger ; il fut reçu docteur, à l'Université de Christiania, en 1871.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur la détermination des axes d'une hyperbole.

(A propos d'un article de M. Majcen).

La construction indiquée par M. Majcen (*l'Ens. Math.* p. 221-225) pour la détermination des axes d'une hyperbole dont deux diamètres conjugués sont donnés, peut se légitimer aisément sans recourir aux propriétés des projections d'une hyperbole équilatère.

Nous nous servirons des mêmes notations et nous reproduirons la fig. 2 pour y ajouter quelques lignes auxiliaires. Il est évident que les asymptotes de la courbe sont l'un la droite OM' et l'autre la droite VV' menée par O parallèlement à PN. Puisque les triangles POM' et M'ON sont isoscèles, on aura

$$\widehat{M'ON} = \widehat{ONM'} = \widehat{NOV'} ,$$
$$\widehat{POM'} = \widehat{M'PO} = \widehat{POV} .$$

et les droites OP, ON, étant les bissectrices des angles formés par les asymptotes, seront les directions des axes.

Si Q_0 est le pied de la perpendiculaire abaissée de Q' sur ON on aura

$$OQ_0 = R_0N\ , \qquad OR_0 = Q_0N\ ,$$

et, d'après la figure,

$$\overline{OB'}^2 = \overline{OA_1}^2 = \overline{R_0N}^2 - \overline{OR_0}^2 = \overline{R_0N}^2 - \overline{Q_0N}^2 .$$

Alors on peut observer :

a) Des relations

$$\frac{\overline{OA'}^2}{\overline{OB'}^2} = \frac{\overline{R_0R'}^2}{\overline{R_0N}^2} = \frac{\overline{Q_0Q'}^2}{\overline{Q_0N}^2} = \frac{\overline{R_0R'}^2 - \overline{Q_0Q'}^2}{\overline{R_0N}^2 - \overline{Q_0N}^2}$$

on déduit

$$\overline{OA'}^2 = \overline{R_0R'}^2 - \overline{Q_0Q'}^2 ,$$

et comme

$$\overline{OR'}^2 = \overline{OR_0}^2 + \overline{R'R_0}^2 = \overline{Q_0N}^2 + \overline{R'R_0}^2 ,$$

$$\overline{OQ'}^2 = \overline{OQ_0}^2 + \overline{Q'Q_0}^2 = \overline{R_0N}^2 + \overline{Q_0Q'}^2 ,$$

il vient

$$\overline{OB'}^2 - \overline{OA'}^2 = \overline{OQ'}^2 - \overline{OR'}^2 ,$$

et l'on peut conclure que OB′ et OA′ sont effectivement les demi-axes de l'hyperbole, car la droite A′B′ est parallèle à l'un des asymptotes et la différence de leurs carrés est égale à la différence des carrés des demi-diamètres donnés.

b) Si Q′ est un point réel de l'hyperbole et si U, V et S sont les points où la droite menée par Q′ parallèlement à ON coupe les asymptotes et OP, on sait que OB′ est le demi-axe si

$$\overline{OB'}^2 = Q'U\ .\ Q'V\ .$$

Mais US = SV, et par suite

$$Q'U\ .\ Q'V = \overline{Q'S}^2 - \overline{SU}^2 ,$$

et puisque la droite $R'R_0$ passe par U, on a

$$Q'U\ .\ Q'V = \overline{R_0N}^2 - \overline{OR_0}^2 ,$$

ce qui justifie la construction.

c) On peut aussi appliquer la propriété que l'aire du triangle formé en joignant les extrémités de deux diamètres conjugués est constante. Si OB' est le demi-axe on a

$$\frac{\overline{OB'}^2}{\overline{ON}^2} = \frac{\text{aire OA'B'}}{\text{aire OPN}} = \frac{\text{aire OQ'R'}}{\text{aire OPN}} = \frac{OQ_0 \cdot R'R_0 - Q'Q_0 \cdot OR_0}{ON \cdot OP} ,$$

et par suite

$$\overline{OB'}^2 = \frac{ON}{OP} (OQ_0 \cdot R'R_0 - Q'Q_0 \cdot OR_0) .$$

Mais

$$R'R_0 \frac{ON}{OP} = R_0N = OQ_0 ,$$

$$Q'Q_0 \frac{ON}{OP} = Q_0N = OR_0 ,$$

ce qui donne

$$\overline{OB'}^2 = \overline{OQ_0}^2 - \overline{OR_0}^2 = \overline{R_0N}^2 - \overline{OR_0}^2 ,$$

résultat conforme à la construction examinée.

E. Cantoni, Viadana (Mantova).

A propos d'un théorème de M. Zervos sur les racines des équations algébriques.

Dans *L'Ens. mathém.* du 16 juillet 1904, (6e année, p. 297-299), M. Zervos examine le théorème suivant :

Si dans un polynome entier avec tous ses termes positifs, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, le rapport d'un coefficient au précédent ne va pas en croissant, l'équation qu'on a en égalant le polynome à zéro a nécessairement des racines imaginaires.

Or, il est facile de former des exemples qui ne vérifient pas ce théorème.

Soit, par exemple, l'équation

$$3x^2 + 2x + \frac{1}{12} = 0 ,$$

donnant

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{6} ,$$

et l'équation

$$128\,x^3 + 112\,x^2 + 20\,x + 1 = 0\ ,$$

dont les racines sont :

$$x_2 = -\frac{1}{8}\ ,\quad x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{8}\ .$$

Du reste il ne ressort pas de la démonstration de M. Zervos que l'équation possède nécessairement des racines imaginaires.

T. Kariya (Tokio).

Questions et remarques diverses.

Un théorème sur le triangle. — Voici un théorème tout-à-fait élémentaire et qui est sans doute connu et utilisé depuis longtemps, bien que je ne l'aie trouvé dans aucun des ouvrages de géométrie que j'ai à ma disposition.

Soit A le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle A B C; on mène la médiane A O, la hauteur A D et la bissectrice A E de l'angle A. La bissectrice A E de l'angle B A C est aussi bissectrice de l'angle O A D.

La démonstration est du reste immédiate.

Je serais heureux si quelque lecteur de l'*Enseignement mathématique* pouvait me dire si cette propriété a été utilisée sous forme de théorème ou à titre d'exercice dans un manuel de géométrie.

A. Hantos (Kecskemét, Hongrie).

Modèles et instruments.

Collection Wiener. — La collection de modèles construits par M. le prof. Wiener en vue de son enseignement de géométrie descriptive à l'Ecole technique de Darmstadt va être éditée par la maison Teubner à Leipzig; elle sera complétée, au fur et à mesure des besoins, par de nouvelles séries qui seront également établies sous la direction de M. H. Wiener.

CHRONIQUE

Un essai de réforme des études moyennes classiques en Italie.

1. — Le Lycée-Gymnase en Italie est l'école *classique*, celle qui donne au jeune homme la culture moyenne nécessaire pour le préparer à la vie de l'esprit, et pour lui donner les connaissances qui le rendront capable de suivre avec fruit les cours des facultés universitaires. Ces connaissances ont été établies indépendamment de la profession que l'élève chosira ou des études auxquelles il voudra se consacrer : en effet le diplôme que l'on donne aux jeunes gens à la fin du Lycée *(licenza liceale)* leur ouvre la porte de toutes les facultés de l'université et des autres écoles supérieures même militaires.

Bornons-nous aux degrés supérieurs de l'école classique, c'est à dire à la 4[me] et à la 5[me] du Gymnase (supérieur) et aux classes 1[er], 2[me] et 3[me], du Lycée. On y apprend les branches suivantes : langues et littératures italienne, latine et grecque ; histoire et géographie ; philosophie, (seulement au Lycée) ; mathématiques ; chimie et physique (Lycée) ; sciences naturelles ; langue française (seulement au Gymnase).

Jusqu'à 1904 ces disciplines étaient obligatoires *pour tous les élèves* sans distinction : de sorte qu'elles étaient officiellement reconnues nécessaires pour la culture moyenne d'un jeune homme, du moins avec l'extension indiquée dans les programmes. Nous nous occuperons ici particulièrement des mathématiques ; elles étaient enseignées d'après un programme que l'on peut résumer comme suit :

Gymnase supérieur. — Arithmétique rationnelle. — Géométrie plane : généralités, égalité des figures, quelques notions sur l'équivalence.

Lycée. — Algèbre jusqu'aux équations du 2[me] degré et les équations biquadratiques, progressions et logarithmes. — Géométrie plane et solide : égalité, équivalence, similitude, mesure. — Trigonométrie plane. — Compléments d'Arithmétique rationnelle (nombres premiers, nombres irrationnels, fractions périodiques).

Par un décret du 11 Novembre 1904 le Ministre de l'instruction publique M. Orlando, introduisit dans les programmes un changement essentiel ; car il déclara que l'élève ne doit plus être forcé de suivre tous les cours jusqu'à la fin du Lycée, mais seulement jusqu'à la fin de la 1re année, et qu'au commencement de la 2me année, il aura le droit de choisir entre l'étude du grec et celle des mathématiques. L'élève qui choisira le grec n'aura plus, en 2me et 3me, aucun enseignement de mathématiques : celui qui choisira les mathématiques n'aura que quelques leçons d'histoire de la culture grecque. Il va sans dire que pour pouvoir être inscrit aux Facultés scientifiques, l'élève doit avoir choisi les mathématiques, et pour la Faculté littéraire-philosophique il est nécessaire d'avoir reçu la licence avec le grec ; pour les autres Facultés il est indifférent d'avoir la licence avec l'une ou l'autre des deux disciplines.

Afin que les jeunes élèves du Lycée puissent suivre avec fruit les leçons de physique 2me et 3me années , on a dû augmenter les programmes de mathématiques de la 1re année : et on a aussi augmenté les programmes des autres deux cours, qui sont réservés aux élèves candidats aux Facultés scientifiques. Ainsi on a seulement ajouté aux programmes du Gymnase supérieur les nombres premiers et les proportions en Arithmétique, et l'équivalence des figures planes en Géométrie : quant au Lycée, voilà, en abrégé, les *nouveaux programmes* :

1re Lycée mathématiques obligatoires pour tous les élèves .

Algèbre. — Calcul littéral. Equations du 1er degré à une inconnue. Système de deux équations de 1er degré à deux inconnues. Notions sur les radicaux. Détermination de la formule de résolution de l'équation au 2me degré à une inconnue. Progressions. Logarithmes théorie .

Géométrie. — Relations de positions, égalité pour les figures solides. Proportionnalité et similitude en géométrie plane. Mesure : théorie et application à la géométrie plane. Règles pratiques pour la mesure des surfaces non planes et des solides.

Trigonométrie. — Définitions et variations des fonctions trigonométriques : leurs relations principales.

2me et 3me Lycée. — Mathématiques facultatives .

Arithmétique et Algèbre. — Radicaux. Equations du 2me degré ou réductibles au 2me degré. Binôme de Newton. Equation exponentielles et logarithmes. Nombres irrationaux et opérations relatives. Compléments sur les nombres premiers et sur la divisibilité. Notions sur l'analyse indéterminée du 1er degré.

Géométrie. — Equivalence et similitude des solides. Théorie de la mesure des surfaces non planes et des solides. Applications de l'algèbre à la géométrie.

Trigonométrie. Addition, multiplication, division des arcs. Re-

solution des triangles rectilignes. Formules de trigonométrie sphérique. Résolution des triangles sphériques.

Comme l'on voit, il y a une réduction sensible des programmes pour l'ensemble des élèves, et une augmentation pour ceux qui choisissent les mathématiques ; mais la réduction totale des programmes obligatoires a forcé le ministre à condenser dans celui de la 1re année bien des matières pour lesquelles le temps nécessaire à leur étude fera absolument défaut dans les quatre heures par semaine destinées aux Mathématiques en 1re, et dont la difficulté est trop grande pour la généralité des élèves à cause de la préparation relativement insuffisante qu'ils ont au Gymnase. Ce programme très condensé est condamné sans doute dans la pratique à être exposé seulement en partie, ou à être réduit, dans plusieurs de ses rubriques, à une énumération de règles et de propriétés avec le sacrifice de ce caractère scientifique et rationnel qui devrait toujours être conservé dans l'enseignement d'une école classique.

Tout cela pour ce qui a rapport aux mathématiques, envisagées comme une discipline isolée.

Mais on voit facilement que le décret du Ministre Orlando a des défauts encore plus graves, si on le considère par rapport au Lycée, comme école de culture générale. Car si le Lycée a pour but de former le jeune homme, on y doit apprendre les disciplines qui sont jugées nécessaires et suffisantes à ce but, pas une de plus ou de moins ; permettre qu'un seul élève choisisse entre deux disciplines, revient à déclarer que ni l'une ni l'autre ne sont nécessaires à ce but. Et puisqu'on a mis le pied sur le chemin glissant du *choix* permis aux élèves, on ne tardera pas à le parcourir en entier en accordant aux futurs étudiants en médecine de laisser le grec et les mathématiques, et permettant aux étudiants en droit de laisser de côté, en plus du grec et des mathématiques, la physique, les sciences naturelles etc.. De plus on impose le choix entre deux disciplines à des jeunes gens trop peu âgés pour pouvoir choisir sans obéir à des préoccupations complètement étrangères, opposées à celles qui devraient les guider; d'autant plus qu'ils ne connaissent encore que des notions trop élémentaires des disciplines entre lesquelles ils doivent choisir.

Et encore pourquoi inscrire parmi les disciplines facultatives les mathématiques, dont personne n'ignore le rôle hautement éducatif et l'influence heureuse qu'elles ont sur le caractère ? Les difficultés que l'on trouve dans leur étude (étude qui, on doit l'affirmer avec insistance, est cependant possible à tout esprit juvénile dans les bornes qu'on lui assigne dans les écoles moyennes) indiquent quelle est la tâche de ces sciences dans l'école : montrer au jeune homme que « *vouloir c'est pouvoir* ». Rendre

libre de ne point les étudier celui qui, très souvent à cause de sa mauvaise volonté, les juge difficiles, c'est lui épargner une belle occasion d'apprendre à lutter contre les obstacles de la vie.

2. — Ces considérations, et d'autres encore que je laisse de côté, ont créé parmi les professeurs italiens une sorte d'agitation, et plusieurs d'entre eux ont fait connaître leur opinion soit par des articles de journaux, soit par des lettres adressées à M. le Ministre. C'est ce qu'ont fait aussi quelques-unes des associations de professeurs.

Parmi ces dernières je signale, à cause de son importance technique et de son rôle dans la question dont je parle, l'association « *Mathesis* », qui, comme on sait, vise l'amélioration de l'école et des méthodes d'enseignement au point de vue des mathématiques, et qui, autrefois avait vu les conclusions de ses études accueillies par le Ministre dans une réforme des programmes.

Sa dernière manifestation a été une importante séance, tenue à Milan les 21 et 22 Avril 1905, et à laquelle les professeurs de l'Italie du Nord ont été invités. Le but de la séance était l'examen et la discussion des questions suivantes:

« I. Conséquences de la faculté de supprimer l'étude des mathé-
« matiques en 2me et 3me du Lycée, pour l'éducation intellectuelle et
« morale des jeunes gens. A-t-on réalisé cette réforme de sorte à
« en obtenir les avantages que le Ministre Orlando en attendait? »

« II. Sur les nouveaux programmes de mathématiques pour le
« 4me et 5me du Gymnase et pour la 1re du Lycée, c'est-à-dire *pro-*
« *gramme obligatoire* ».

« III. Sur les nouveaux programmes de mathématiques pour les
« 2me et 3me du Lycée, c'est-à-dire: *programme facultatif* ».

Un nombre considérable de professeurs d'écoles moyennes et d'universités ont été présents et ont pris part à la discussion, présidée par le Professeur Pascal, de l'université de Pavie. Ils ont adopté, à l'unanimité, les *résolutions* suivantes:

I. Les professeurs de mathématiques du Nord de l'Italie, réunis à Milan le 21 Avril 1905 pour discuter *les conditions que les récentes dispositions du Ministre ont fait à l'enseignement des mathématiques dans les écoles classiques*,

N'admettant pas qu'un jeune homme sain d'esprit puisse avoir une prédestination naturelle à ne point apprendre une quelconque des disciplines qui sont la base de la culture générale classique, et, par conséquent, jugeant faux et dangereux le principe sur lequel s'appuie la dernière réforme de l'école classique;

En considérant que l'étude des mathématiques est nécessaire, à cause de sa fonction hautement éducative de l'intelligence, comme complément de la culture donnée par les études littéraires et à cause aussi de l'application toujours croissante qu'elles

reçoivent aux sciences naturelles, économiques, sociales et philosophiques;

En considérant aussi que pour la plupart des jeunes gens le choix du grec ou des mathématiques serait très souvent déterminé par des circonstances accidentelles (par exemple par le degré de sévérité des professeurs respectifs) plutôt que par une aversion innée pour l'une ou pour l'autre des deux disciplines;

Déclarent que la dite réforme, si elle reste acquise au Lycée, amoindrira l'importance et plus encore, anéantira presque l'influence de deux disciplines, qui sont fondamentales et en elles-mêmes et pour une constante tradition italienne, au grand préjudice de l'éducation nationale.

Et enfin *se plaignent* que l'on ait réalisé une réforme aussi importante sans avoir préalablement questionné en général les personnes compétentes et malgré les délibérations plusieurs fois prises par l'Association Mathesis.

II. La réunion juge qu'un seul progamme de mathématiques élémentaires rationnelles... doit être obligatoire pour tous les élèves et pour toutes les classes du Lycée...

III. Pour ce qui est d'une transformation générale de l'école moyenne, que l'on annonce prochaine, l'assemblée exprime le vœu que cette école soit divisée en deux périodes quadriennales: et que la deuxième période soit exclusivement réservée — pour tous les quatre cours et pour tous les élèves — au développement des éléments de mathématiques rationnelles, avec un seul professeur.

IV. La réunion, après avoir mis en relief les défauts des programmes actuels pour les mathématiques dans les écoles classiques, juge qu'il serait utile de préparer de nouveaux programmes pour la partie des mathématiques obligatoires.

3. — Le Professeur Pascal prononça le *discours de clôture* dont je tiens à reproduire ici un passage:

« .... Vous deviez protester, et vous l'avez fait: protester contre
« la faute d'un ministre qui..... n'a pas hésité de porter une atteinte
« si grave à toute la culture nationale; car..... c'est frapper les ra-
« cines mêmes de la culture que de frapper la science qui de la
« culture et de l'éducation nationales est la base la plus solide, la
« plus pure, la plus durable, la science dont la plus grande im-
« portance réside moins dans ce qu'elle apprend que dans la mé-
« thode qu'elle emploie, et par conséquent dans l'atitude que
« l'esprit de l'élève prend grâce à elle et dans l'habitude qu'il en
« acquiert et qu'il conservera pendant toute sa vie. »

4. — La séance fut suivie d'une intéressante conférence du Professeur G. Loria, de l'Université de Gênes, intitulée: *Programmes du passé et programmes pour l'avenir*. En voici un résumé.

Si c'est un professeur universitaire qui parle dans une réunion de professeurs secondaires, il n'y a là rien de choquant : les diverses disciplines mathématiques sont enchaînées entre elles, et celui qui en professe une ne peut pas se désintéresser des autres.

L'orateur ne nie pas que l'on ait obtenu dans ces dernières années des améliorations même sensibles dans les méthodes d'exposition de quelques matières des mathématiques : et il cite comme exemple les fondements de la Géométrie, la théorie de l'équivalence géométrique, celle des nombres irrationnels, la fusion de la planimétrie avec la stéréométrie. Mais il observe que c'est le plan général des études mathématiques dans les écoles moyennes qui n'a pas changé, car presque toujours les modifications aux programmes consistent en des changements d'ordre, ou bien en des adjonctions ou des suppressions.

Le plan selon lequel on apprend la géométrie, particulièrement dans les Lycées, est encore, substantiellement, celui des *Eléments* d'Euclide, excellent pour le temps dans lequel il a été conçu et apte pour faire connaître les ouvrages des grands géomètres de l'antiquité ; mais ce n'est certes pas là le but que doit avoir l'enseignement de la géométrie dans les écoles moyennes de notre siècle. Le jeune homme qui passe du Lycée à nos facultés mathématiques se trouve dans un champ tout à fait nouveau, et presque imprévu.

Ces conditions ont quelque peu changé de nos jours, beaucoup plus, cependant, pour la valeur des professeurs que pour la bonté des programmes ; mais elles persistent encore, et peut-être une des causes en est la nature même des mathématiques dans lesquelles il n'y a de nouvelle conquête qui puisse effacer une seule des vérités déjà acquises à la science, et une autre cause est l'enthousiasme que les Italiens ont toujours pour tout ce qui est classique.

Pour modifier l'enseignement dans le sens voulu par l'orateur, il faut introduire dans l'enseignement moyen quelques idées générales, qui sont fondamentales dans les cours supérieurs : celles de *fonction*, de *correspondance* ou *représentation*, de *transformation*, peut-être même celle de *groupe* d'opérations et de transformations ; on jeterait ainsi une grande lumière sur plusieurs chapitres des mathématiques, et on pourrait à la fois rendre ces sciences moins arides pour les élèves.

On pourrait de plus faire descendre quelques théories, aujourd'hui jugées supérieures, jusqu'à l'enseignement secondaire, par exemple les éléments de la géométrie analytique et de la géométrie descriptive, utiles, celle-ci dans la géométrie solide, celle-là dans la géométrie plane : car ces éléments, les exemples n'en font pas défaut, peuvent facilement être condensés en peu de leçons pas trop difficiles. C'est ainsi qu'on fait dans d'autres pays.

Comme les autres sciences, les mathématiques aussi marchent; ce qui était *supérieur mais accessoire* un temps, est aujourd'hui élémentaire et fondamental. En France on a déjà introduit dans l'enseignement moyen les éléments du calcul infinitésimal. Au reste les idées fondamentales de ce calcul, qui sont celles de *limite* et *d'infini*, se retrouvent, visibles ou cachées, aussi dans bien des questions de mathématiques élémentaires. Quand la géométrie analytique et le calcul infinitésimal auront, du moins en partie, pénétrés dans les écoles moyennes, les écoles supérieures pourront bien autrement qu'à présent jouer leur rôle.

On peut faire l'objection que les progammes de mathématiques sont déjà assez vastes, et que, en comparaison des heures qu'on leur assigne, on ne peut guère penser à les augmenter. L'orateur répond qu'on pourrait réduire de beaucoup les programmes actuels. On pourrait supprimer la séparation trop absolue entre l'algèbre et la géométrie: laisser de côté quelques questions qui, aujourd'hui, n'ont plus raison d'existence, par exemple les proportions, avec leur suite de règles variées: on peut dire de même de quelques chapitres dont l'utilité pratique ou logique est discutable, par exemple l'analyse indéterminée du 1er degré, ou qui sont inutilement compliqués en les traitant élémentairement, comme les maxima et minima, la détermination de la valeur de certaines formes indéterminées, la théorie des sections coniques.

L'orateur, en terminant, observe que les modifications qu'il a indiquées n'accroîtront pas, selon lui, la difficulté de l'étude des mathématiques élémentaires : et que, au reste, si la difficulté en réalité dût augmenter, il y aurait un véritable avantage, car elle servirait à diminuer le nombre des jeunes gens qui parcourent le chemin des études, sans y être naturellement inclinés.

Turin, 2 août 1905.

Rodolphe Bettazzi (Turin).

Les mathématiques au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, tenu à Cherbourg en août 1905.

Le Congrès s'est ouvert le 3 août sous la présidence de M. A. Giard, Membre de l'Institut, assisté du Maire de Cherbourg et de M. le Dr Gariel, Secrétaire général de l'Association. Il est hors du programme de *L'Enseignement Mathématique* de résumer le Discours de M. Giard; nous dirons seulement que c'est un savant aperçu de l'influence de la théorie de l'évolution sur les progrès accomplis en Histoire Naturelle depuis un siècle.

Les travaux des sections I et II, celles des Mathématiques, de la Géodésie et de la Mécanique, furent ouverts par un beau Discours

de M. P. Appell, Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, sur les difficultés que présentent quelques questions de la Mécanique rationnelle, en restant, afin de pouvoir se rapprocher des applications, sur le terrain de la mécanique classique créée par Galilée et Newton. M. Appell a montré d'abord que des théories exactes peuvent être mal interprétées si on ne les précise pas par des expériences : en prenant la méthode par la photographie instantanée, imaginée par Marey, pour étudier les mouvements des animaux, il a montré que les discussions relatives au chat qui, abandonné d'une certaine hauteur les pattes en l'air, arrive au sol sur ses pattes, provenaient du manque de précision du mot retourner: le chat ne se retourne pas tout d'une pièce, mais il exerce pendant la chute une suite de déformations et de contorsions conformes à la loi des aires. L'orateur pense que, si les expériences de M. et Mme Curie sur le radium paraissent apporter une dérogation au principe de la conservation de l'énergie, ces dérogations ne sont qu'apparentes et regarde comme probable qu'on ne tardera pas à le prouver. Le savant analyste rappelle que les équations de la mécanique rationnelle, résultant des travaux de D'Alembert et de Lagrange, considérés pendant longtemps comme inattaquables, ont été mises en défaut en 1872 par le mathématicien anglais Ferrers, qui a pris comme exemple le mouvement d'un cerceau sur un plan ; il s'ensuit que les équations précédentes ne peuvent être employées que dans les cas où l'on peut négliger les dérivées secondes des paramètres, leurs carrés et leurs produits ; d'ailleurs, en 1905, M. Philip E. B. Jourdain a proposé d'autres équations contenant ces dérivées et paraissant devoir rendre service en physique mathématique. M. Appell fait ensuite l'historique du problème fondamental de la Mécanique Céleste ; il rappelle que les méthodes approximatives employées par Laplace pour résoudre le problème des trois corps manquent de rigueur ; il signale les méthodes nouvelles, puissantes et rigoureuses exposées par M. H. Poincaré dans son Mémoire couronné, ainsi que l'exposé que cet éminent géomètre a fait dans les trois volumes de son Traité sur les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste. Ce Discours s'est terminé par des considérations sur l'importante question du frottement : les récents perfectionnements apportés à la théorie, pour la mettre en rapport avec la réalité, sont nettement indiqués par le savant géomètre qui vient de tenir un nombreux auditoire sous le charme de sa parole convaincante.

Le président des Sections I et II était M. Maurice d'Ocagne ; furent élus vice-présidents MM. Clark, professeur à l'Ecole polytechnique du Caire, et Ernest Lebon ; secrétaire M. Clapier, professeur agrégé de mathématiques au Lycée de Cherbourg. Les Communications faites en séance répondent toutes au but que

poursuit l'Association : faire connaître des perfectionnements applicables dans l'Astronomie, l'Industrie, l'art de l'ingénieur et l'enseignement. Je regrette, pour quelques-unes, de ne pouvoir donner que le titre, les Auteurs ayant été absents.

M. Clark a montré qu'il est très important pour l'analyse de préciser exactement, quand un discriminant s'évanouit, la nature de ses facteurs qui correspondent à une singularité particulière de la fonction. Le théorème qu'il a établi peut être pris comme base de l'étude des singularités algébriques et géométriques ; en particulier, il est applicable à la recherche des solutions singulières des équations différentielles.

M. Maurice d'Ocagne a fait connaître des développements nouveaux de la méthode nomographique des points alignés et en a donné des applications très utiles, après avoir montré les progrès qu'il a fait faire à la construction des abaques, la nature des problèmes algébriques auxquels elle peut s'appliquer, les applications techniques actuelles, notamment à l'art de l'ingénieur et à l'art nautique.

M. le L[t] de vaisseau Perret, directeur de l'Observatoire de la Marine à Lorient, a exposé l'application générale aux calculs nautiques de la méthode des points alignés (nomographie, construction des abaques). Les nomogrammes à trois variables servent à trouver la parallaxe en hauteur des planètes et de la Lune ; les nomogrammes à quatre variables sont appliqués notamment à la navigation par l'arc de grand cercle et aux prédictions des occultations.

M. Maurice d'Ocagne a indiqué un procédé cinématique pour déterminer le rayon de courbure en un point d'une ligne sphérique définie par une relation entre la longitude et la latitude et l'a appliqué à la loxodromie.

M. Hébert, de Rennes, a montré comment on peut déterminer les surfaces développées des quadriques, en entrant dans quelques détails relatifs aux quadriques à centre, aux paraboloïdes elliptique et hyperbolique, aux quadriques de révolution. Son travail est une mine d'exercices intéressants de géométrie analytique pour les classes de l'enseignement secondaire.

M. Gardès, de Montauban, présente quelques remarques relatives à l'utilité d'une méthode unique dans l'enseignement des théories de la division et de la racine carrée. Il montre que l'on arrive aisément à obtenir un parallélisme complet de raisonnements pour la division et la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre.

M. Tarry, de Paris, dans un Mémoire ayant pour titre *Construction des carrés magiques pour les trois premiers degrés*, démontre que les propriétés du transformateur cabalistique, exposées par lui au Congrès de Grenoble en 1904, permettent de transformer en carré trimagique un carré magique à quartiers bimagiques, cons-

truit ce dernier carré avec la base 16 et en déduit le carré trimagique de base 128.

M. Ernest Lebon communique une suite de ses recherches *sur le nombre des nombres premiers de 1 à N*. En s'appuyant sur des propriétés non encore signalées de certaines progressions arithmétiques, il arrive à établir une formule générale nouvelle pour résoudre exactement et assez rapidement le problème précédent. Il est ainsi conduit à calculer des nombres qui, rangés dans un certain ordre, forment une Table permettant de reconnaître rapidement si un nombre est premier.

M. Gabriel Arnoux : *Les espaces arithmétiques à côtés premiers inégaux*.

M. Auricoste : *Sur un nouvel appareil enregistreur*.

M. A. Cabreira : *Sur la théorie des nombres. Sur les nombres polygonaux*.

MM. Claude et Auricoste : *Sur un nouveau dispositif de pendule astronomique*.

M. Fontaneau : *Préliminaires d'hydraulique ; applications*.

MM. Favé et Rollet de l'Isle : *Sur l'emploi des aérostats en hydrographie*.

M. Lebeuf : *Sur les essais des chronomètres*.

M. Pesci : *Sur l'application de la nomographie à l'art de la navigation*.

Dans l'une des séances, M. Clapier a proposé l'étude en 1906 des questions ayant pour titres : 1° Sur les nouvelles méthodes d'enseignement des sciences dans les lycées et collèges ; 2° sur les historiens des mathématiques depuis Montucla jusqu'à Maximilien Marie ; 3° sur la géographie mathématique (forme de la terre, tourbillons dans les rivières, séismes et déformations de la croûte terrestre).

Enfin, un certain nombre de congressistes ont exprimé le désir que les mémoires fussent présentés par les auteurs eux-mêmes ou par un délégué qui aurait pu s'en assimiler la substance ; que les Auteurs de ces mémoires indiquent les travaux antérieurs et insistent sur le perfectionnement qu'ils apportent aux méthodes de connues.

L'Association avait organisé des excursions qui, sous l'attentive direction de M. le secrétaire général Gariel, ont pleinement réussi : les congressistes ont visité la contrée de Saint-Vaast-la-Hougue, les laboratoires de zoologie de l'île de Tatihou, dont la belle installation leur fut expliquée par le directeur, M. Edmond Perrier, Membre de l'Institut ; la falaise et les grottes du Nez de Jobourg ; les îles de Guernesey et de Sercq.

Ernest Lebon (Paris).

Le Congrès espérantiste de Boulogne-sur-Mer ; 5—11 août, 1905.

Que de savants ne se sont-ils pas mis à douter de l'utilité des congrès internationaux, parce que la diversité des langues les a empêchés de suivre certaines communications d'un grand intérêt ou d'échanger leurs vues avec quelques collègues d'autres pays. Ces doutes étaient du reste justifiés tant qu'il n'existait pas de langue auxiliaire internationale d'un emploi pratique ; mais ils ne tarderont pas à se dissiper après des expériences aussi concluantes que celles qui viennent de se faire à Boulogne-sur-Mer. En effet, pendant une semaine environ 1500 personnes de dix-huit nationalités différentes, et de toutes conditions sociales et intellectuelles, ont pu délibérer, voter, discourir, entendre des communications, des déclamations et des pièces de théâtres, tout cela sans l'aide d'un autre idiome que la géniale création du D[r] ZAMENHOF : la langue auxiliaire internationale Esperanto.

Ce premier congrès est donc pour les espérantistes un gros succès, car leur langue avait beau compter parmi ses partisans des savants tels que MAX MÜLLER, BERTHELOT, POINCARÉ, RAMSAY, on n'en répétait pas moins que chaque peuple prononcerait l'Esperanto à sa manière et que jamais on ne se comprendrait. Or le Congrès de Boulogne anéantit cette objection, puisque la prononciation des congressistes était si uniforme qu'on ne pouvait, la plupart du temps, reconnaître leur nationalité.

A côté de ce fait, qui n'est certes pas de moindre importance, le Congrès de Boulogne a eu cependant d'autres résultats pratiques. Sous la présidence d'honneur du D[r] ZAMENHOF et sous la présidence effective de M. BOIRAC, recteur de l'Université de Dijon, assisté du général SÉBERT, de l'Institut, et d'un délégué de chaque pays, le congrès a institué une sorte d'Académie provisoire chargée de veiller à la régulière évolution de la langue. Les sciences y sont représentées par plusieurs savants parmi lesquels figure un mathématicien, M. C. BOURLET. Il a en outre adopté une déclaration du D[r] Zamenhof tendant à expliquer le but des espérantistes, qui présentent leur langue uniquement comme *auxiliaire*, comme *idiome secondaire* d'échanges et de relations entre peuples différents. On a exprimé le vœu que le prochain congrès eût lieu en Suisse.

Prix Bolyai fondé par l'Académie Hongroise des Sciences.

A l'occasion du centième anniversaire de la naissance de Jean Bolyai, l'Académie Hongroise des Sciences voulant perpétuer le souvenir de cet illustre savant, ainsi que celui du profond penseur que fut Farkas Bolyai son père et son maître, décide de fonder un prix, qui portera le nom de *Prix Bolyai*. Ce prix consistera

en une médaille commémorative et en une somme de dix mille couronnes ; il sera décerné pour la première fois en 1905, puis de 5 en 5 ans à l'auteur du meilleur ouvrage de mathématiques paru au cours des 5 années précédentes. Le prix pourra être décerné à tout ouvrage qui en sera jugé digne, quelle que soit la langue dans laquelle il aura été rédigé, et quelle que soit la forme sous laquelle il aura été publié. La nomination du Lauréat aura lieu au cours de l'Assemblée générale de l'Académie au mois de décembre. Dans le cas où l'ouvrage d'un auteur décédé serait reconnu digne du prix, celui-ci sera attribué à ses héritiers.

Circolo matematico di Palermo.

Fondé en 1884, le *Circolo matematico di Palermo* n'a pas tardé à réunir la plupart des mathématiciens italiens et à constituer en quelque sorte la société mathématique d'Italie. Il est aujourd'hui en pleine prospérité ; son effectif se compose de 255 membres (au 26 mars 1905), parmi lesquels figurent 81 savants étrangers. Le Cercle publie un périodique, dirigé par M. le prof. Guccia, et intitulé *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*. Les *Rendiconti* forment chaque année un volume d'environ 300 pages et figurent dans presque toutes les bibliothèques scientifiques à côté des grands journaux mathématiques.

La société publie en outre, un *Annuaire*. Celui de 1905 contient, à côté des statuts et renseignements divers concernant le *Circolo*, 1° une liste détaillée des membres, avec lieu et date de naissance, titres, fonctions officielles et adresse ; 2° la liste des mémoires et communications insérés dans les vingt premiers volumes des *Rendiconti*.

Rappelons qu'à l'occasion du IVme Congrès international des mathématiciens, qui se tiendra à Rome en 1908, le *Circolo* décernera un prix international de Géométrie à un mémoire qui fera faire un progrès essentiel à la théorie des courbes gauches algébriques. Ce prix, qui sera appelé « Médaille Guccia » (du nom de son fondateur), consistera en une petite médaille en or et en une somme de 3,000 francs. (Voir *L'Ens. math.* du 15 janvier 1905, p. 59-60).

Nominations et distinctions.

M. A. Blumenthal, priv.-doc. à l'Université de Göttingue, est nommé professeur à l'École technique supérieure d'Aix-la-Chapelle.

M. G.-A. Bliss, prof. à l'Université de Missouri, est nommé prof. adj. à l'Université de Princeton.

M. W.-E. Brooke est nommé prof. extraord. de mathématiques appliquées à l'Université de Minnesota.

M. E. Brown, prof. à l'Université de Liverpool, est nommé prof. extraord. à l'Université Mc Gill.

M. J.-E. Campbell, prof. à l'Université d'Oxford, est nommé membre de la Royal Society de Londres.

M. R.-H. Curtiss, de l'observatoire Lick, est nommé prof. extraord. d'Astronomie à l'Université de Western, Pensylvanie.

M. W.-B. Fite, est nommé prof. extraord. de mathématiques à l'Université Cornell, à Ithaca, New-York.

M. A. Gutzmer, prof. à l'Université de Jena, est nommé prof. à l'Université de Halle.

M. R. Haussener, prof. à l'Ecole technique supérieure de Karlsruhe, est nommé prof. à l'Université de Jéna.

M. S. Heffter, prof. à l'Ecole technique supérieure d'Aix-la-Chapelle, est nommé prof. à l'Université de Kiel.

M. E.-V. Huntington est nommé prof. extraord. à l'Université Harvard (Cambridge, Mass.).

M. Ch. Méray, prof. à la Faculté des sciences de Dijon, est admis à la retraite et nommé prof. honoraire.

N. Tumlirz, prof. à l'Université de Czernowitz, est nommé prof. de physique mathématique à l'Université d'Innsbruck.

M. Whittaker, prof. à l'Université de Cambridge, est nommé membre de la Royal Society de Londres.

Sont nommés maîtres de conférences de mathématiques : MM. Autonne, à l'Université de Lyon ; Bourget, à l'Université de Toulouse ; Clairin, à l'Université de Lille ; Dulac, à l'Université de Grenoble ; Esclangon, à l'Université de Bordeaux ; Lebesgue, à l'Université de Rennes.

NOTES ET DOCUMENTS

Sous ce titre nous publions des renseignements relatifs à l'organisation de l'enseignement : créations nouvelles, programmes et règlements d'un intérêt général, liste des cours des principales Universités et Ecoles supérieures, etc. La Rédaction.

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1905-1906.

ALLEMAGNE

Berlin ; *Universität.* — Schwarz : Analyt. Geom. 4 ; math. Coll. 1, Th. d. analyt. Funktionen, 4 ; Anwendgn. der ellipt. Funktionen, 2. — Schur : Diff. rechn., 4 ; Uebgn. dazu ; Th. d. Irrationalzahlen, 1. — Lehmann-Filhés : In-

tegralrechn., 4, Uebg. 1. — KNOBLAUCH : Angenäherte Berechnung best. Integrale 1 : Th. d. ellipt. Funktionen, 4 ; Analyt. Mechanik, 4. — LANDAU : Algebra, 4. — FROBENIUS : Zahlentheorie, 4. — HETTNER : Ueber unendl. Reihen, Produkte u. Kettenbrüche, 2. — SCHOTTKY : Th. d. Abelschen Funktionen, 4 ; Potentialth. in der Ebene, 2. — SCHWARZ, FROBENIUS u. SCHOTTKY : Uebgn. des mathem. Seminar.

FŒRSTER : Geschichte d. neueren Astronomie, 2 ; fundamental Ausgleichung von Zeit u. Raummessung, 2. — MARCUSE : Allgemeine Himmelskunde, 1 1/2 ; Th. u Praxis der Ortsbestimmungen mit Uebgn., 2 ; Colloquium, 1 1/2. — BAUSCHINGER : Einl. in die Mechanik des Himmels, 3 ; Sem 1. — STRUVE : Einf. in die Th. der Bewegung der Satelliten 3 ; Astron. Uebgn. 1. — HELMERT : Methode der kleinsten Quadrate 1 ; Schwerkraft u. Gestalt der Erde 1. — FŒRSTER, STRUVE u. BAUSCHINGER : Sem. zur Ausbildung im wissensch. Rechnen.

Breslau ; *Universität.* — ROSANES : Elem. der Determinantentheorie, 2 ; neuere Methoden der analyt. Geometrie, 3 ; Uebgn. des math.-phys. Seminars, 1 g. — STURM : Uebgn. des math.-phys. Seminars, 2 g ; Th. der geometrischen Verwandschaften, Teil II, 4 ; Liniengeometrie, 2. KNESER : Seminarübungen für Vorgeschrittene, 1 g ; Differential- und Integralrechnung mit Uebgn., 5 ; Funktionentheorie, 3. — FRANZ : Uebgn. in Bahn- und Störungsrechnung, 1 g ; Elem. der praktischen Astronomie, 2 ; Bahnstörungsrechnung mit einer Einleitung über Interpolation und mechanische Quadratur, 3 ; Geschichte der astronomischen Entdeckungen, für Hörer aller Fakultäten, 1. — LANDSBERG : Algebraische Uebgn., 2 ; Th. d. Gleichungen, 4 ; Einleitung in die Theorie der algebraischen Funktionen, 2.

Freiburg i. B. ; *Universität.* — LÜROTH : Analyt. Geometrie der Ebene und Differentialrechnung, 5 ; Variationsrechnung, 3 ; Seminar, 1. — STICKELBERGER : Th. der Differentialgleichungen, 4 ; Elem. der Zahlentheorie, 2 — KÖNIGSBERGER : Elem. der partiellen Differentialgleichungen, 3. — LŒWY : Algebraische Analysis, 4 ; Einführung in die Versicherungsmathematik, 2 ; Uebgn. im math. Seminar.

Gœttingen ; *Universität.* — RIECKE : Ausgew. Probleme der Wellenlehre, 1. — KLEIN : Proj. Geometrie (mit Nichteuklidischer Geometrie) 4 ; Mathemat. Seminar : Elektrotechnik. — HILBERT : Mechanik, 4 ; Partielle Differentialgleichungen, 2 ; Uebungen über die Th. der Differentialgleichgn. (mit Prof MINKOWSKY), 2. — SCHWARZSCHILD : Mechanik des Himmels, II, 3 ; Astron. Kolloquium, 1. — MINKOWSKI : Zahlentheorie, 4 ; Algebr. Kurven und Flächen, 2 ; Uebungen über die Differentialgleichgn., 2. — C. RUNGE : Differential- und Integralrechnung II. Teil, 3 ; Uebungen zur Differential- und Integralrechnung, 3 ; Graphische Methoden der Mechanik u. Physik, 3 ; Mathem. Seminar : Elektrotechnik, 2. — BRENDEL : Versicherungsmathematik : Uebungen zur Versicherungsrechnung für Nationalökonomen und Juristen und Vorträge der Mitglieder, 2. — AMBRONN : Theorie und Bau der astron. Instrumente, 3 ; Uebungen im astron. Beobachten für Anfänger, 3 ; Uebungen an den Instrumenten der Sternwarte täglich ; Ueber Gradmessungen, 1. — PRANDTL : Elektrotechnisches Seminar, 2. — ZERMELO : Funktionen reeller Variablen, 3. — ABRAHAM : Maxwell'sche Theorie und Hertz'sche Schwingungen, 3. BLUMENTHAL : Flächentheorie, 3. — BOSE : Einführung in die mathem. Behandlung der Naturwissenschaften, 3. — HERGLOTZ : Ueber Minimalflächen, 2. — CARATHÉODORY : Kontinuierliche Gruppen, 3

Greifswald; *Universität.* — Thomé : Potentialfunktion, 4 ; Variationsrechnung, 2 g ; Math. Seminar, 2 g. — Engel : Analyt. Mechanik I, 4 ; Algebra, 4 ; Differentialgleichungen u. Transformationsgruppen, 2 g ; Math. Seminar, 2 g. — Vahlen : Differentialrechnung, 4 ; Wahrscheinlichkeits u. Ausgleichungsrechnung, 2 ; Uebgn. zur Differentialrechnung, 1 g.

Halle; *Universität.* — Cantor : Th. der analyt. Funktionen, 4 ; Uebgn. des math. Seminars, alle 14 Tage 2 priv. u. g. — Wangerin : Th. des Potentials und der Kugelfunktionen, 4 ; Anwendungen der elliptischen Funktionen, 2 ; Uebgn. des math. Seminars, alle 14 Tage, 2 priv. u. g. — Gutzmer : Analyt. Mechanik, 4 ; Th. u. Anwendung der Determinanten. 2 ; Uebgn. des math. Seminars in noch zu bestimmenden Stunden, priv. u. g. — Eberhard : Uebgn. zur Integralrechnung, 1 g ; Integralrechnung, 4. — Buchholz : Grundlagen der astronomischen Bewegungslehre (analytische Störungstheorie), 2 ; Th. der Ausgleichung der Beobachtungsfehler (Methode der kleinsten Quadrate), 1. — Bernstein : Analyt. Geometrie des Raumes, 2 ; Th. der Differentialgleichungen, 2.

Heidelberg; *Universität.* — Kœnigsberger : Analyt. Mechanik, 4 ; Elliptische Funktionen (Fortsetzung der Funktionentheorie), 2 ; Ausgewählte Kapitel der Integralrechnung (Differentialgleichungen, Variationsrechnung), 2 ; Uebgn. im math. Unter- und Oberseminar, 2. — Valentiner : Bahnverbesserung einschliesslich spezielle Störungen, 2. — Moritz Cantor : Differential- und Integralrechnung, 4 ; Uebgn. dazu, 1 g ; Politische Arithmetik, 2. — Kœhler : Analyt. Geometrie des Raumes, 3. — Bœhm : Einführung in die höhere Mathematik, 3 ; Lektüre einer math. Abhandlung. 1. — R. Weber : Vektoranalysis und deren Anwendung in der theoritischen Physik, 1.

Jena; *Universität.* — Thomæ : Elementare Funktionentheorie, 4 ; Analyt. Geometrie des Raumes, 4 ; Seminar, 2 g. — N. N.: Integralrechnung mit Uebgn., 5 ; Th. und Anw. der Determinanten, 2 ; Elem. der Zahlentheorie, 2. — Frege : Analyt. Mechanik, 4 ; Begriffsschrift, 1 g. — Auerbach : Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper, 4 ; Die Entwickelung der Physik seit 100 Jahren, 1. — Knopf : Sphärische Astronomie, 3 ; Wahrscheinlichkeitsrechnung und Methode der kleinsten Quadrate, 3.

Königsberg; *Universität.* — Franz Meyer : Mathem. Seminar, 1 g ; Th. d. algebraischen Gleichg., 4. — Battermann : Allgemeine Astronomie, 1 g ; Sphärische Astronomie, 3. — Saalschütz : Analyt. Geometrie des Raumes, 3 ; Uebgn. dazu, 1 ; Einleitg. in die algebraische Analysis, 4. — Fritz Cohn : Potentialtheorie, 3.

Leipzig; *Universität.* — Neumann : Differential- und Integralrechnung, 4 ; Mathemat. Seminar, 1 g. — Bruns : Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung, 4 ; Seminar für wissenschaftl. Rechnen, 2 g ; Phrakt. Ueb. in der Sternwarte (mit Prof. Peter), g. — A. Mayer : Analyt. Mechanik, 4 ; Ueb. zur analyt. Mechanik, Sonnab., 1 g. — O. Hölder : Elliptische Funktionen, 4 ; Galois'sche Theorie der algebraischen Gleichungen, 2 ; Mathemat. Seminar : Ueb. in Funktionentheorie, 2 g. — Rohn : Analyt. Geometrie des Raumes, 5 ; Ueb. hierzu, 1 g ; Darstellende Geometrie II, 2 ; Ueb. hierzu (mit Prof. Liebmann), 2 ; Seminarist. Ueb., 2 g. — Peter : Th. der geograph.

Ortsbestimmungen, 1 ; Ueb. im Ephemeridenrechnen u. Bahnbestimmen, 1 g ; Prakt. Ueb. in der Sternwarte (mit Prof. Bruns), g. — Hausdorff : Einf. in die Theorie der Transformationsgruppen (nach Sophus Lie), 3. — Liebmann : Potentialtheorie, 2 ; Graphische Statik, 2 ; Ueb. zur darstellenden Geometrie II (mit Prof. Rohn), 2.

Marburg; *Universität.* — Hensel : Algebra, 4 ; Th. der Oberflächen und der Raumkurven, 4 ; Uebgn. des math. Seminares, 2. — Neumann : Funktionentheorie, 4 ; Analyt. Geometrie des Raumes, 2 ; Math. Uebgn. für mittlere Semester, 2. — v. Dalwigk : Statik, 2 ; Angewandte Mathematik : Graphische Statik mit Uebgn., im Anschluss an die Vorlesung über Statik, 2 ; Höhere Fragen aus der Elementarmathematik, 1. — Jung : Integralrechnung, 5.

Strassburg ; *Universität.* — Reye : Analyt. Geometrie des Raumes (neuere Methoden), 3 ; Mathematische Theorie der Elastizität fester Körper, 2 ; Uebgn. des math. Seminars, 2 g. — Becker : Bahnbestimmung der Planeten, Kometen und Meteore, 3 ; Elem. der höheren Geodäsie, 2 ; Seminaristische Uebgn. (Kolloquium), g ; Astronomische Beobachtungen an den Instrumenten der Sternwarte — Weber : Differential- und Integralrechnung, 4 ; Enzyklopädie der Elementar Mathematik, 3 ; Uebgn. des math. Oberseminars, 2 g. — Wislicenus : Geometrische Optik, 1 ; Photometrie des Himmels, 1 ; Gemeinverständliche Erklärung astronomischer Wahrnehmungen, Vorkomnisse und Einrichtungen im täglichen Leben, 1 ; Besprechung der neuesten litterarischen Erscheinungen auf astronomischen Gebiete, 2 g. — Wellstein : Elliptische Integrale, 2 ; Determinanten und Matrizen, 3 ; Uebgn. des math. Unterseminars, 2 ; Uebgn. des math. Oberseminars (gemeinschaftlich mit Weber und Epstein), 2 g. — Timerding : Analyt. Geometrie der Ebene mit Uebgn. 5 ; Graphische Statik mit Uebgn., 4. — Epstein : Neuere Untersuchungen in der Theorie der analyt. Funktionen, 1 ; Uebgn. des math. Oberseminars in Gemeinschaft mit Weber. — Simon : Geschichte d. Mathematik im Alterthum, 2 — Wirtz : Ausg. Kapital d. Himmelsmechanik.

Tübingen ; *Universität.* — V. Brill : Einführung in die höhere Mathematik, 4 ; Th. der algebraischen Kurven, 3 ; Uebgn. im math. Seminar, 2. — V. Stahl : Höhere Analysis II : Integralrechnung, 4 ; Partielle Differentialgleichungen, 3 ; Uebgn. im math. Seminar, 2. — Maurer : Darstellende Geometrie II, 2 ; Uebgn. zur darstellenden Geometrie II, 1 ; Elliptische Funktionen, 2.

Würzburg ; *Universität.* — Prym : Differentialrechnung mit Einleitung in die höhere Analysis, 4 ; Analyt. Geometrie der Ebene I. Teil, 4 ; Im Proseminar : Uebgn. zur Differentialrechnung, 2 ; Im Seminar : Ausgewählte Kapitel der höheren Mathematik, 2. — Selling : Th. der algebraischen Gleichungen, 4 ; Analyt. Mechanik, 4 ; Th. der Planetenbewegungen, 3 ; Beschreibende Astronomie, 1. — Rost : Th. der partiellen Differentialgleichungen, 4 ; Invariantentheorie, 4 ; Analyt. Geometrie des Raumes, 4 ; Im Proseminar (gemeinsam mit dem Assistenten) : *a)* Einführung in die darstellende Geometrie, 2 ; *b)* Elem. der Determinantentheorie, 2 ; *c)* Ebene und sphärische Trigonometrie, 2 ; Im Seminar : Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten, täglich.

ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE

University of Chicago. — E. H. Moore : Selected chapters in the theory of functions of a real variables; Seminar 2. — O. Bolza : Theory of invariants (spring), 5; Theory of functions of a complex variable, 5. — H. Maschke : Differential geometry, 5; Advanced calculus (summer), 5. — H. E. Slaught (Definite and elliptic integrals, 3. — J. W. A. Young : Critical review of secondary mathematics, 3. — L. E. Dickson : Theorie of numbers (summer), 5; Algebraic numbers and forms, 3. — A. C. Lunn : Theory of potential (winter), 3. — Differential equations, 5.

Johns Hopkins University (Baltimore). — F. Morley : Higher geometry, 2; Vector analysis (first half year), 2; Theory of functions (second half year), 2; Classic authors, 1. — A. Cohen : Elementary theory of functions, 2; Calculus of variations, 2; Differential equations of mechanics, 2. — A. B. Coble : Theory of finite groups, 2. — F. Franklin : Theory of probability (winter), 2.

SUISSE

Basel; *Universität.* — H. Kinkelin : Differential- u. Integralrechn., I, 3; Bestimmte Integrale, 2; Part. Differentialgleich., 2; Algebr. Anal., 2; Ueb. im math. Sem., 1, publ. — K. von der Mühll : Analyt. Mechanik, mit Ueb. 4; Ueber ein z. best. Kap. d. mathem. Physik, 4; Math.-phys. Uebgn., 2, privatiss. u. g. — A. Riggenbach : Astrophysik, 2; Sphär. Trigonometr. u. Einl. in d. sphär. Astronom., 3. — R. Flatt : Pädag. Sem. (math.-naturw. Abt.), 3; Einf. in d. projektiv. Geometrie, 1. — O. Spiess : Algebr. Gleichungen, 2; Synthet. Geom., 2; Ellipt. Funkt., 3.

Bern; *Universität.* —Graf : Besselsche Funktn. m. Rept., 3; bestimmte Integrale u. Gammafunktn. m. Rept., 3; Differtlgleichgn., 2; Differtl- u. Integralrechn., 2; Funktntheorie, 2; Renten u. Versichergsrechng., 2; mathemat. Seminar, 2. — Ott : Integralrechng., 2; analyt. Geometrie d. Ebene, II. Teil, 2. — Huber : Mechanik d. Himmels, 2; Einltg. in d. Theorie d. algebra. Flächen, 2. — Benteli : Darstell. Geometrie : Kurven, Strahlenflächen, regul. Polyeder, 2; Uebg. u. Repet., 2; prakt. Geometrie I, 1; konstrukt. Perspektive, 1. — Moser : Die Intensitätsfunktion m. Anwdgn. a. d. Sterblichktsmessg., 1; math.-versichrgswissenschftl. Seminar in Verbndg. m. Hrn. Prof. Dr. Graf, 2. — Gruner : Anwndgn. d. Diffrtlrchng. in der Physik, 1; Vector-Analysis, 1. — Pexider : Niedere Zahlentheorie, 3; Elem. der Mengenlehre, 2; ausgew. Partien d. analyt. Zahlentheorie, 1. — Crelier : Geometrie d. Bewegung, 2; synthet. Geometrie, II. Teil, 2.

Genève; *Université.* — C. Cailler : Calcul différentiel et intégral, 3; Mécanique rationnelle, 3; Conférences d'analyse supérieure, 2. — H. Fehr : Algèbre supérieure, 2; Géométrie analytique, 2; Séminaire de géométrie supérieure, 1. — Cailler et Fehr : Exercices pratiques de calcul différentiel et intégral, 2; Exercices de mécanique, 2; Exercices d'algèbre et de géométrie, 2. — R. Gautier; Astronomie générale, 2. — J. Lyon : Théorie algébrique des formes quadratiques, 1. — René de Saussure : Géométrie du mouvement, 2; Mécanique des fluides, 1. — D. Mirimanoff : Physique mathématique (chapitres choisis), 2.

Lausanne ; *Université*. — M. Amstein : Calc. diff. et intégr. I, 6 ; II, 2 ; Exerc. de calc., I, 2 ; II, 1, Théorie des fonctions, 3. — Joly : Géom. descript. I, 5 ; Géom. anal., 2 ; Géom. de posit., 2 ; Epures de géom. descript., 1 ap.-m.; Les courbes planes, 2. — Mayor : Mécan. rationn., 5 ; Exerc. de mécan., 1 ; Physique mathém., 2. — Maillard : Calc. infinit. avec applicat. aux sciences, 3 ; Astron., la terre, le soleil, 3 ; Astron. mécan. et mécan. céleste, 2. — Jaccottet : Fonctions sphériq., 2.

Zürich ; *Universität*. — Burkhardt : Elem. d. Diff.- u. Integralrechg., 4 ; Potentialtheorie, 4 ; Math. Sem., 2. — Wolfer : Einl. in d. Astronomie, 3 ; Ueb. dazu, 2 ; Einl. in d. Theorie d. Bahnbestimmungen, 2. — Weiler : Darstell. Geom. m. Ueb., I, 4 ; Analyt. Geom. m. Ueb., I, 4 : Synth. Geom., 3 ; Analyt. Geom. m. Ueb. f. Lehramtskd, 2. — Gubler : Algebr. Analys. m. Ueb. (f. Kand. d. Sek.-Lehrmts). 2 ; Determinanten, 1 ; Sphär. Trigonometrie, 1 ; Geom. Unterricht a. d. Mittelschule, 1.

Zürich ; *Ecole polytechnique fédérale*. — Section normale des sciences mathématiques. — Hirsch : Differentialrechn., 4, Repet., 1. Uebgn., 2 ; Theorie der lin. Differentialgleichgn., 3. — Franel : Calcul diff. et intégr., 4 ; Repet., 1, Exerc., 2 ; Th. des équat. différentielles, 4, Repet., 1. — Geiser : Analyt. Geom. 4, Repet., 1. — Geiser u. Hurwitz : Mathem. Seminar, 2. — W. Fiedler : Darst. Geom., 4, Repet., 1, Uebgn., 4 ; Konstruirende Geom. der Lage, 4 ; Elem. d. analyt. Geom. der Lage, 1. — Lacombe : Géom. descr., 4, Répét., 1, Exerc., 4 ; Géom. de position, avec exerc., 3. — Hurwitz : Differentialgleichgn., 4, Uebgn., 1 ; Idealtheorie, 2 ; mathem. Seminar (mit Geiser). — Herzog : Mechanik, II, 4 ; Repet., 1, Uebgn., 2 ; Ausgew. Kap. der Mech., 2. — Rosenmund : Vermessungskunde, 3, Repet., 1 ; Erdmessung, 2 ; Geodät. Praktikum, 2. — Rebstein : Kartenprojektionen, 1. — Weber : Differentialgleichgn. der Elektrotechnik, 2. — Wolfer : Einl. in die Astronomie, 3 ; Uebgn. dazu, 2 ; Einl. in die Th. des Bahnbestimmungen, 2.

Beyel : Rechenschieben mit Uebgn., 1 ; Darst. Geom., 2 ; Flächen 2. Grades (analyt.), 2 ; Zentralprojektion u. projekt. Geom., 2. — Dumas : Chap. choisis de la th. des intégrales définies. — Keller : Repet. d. Darst. Geom., 2. — Kraft : Mathematik u. Mechanik während des « naturw. Jahrhunderts », 1, Geom. Kalkül, 2 ; Elem. der Elektronenth. mittelst Vektoranalysis, 2 ; Analyt. Mechanik, 3.

BIBLIOGRAPHIE

Ett. Bortolotti. — **Lezioni sul Calcolo degli Infinitesimi** date nella R. Università di Modena, raccolte dal Dr Arm. Barbieri. — 1 fasc. in-8° de VI-62 p. Prix : 3 L.; Società tipogr., Modena.

Si l'arithmétique et l'algèbre peuvent se passer complètement de l'idée

de *limite*, par contre *le Calcul des limites* est le fondement nécessaire de l'analyse.

Et c'est merveille de voir comment les analystes sont arrivés à trouver les *valeurs vraies* d'expression qui se présentent sous les formes :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, 0^\infty, \text{etc.}$$

C'est à ce genre de questions qu'est consacré ce petit volume élémentaire. Leur étude est présentée avec beaucoup de précision et soin, aussi cet exposé constitue-t-il une excellente introduction aux théories modernes, telles que celles qui sont développées dans les livres de M. Borel : « Fonctions entières » et « Séries à termes positifs ».

R. d'Adhémar (Lille).

de Galdeano (Dr Zoel G.) — **Tratado de Análisis matemático.** Tomo segundo. — **Principios generales de la Teoría de las funciones.** (Nuova Encilopédia matemática; t. V). 1 vol. in-8° 352 p.), Zaragoza, Casañal, 1904.

Ce second volume termine le Traité d'Analyse mathématique de M. de Galdeano. Nous avons indiqué, à propos du tome Ier, consacré au Calcul différentiel, quel était l'esprit de cet excellent manuel et quel but s'était proposé l'auteur. Nous ne reviendrons pas sur ce point : qu'il nous suffise de dire que les qualités que nous avions signalées à propos de la première partie, nous les retrouvons au même degré dans la seconde : même clarté, même souci d'offrir sous une forme condensée et cependant facile, un exposé très complet de l'Analyse moderne.

Voici sommairement résumée la matière du présent volume qui est divisé en cinq livres : Dans le premier, l'auteur insiste sur les notions du nombre irrationnel et de limite, puis il donne les principes de la théorie des quantités complexes avec n unités principales. — Dans le second, après avoir passé en revue le problème des quadratures, la convergence uniforme et les séries entières, il s'occupe de la continuité et de la discontinuité (fonctions uniformément continues, fonctions discontinues, fonctions intégrales..., intégrales définies singulières de Cauchy..., etc.). Le livre IV renferme la théorie des séries dont les termes dépendent d'une variable imaginaire et l'étude de l'intégration des fonctions d'une variable complexe. — Le livre IV comprend deux chapitres, l'un relatif au développement en série des fonctions synectiques, l'autre relatif aux fonctions algébriques. Quant au livre V, le dernier, il est consacré à l'Analysis situs (surface de Riemann, variétés).

M. Godefroy (Marseille).

G. Humbert. — **Cours d'Analyse,** professé à l'Ecole polytechnique. Tome II : Complément du calcul intégral. Fonctions analytiques et elliptiques. Equations différentielles. 1 vol. gr. in-8° de 494 p. Prix : 16 fr., Gauthier-Villars, Paris, 1904.

La première partie de cet ouvrage a été analysée l'année dernière dans l'*Enseignement mathématique* (T. VI, p. 325). L'esprit déjà signalé a été conservé dans la seconde partie qui donne toutefois l'impression d'une condensation trop grande de certaines théories. C'est ce que l'auteur paraît d'ailleurs reconnaître lui-même dans sa préface, mais il faut se hâter d'ajouter

qu'il a voulu sans doute ne pas dépasser dans son second volume le cadre matériel du premier. Dans ces conditions les théories se serrent et s'étouffent un peu mutuellement au point de vue du géomètre, tandis qu'elles sont résumées et mises sous forme éminemment maniable pour le praticien.

Le volume en question commence par les intégrales multiples, leurs applications, leurs transformations, notamment celles usitées en Physique mathématique et l'on y rattache le calcul de nombreuses intégrales définies et notamment la théorie des fonctions eulériennes. Il faudrait peut-être insister un peu plus, non seulement ici mais dans de nombreux traités, sur le changement de valeur que subit une intégrale multiple quand on intervertit l'ordre des intégrations. On signale bien les cas, et ce sont certainement les plus simples, où l'interversion n'a pas d'influence, mais les cas contraires se présentent souvent, par exemple dans les solutions de Cauchy-Fourier des équations de la Physique : tantôt on peut intervertir, tantôt on ne le peut pas. Dans le chapitre des fonctions eulériennes, on insiste sur le rôle de la fonction Γ dans le calcul des probabilités et on termine par une belle démonstration de la transcendance du nombre e. Nous voici maintenant dans les fonctions analytiques, apparaissant, comme toujours, comme fonction d'une variable complexe, première notion d'où l'on déduit par la voie de Cauchy la développabilité en série entière. L'auteur a complété son cours oral en rappelant les résultats si importants sur le développement des fonctions méromorphes, résultats dûs à Mittag-Leffler et à Weierstrass. Quant à la théorie des résidus et à ses applications, c'est là qu'on a véritablement plaisir à lire M. Humbert. Ses travaux personnels, dont malheureusement il ne peut donner ici grande idée, l'ont fait passer maître dans ce magnifique domaine. Avec beaucoup d'élégance, il calcule de nombreuses intégrales simples et nous prépare ainsi à une théorie des fonctions elliptiques qui occupe à peine 72 pages, mais qui est pleine de valeur, de résultats précis et beaux. Il trouve le moyen d'étudier la cubique plane, le pendule, le théorème de Poncelet et encore d'autres résultats géométriques curieux concernant, par exemple, les arcs de lemniscate.

La second moitié du volume est consacrée aux équations différentielles. On entre en matière fort heureusement par la considération de types simples d'équations intégrales et non par la considération des théorèmes généraux d'existence. L'éminent esprit géométrique de M. Humbert apparaît bien dans ces premières considérations où les interprétations géométriques abondent (solutions singulières, propriétés géométriques des intégrales des équations élémentaires précisément intégrables comme, l'a montré Sophus Lie, à cause des groupes de transformations qu'elles admettent). Voici donc les équations à variables séparées, homogènes, linéaires, de Bernoulli, de Riccati, de Lagrange, de Clairaut, puis les artifices d'intégration, le facteur intégrant et les applications très élégantes aux trajectoires, aux lignes asymptotiques et aux lignes de courbure des surfaces, particulièrement des quadriques, enfin la célèbre équation d'Euler qui a joué un rôle fondamental dans la genèse et la théorie des fonctions elliptiques.

La réductibilité aux formes intégrables des équations d'ordre quelconque entraîne l'étude de la courbe élastique, la démonstration du fait que les coniques sont les seules courbes dont les lignes diamétrales admettent (aux points où elles coupent la courbe) des tangentes passant par un point fixe, l'étude de la courbe où le rayon de courbure est proportionnel au rayon vecteur, de la courbe de poursuite et enfin celle des lignes géodésiques.

C'est là un problème difficile dont M. Humbert indique cependant les grandes lignes pour des applications particulières (cylindres, surfaces de révolution, ellipsoïde).

Les théorèmes généraux de Cauchy sur l'existence des intégrales sont exposés maintenant à propos des systèmes d'équations différentielles. Cette exposition est encore facile à saisir géométriquement. Quant aux équations linéaires leur étude élémentaire bien connue est suivie de l'étude de l'intégrale faite sur l'équation même en dehors de la possibilité de l'intégration explicite (Fuchs, Poincaré, Painlevé, etc...). Nous savons suivre ainsi l'intégrale générale dans le plan et reconnaître, par exemple, si elle y est méromorphe, holomorphe, rationnelle. Signalons en outre quelques pages relatives à l'équation de Lamé.

Les équations aux dérivées partielles sont traitées avec rapidité. Leurs solutions sont immédiatement présentées comme des surfaces pouvant passer par une courbe gauche arbitraire et admettre, dans le cas du second ordre, un plan tangent variant le long de cette courbe, de façon également arbitraire. L'idée de *caractéristique*, prise par son côté le plus élémentaire, est habilement introduite. Les équations aux différentielles totales et les équations $f(x, y, z, p, q) = 0$ sont traitées sobrement, mais suffisamment. Enfin l'ouvrage est terminé de la façon la plus utile par une belle collection de problèmes résolus, problèmes relatifs aux fonctions analytiques et elliptiques et destinés sans doute à éclairer les théories correspondantes comme, par exemple, ceux que M. Painlevé a traités dans le *Recueil d'exercices* de Tisserand. A. BUHL (Montpellier).

R. SCHÜSSLER. — **Orthogonale Axonometrie.** Ein Lehrbuch zum Selbststudium. Mit 29 Figurentafeln in besonderem Hefte. — 1 vol. relié, in-8°, VIII-170 p., prix : 7 Mk. ; B. G. Teubner, Leipzig.

En rédigeant ce traité d'axonométrie, l'auteur s'est proposé de mettre en relief la valeur théorique d'une méthode de projection qui, dans la pratique, a déjà de nombreuses applications à la représentation des objets. Il rappelle dans la préface le noms de Skuhersky, Staudigl, Pelz, Weiler, etc., qui ont tout particulièrement contribué au développement de cette branche de la Géométrie. Les travaux de Pelz ont fait de l'axonométrie une méthode de projection dans laquelle on peut effectuer toutes les constructions géométriques, comme dans le cas de deux plans orthogonaux. Les principes essentiels de cette méthode sont exposés dans ce volume sous une forme très simple, facilement abordable même à ceux qui n'ont pas encore fait de la géométrie descriptive.

L'ouvrage comprend quinze chapitres. Dans les trois premiers l'auteur étudie la représentation axonométrique du point, de la droite et du plan. Puis, dans le chapitre suivant il examine les applications à la construction des ombres, et, dans le chapitre V, les problèmes essentiels concernant le prisme et la pyramide : leur représentation, section plane, intersection avec une droite, pénétration, ombres.

Les problèmes relatifs aux droites et plans perpendiculaires font l'objet d'une étude approfondie, ainsi que les divers problèmes métriques usuels. Viennent ensuite les propriétés et constructions en concernant le cercle et les sections coniques. Elles donnent lieu à d'intéressantes remarques qui seront lues avec profit par tous ceux qui enseignent la Planimétrie, la Stéréométrie, la Géométrie descriptive et même la Géométrie analytique.

Les derniers chapitres sont consacrés aux surfaces coniques et cylindriques du second ordre, à la sphère et aux surfaces de révolution.

Quant à l'exposé lui-même, il est présenté avec beaucoup de soin et de clarté. Les divers problèmes sont étudiés successivement dans l'espace, puis graphiquement. Chaque chapitre se termine par des exercices à résoudres. Les figures, au nombre de 200, ont été réunies en un fascicule spécial.

Nous n'avons guère relevé de corrections. Mentionnons toutefois l emploi incorrecte de l'article indéfini au lieu de l'article défini ; il faut parler *du* plan passant par 3 points donnés et non pas *d'un* plan, p. 57. Dans la discussion du problème de l'intersection de deux pyramides l'auteur omet le cas particulier où les plans auxiliaires limites se confondent.

P. 111. « Tout plan passant par le sommet d'une surface conique coupe la surface suivant des génératrices. » Ce théorème n'est pas correct ; il est en contradiction avec ce qui est dit à la page 114.

Quoi qu'il en soit, nous tenons à déclarer que l'ouvrage de M. Schüssler nous a vivement intéressé et que nous pouvons le recommander non seulement aux étudiants, mais à tous ceux qui enseignent la Géométrie descriptive. C. Brandenberger (Zurich).

J.-J. Thomson. — **Elettricità e Materia** (traduit de l'anglais en italien, avec annotations, par G. Faè). — 1 vol. cart. VIII-200 p. ; *Collection Höpli* ; prix : L. 2. — ; U. Höpli, Milan, 1905.

Le livre du Prof. J.-J. Thomson est constitué par une série de leçons que l'auteur a données à la *Yale University* de New-Haven, sur les récentes découvertes de la radioactivité de certains corps, avec les résultats des recherches expérimentales sur ce sujet, résultats qui semblent devoir révolutionner le champ des théories fondamentales physico-chimiques.

Les nouvelles théories, que l'auteur examine avec la compétence qu'appartient à l'un des plus illustres collaborateurs de la première heure, avancent franchement dans la voie qui vient de s'ouvrir, conduisant à des points de vue nouveaux sur la constitution de la matière et sur la nature de l'électricité. On ne peut douter que ces nouvelles théories, au fur et à mesure de leur rapide développement, n'apportent de l'ouvrage aux mathématiciens, auxquels est réservée, comme toujours, la charge honorifique due à l'élégance de leurs méthodes, d'en prendre la haute direction lorsque l'édifice demandera pour son esthétique un sévère couronnement architectural. Cette intervention ne saurait tarder, aussi croyons-nous que la lecture de cet ouvrage sera d'un grand profit non seulement aux physiciens et aux chimistes, mais aussi aux mathématiciens. Cette traduction de l'anglais en italien, due au professeur Faé, est faite avec exactitude et elle est enrichie d'un appendice contenant un résumé de résultats très intéressants des recherches du chimiste Nasini sur la radioactivité des sources et des minéraux d'Italie. Le traducteur en a augmenté la partie bibliographique ; il a ajouté un sommaire des chapitres et une table alphabétique.

Th. Tommasina (Genève).

G. Vivanti. — **Leçons élémentaires sur la théorie des groupes de transformations,** professées à l'Université de Messine et traduites par A. Boulanger. — 1 vol. gr. in-8° de 300 pages. Prix : 8 fr., Gauthier-Villars, Paris, 1904.

Le présent ouvrage n'a pas de visées originales. Il ne reprend pas la

théorie des groupes sous un nouvel aspect et ne parle pas des recherches modernes y relatives lesquelles ont cependant permis d'établir les théorèmes fondamentaux de Lie par une voie sinon plus élémentaire du moins plus courte que celle suivie par l'illustre géomètre norvégien.

C'est un résumé habilement fait des grandes lignes de son œuvre même ; beaucoup de géomètres l'ont vu en étudiant les leçons italiennes de M. Vivanti et en demandant à ce dernier quelques vues claires qu'on ne peut dégager des 2000 pages de Lie qu'après un travail des plus laborieux. Aussi M. Boulanger a rendu un réel service aux Français en traduisant le court résumé du professeur italien.

Il faut dire aussi que l'œuvre de Lie a moins besoin d'être résumée que d'être désencombrée. L'ouvrage Lie-Engel surtout paraît avoir été compliqué à plaisir. A tout le calcul fonctionnel de Lie, Engel a ajouté des choses qui en somme n'ont pas directement trait aux idées propres de la théorie des groupes continus, comme par exemple l'étude des transformations employées au point de vue de savoir si elles conservent, et dans quelle mesure, certaines propriétés analytiques des fonctions auxquelles on les applique. M. Vivanti a commencé par se débarrasser de tout cela et il a eu grandement raison. La théorie des groupes doit être prise par son côté formel et la notion de transformation infinitésimale doit être considérée comme analogue à la notion de dérivée. Or il est prudent d'apprendre le calcul élémentaire des dérivées bien avant de chercher à savoir quelles sont les fonctions qui en ont légitimement une. L'exposition de Lie aurait pu, peut-être, être simplifiée encore davantage, ne serait-ce que dans les notations. Ainsi pour la substitution dans une fonction $f(x_1, x_2, \ldots)$ de nouvelles variables $x'_1, x'_2, \ldots$ nous avons le développement fondamental

$$f(x') = f(x) + \frac{1}{1!} X(f) + \frac{1}{2!} X^2(f) + \ldots$$

où X ( ) est l'opérateur de la transformation infinitésimale correspondante. Or cela s'écrit symboliquement $f(x') = e^{X(f)}$ et on aurait pu désirer que cette façon d'écrire soit indiquée. Mais l'ouvrage est excellent, complet autant que le permet son allure élémentaire. Il donne idée du rôle de la théorie des groupes dans celles des équations différentielles et va jusqu'aux transformations de contact, aux groupes de fonctions et au rôle que jouent ces derniers dans la construction des groupes ponctuels.

A. Buhl (Montpellier).

W. Voigt. — **Thermodynamik.** II. Band : Zweiter Teil. Thermisch-chemische Umsetzungen. Dritter Teil. Thermisch-electrische Umsetzungen. (Sammlung Schubert. XLVIII). 1 vol. cart. in-8°, XI + 370 pages; prix : 10 Mk. ; Gœschen, Leipzig, 1904.

Lorsque l'année dernière nous avons parlé du premier volume de la Thermodynamique de M. Voigt, nous avons dit que le savant professeur a voulu présenter une exposition claire et élémentaire d'un vaste édifice scientifique. La lecture du second volume de cet ouvrage ne peut que confirmer tout ce que nous avons dit. Il est impossible de donner en peu de lignes, une idée, même bien imparfaite, de tout ce que M. Voigt a su, en vrai maître condenser dans un petit volume, en suivant naturellement la méthode déjà adoptée.

Le volume comprend deux parties ; dans la première, la plus étendue,

l'auteur étudie les transformations thermo-chimiques; dans la deuxième, les transformations thermo-électriques. On peut dire qu'il n'y a peut-être d'argument que M. Voigt n'expose, depuis la règle des phases et les travaux de Willard Gibbs, à ceux de van der Waals, à la thermodynamique des radiations, au théorème de Kirchhoff, etc.

Cet Ouvrage constitue un répertoire très précieux comprenant une assez complète bibliographie, de très nombreux exemples, des calculs numériques et des tables étendues.

R. Marcolongo (Messine).

Mineo Chini. — **Corso speciale di Matematiche** con numerose applicazioni ad uso principalmente dei Chimici e dei Naturalisti. 1 vol., 259 p. Prix : L. 3,80; Raff. Guisti, Livourne.

Ce petit volume renferme les matières du Cours spécial de mathématiques qui a été créé à l'Université de Pavie pour les étudiants en chimie et en sciences naturelles. Il comprend quatre parties. Dans la première, intitulée *Compléments d'Algèbre*, sont réunis les sujets suivants : Progressions, Logarithmes, Analyse combinatoire, binome, déterminants, systèmes d'équations linéaires. La seconde partie est consacrée aux éléments de *Géométrie analytique* à deux et à trois dimensions; puis viennent, dans les deux dernières, les éléments du Calcul différentiel et intégral.

Dans chacune de ces parties l'auteur s'est limité aux notions essentielles et s'est efforcé de les accompagner d'exemples qui sont de nature à intéresser les chimistes et les naturalistes. A signaler dans la troisième partie un chapitre spécialement consacré à la théorie des erreurs.

Il s'agit donc d'une première initiation aux Mathématiques supérieures dans le genre de celles que fournissent les ouvrages de Nernst et Schœnflies, de Lorentz et de Vivanti (Collection Hœpli), et, à ce titre, le manuel de M. Chini est appelé à rendre grand service aux étudiants.

E. Grimsehl. — **Angewandte Potentialtheorie** in elementarer Behandlung, I. Band (*Sammlung Schubert*). — 1 vol. cart., 219 p. ; prix : M. 6. — ; G. J. Göschen, Leipzig.

Parmi les théories mathématiques qui ont été créées depuis un siècle, celle du potentiel est certainement l'une des mieux connues. Comment expliquer alors qu'on ne se soit pas accordé jusqu'à présent sur la manière de définir le potentiel ? Le potentiel est-il une fonction de forces ou bien une fonction de forces changée de signe ou bien enfin une fonction de forces divisée par une constante ? Dans le premier cas les composantes de la force sont égales aux dérivées partielles du potentiel V et l'on a, par exemple :

$$X = \frac{\partial V}{\partial x} \; ; \qquad (1)$$

dans le second

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \; ; \qquad (2)$$

dans le troisième enfin

$$X = c\,\frac{\partial V}{\partial x} \; . \qquad (3)$$

Quelques auteurs partent, pour définir le potentiel, de l'égalité (1) : Le

potentiel est alors une fonction de forces. Mais, contrairement à cette définition première, ils posent en électrostatique (dans le cas où le potentiel est dû à une masse m) $V = k\frac{m}{r}$ ou plus simplement $V = \frac{m}{r}$. Il serait plus logique dans ce cas de poser $V = -k\frac{m}{r}$. D'autres auteurs préfèrent au contraire partir de l'égalité (2); le potentiel est alors une fonction de forces changée de signe; mais en même temps ils posent, dans le cas de l'attraction newtonienne, $V = f\frac{m}{r}$. Il serait plus logique de faire $V = -f\frac{m}{r}$.

D'autres enfin posent, avec M. Appell, $V = \frac{m}{r}$, dans les deux cas. Il n'y a aucun reproche à faire à cette définition. Au lieu des égalités (1) et (2) on a l'égalité (3), mais la constante c est égale à f dans le cas de l'attraction newtonienne et à $-k$ ou à -1 en électrostatique.

L'auteur du présent ouvrage sur la théorie du potentiel part de la notion de travail et il arrive à l'égalité (2). Pour lui la propriété (2) est caractéristique du potentiel. Or il choisit précisément, comme première application de la théorie du potentiel, l'étude de l'attraction newtonienne et il pose $V = f\frac{m}{r}$. L'égalité (2) n'est plus vraie. Elle donne bien l'intensité de la force, mais non sa direction (voir les §§ 23 et 32, p. 58 et 79).

Autre remarque; de même que les mathématiciens français évitent de dire « potentiel du point P », lorsque le point P est le point attiré, il serait préférable de ne pas dire: « Potential des Punktes P » (comp. *Encyclopädie der mathem. Wissensch.*, t. II, A, 7 *b*).

Cela n'empêche pas, j'ai hâte de l'ajouter, que le livre de M. Grimsehl ne soit un ouvrage excellent, à en juger par le premier volume, seul encore paru. Ce volume est divisé en trois parties: dans la première l'auteur expose les principes de la théorie du potentiel, les deux autres parties contiennent les applications à la théorie de l'attraction et à l'électrostatique. On y trouve des renseignements curieux qui ne manqueront pas d'intéresser le lecteur. L'auteur ne se contente pas, par exemple, d'énoncer la loi de Coulomb, il donne un aperçu très intéressant des expériences qui permettent de la vérifier.

Parmi les applications traitées dans la 2e partie j'indiquerai la détermination de la masse de la terre, de son potentiel et de son attraction en supposant que la densité est une fonction linéaire entière de la distance au centre.

Parmi les sujets que l'auteur traite dans la 3e partie on trouve la notion de flux de force et les théorèmes classiques de Gauss, la méthode des images, les propriétés caractéristiques du potentiel et des composantes normales dans le voisinage de la surface d'un conducteur, la théorie des condensateurs et bien d'autres applications aussi intéressantes qu'utiles.

D. Mirimanoff (Genève).

René de Saussure. — **Théorie géométrique du mouvement des corps.** *(Solides et fluides.)* 1re partie 1 vol. 87 pages. Librairie Kündig, Genève.

Dans les ouvrages de M. Darboux, *(Leçons sur la théorie des surfaces)*, de M. Königs, (*Leçons de Cinématique*, Paris 1897) et dans plusieurs mémoires récents, on étudie surtout la théorie analytique des mouvements infiniment petits à plusieurs paramètres. M. de Saussure, qui a résumé dans

cette première partie de son ouvrage ses recherches antérieures, a fait une intéressante et originale étude de la théorie géométrique des mouvements finis d'un corps avec plusieurs degrés de liberté.

L'auteur envisage d'abord (chap. I) les mouvements dans un plan et ensuite (chap. II) les mouvements dans l'espace. Pour plus de brièveté nous ferons connaître les principaux résultats du deuxième chapitre, dont le premier n'est qu'un cas très particulier; l'auteur l'a exposé, avant tout, pour plus de clarté.

Les mouvements de *translation* T sont engendrés par un corps solide qui se déplace en restant symétrique d'un corps fixe par rapport à une *série de points ;* suivant que ces points sont sur une courbe, sur une surface, ou sont tous les points de l'espace, T est à un, deux ou trois paramètres. Parmi les translations à un paramètre on doit considérer T_1^1 et T_2^1 suivant que la courbe est une droite ou un cercle; parmi celles à deux paramètres on a T_1^2 et T_2^2 si la surface est un plan ou une sphère; etc. Au point de vue mécanique les T^1, T^2 peuvent être engendrées respectivement par le glissement d'une courbe ou d'une surface sur une courbe ou surface symétrique.

Les mouvements de rotation R sont engendrés par un corps qui se déplace en restant symétrique par rapport à une *série de plans ;* on a une rotation R à un, deux ou trois paramètres selon que cette série est celle des plans tangents à une surface développable, à une surface quelconque ou est la série de tous les plans de l'espace. Si la surface développable se réduit à une droite on a la rotation R^1_1 ordinaire, c'est-à-dire celle autour d'une droite (roulement d'une droite sur elle-même), ou d'une figure plane autour d'un point; si la surface est un cône ou un cylindre de révolution on a la rotation R_2^1 sphérique ou plane; si la surface quelconque se réduit à un point propre ou à l'infini, déterminé par une gerbe de plans, on a une R_1^2 sphérique ou plane; si c'est une sphère on a une R_2^2, etc. Toute rotation R^1, R^2 peut être engendrée par le roulement d'une surface développable ou quelconque sur une surface fixe symétrique par rapport à l'un de ses plans tangents.

Mais les rotations, dont l'auteur fait une étude approfondie, quoique plus générales que les mouvements de translation, ne sont pas des mouvements types dans l'espace; car on ne peut pas faire passer, en général, de rotation par un certain nombre de positions arbitrairement données d'un corps. Il faudrait pour cela considérer les mouvements (*torsions*) engendrés par un corps qui se déplace par rapport à une *série de droites:* ce que l'auteur ne fait pas dans cette première partie de son ouvrage.

Signalons, parmi une foule de résultats, l'étude de la courbe ou surface trajectoire d'un point, de l'enveloppe d'un plan et de la surface ou de la congruence engendrée par une droite liés au corps et de leurs singularités dans une R_1^1 et R^2; l'étude des R^1 contenues dans R^2 et enfin le caractère commun à toutes les rotations, qui consiste dans le glissement d'un certain nombre de droites sur un nombre de droites fixes, formant une figure symétrique avec les premières, etc.

Toutes les applications de l'élégante théorie de M. de Saussure ne sont pas nouvelles; mais la théorie géométrique des mouvements produits par le roulement d'une surface (développable ou non) sur une autre a conduit — si je ne me trompe pas — l'auteur à des résultats nouveaux. Au contraire l'application au mouvement classique d'une figure plane ne donne rien de nouveau, à l'exception d'une construction nouvelle et élégante pour la composition de deux rotations autour d'axes parallèles; car la construction du

centre de courbure d'un point de la figure lorsqu'on connaît ceux de deux autres points, n'est pas certainement plus simple que celle de Bobillier et qui a déjà été l'objet des recherches de M. Burmester (*Lehrbuch der Kinematik*, Leipzig, 1888). La construction d'une R_2^1 passant par trois positions arbitrairement choisies d'une figure plane contient une simple démonstration de l'élégante propriété que les trois positions sont toujours symétriques d'une même figure plane par rapport à trois droites ; mais elle est un cas particulier d'un théorème de Halphen sur la composition de deux mouvements hélicoïdaux[1] (*Nouvelles Annales*, I, 3me série, pag. 296, 1882).

Disons quelques mots sur l'application au mouvement d'un fluide dans un plan ou dans l'espace.

En chaque point d'un fluide en mouvement se trouve une molécule fluide M animée d'un mouvement dans une certaine direction D. La figure (MD) est ce que l'auteur appelle un *élément fluide*. Dans un plan l'élément fluide est l'expression la plus simple d'une figure de grandeur invariable.

La *ligne d'éléments fluides* est une série ∞^1 d'éléments fluides; celle qui est engendrée par un élément qui subit une R_1^1 autour d'un axe ou d'un point est dite *couronne;* sa *base* est le cercle décrit par la molécule, et sa *gorge* est le cercle de gorge de l'hyperboloïde engendré par D.

En faisant subir à un élément fluide dans un plan une rotation à deux paramètres on a un *couronoïde ;* c'est le lieu des positions d'un élément fluide symétriques d'un élément fixe par rapport à toutes les droites du plan. L'auteur en donne beaucoup de propriétés en se basant sur les propriétés des rotations. Si à l'élément fluide on fait subir une R_1^2, on engendre une surface (couronoïde) d'éléments fluides.

Un fluide dans l'espace peut être engendré par un élément fluide qui subit un déplacement à trois paramètres ; l'auteur envisage seulement de nombreuses propriétés d'un fluide qui subit une R_1^3, c'est-à-dire d'un fluide *à couronnes*.

Le mémoire de M. de Saussure porte donc une large contribution de nouveaux résultats à la cinématique des mouvements finis.

R. Marcolongo (Messine).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaire des principaux périodiques:

Annals of the mathematics, published under the Auspices of Harward University, second series, Cambridge, Mass.

Vol. 6, no 2 (January 1905). — A. Bliss : The Solutions of Differential Equations of the First Order as Functions of their Initial Values. — L. Wayland Dowling : On the Conformal Representation of Certain Isosceles

[1] Puisqu'il y a quatre cercles tangents à trois droites, il y a quatre solutions pour R_2^1; je ne comprends pas pourquoi l'auteur est conduit à en exclure trois. Ainsi dans le même problème dans l'espace, pag. 64, il y a huit solutions, tandis que M. de Saussure n'en considère que quatre.

Triangles upon the Upper Half-Plane. — V. J. Lennes : Remarks on a Proof that a Continuous Function is Uniformly Continuous.

N° 3 (April 1905). — G. A. Miller : Groups of the Fundamental Operations of Arithmetic. — M. Bôcher : Linear Differential Equations with Discontinuous Coefficients. — R. E. Moritz : Some Physical Solutions of the General Equation of the nth Degree. — F. Gilman : The Ballistic Problems. — G. D. Birkhoff : A Theorem Concerning Uniform Convergence.

N° 4 (July 1905). — L. E. Dickson : On the Real Elements of Certain Classes of Geometrical Configurations. — E. V. Huntington : The continuum as a Type of Order : An Exposition of the Modern Theory. — P. Samel : On Integrating Factors. — M. B. Porter : Concerning Series of Analytic Functions.

Bibliotheca Mathematica, Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften; herausgegeben von G. Eneström in Stockholm. B. G. Teubner. Leipzig. 3. Folge. 6. Band.

1. Heft. — G. Eneström : Über die Bedeutung historischer Hypothesen für die mathematische Geschichtsschreibung. — Duhem : Sur l'Algorithmus demonstratus. — G. Eneström : Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Johann I Bernoulli, III. — L. Schlesinger : Über den Begriff der analytischen Funktion bei Jacobi, und seine Bedeutung für die Entwicklung der Funktionentheorie. — G. Eneström : Über den Nutzen der Begründung eines Mathematikerarchivs.

2. Heft. — Wegener : Die astronomischen Werke Alfons X. — G. Eneström : Über eine von Euler aufgestellte Konvergenzbedingung. — E. B. Jourdain : The theory of functions with Cauchy and Gauss.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. XXXIII. Sorbonne. Paris.

Fasc. 1. Maillet : Sur les mouvements d'une nappe souterraine, particulièrement dans les terrains perméables, spongieux et fissurés. — Bioche : Remarques sur un cas de symétrie dans l'espace. — Clairin : Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. — De Montcheuil : Détermination des surfaces de révolution admettant une surface de révolution donnée pour une surface moyenne. — Bioche : Sur les courbes gauches de 4e ordre et de 4e classe. — De Montessus : La résolution numérique des équations. — Bernstein : Sur l'interpolation. — Andoyer : Sur la sommation des séries. — Cotton : Généralisation de la théorie du trièdre mobile. — De Sparre : Note au sujet des mouvements à la surface de la terre. — Hadamard : Sur quelques questions de calcul des variations.

Fasc. 2. — Weill : Sur une classe d'équations irréductibles du cinquième degré, résolubles par radicaux. — Bioche : Sur les permutations polyédriques. — Clairin : Sur certaines transformations des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. — Denjoy : Sur quelques propriétés des fonctions de variables réelles. — Fontené : Sur l'extension à l'espace du théorème des polygones de Poncelet par des polyèdres de genre *un*. — Borel : Remarques sur certaines questions de probabilité. — Maillet : Sur les solutions de certains systèmes d'équations différentielles : applications à un système hydraulique de n réservoirs. — De Sparre : Note au sujet de la déviation des graves dans la chute libre. — Fouché : Sur la déviation des graves et les champs de force.

Bulletin des sciences mathématiques, rédigé par G. Darboux, E. Picard et J. Tannery, 2ᵉ série, tome XXIX, 1905. Gauthier-Villars, Paris.

Janvier. — Louis Kollros : Sur l'approximation périodique des irrationnelles cubiques.

Février. — G. Darboux : Sur la sphère de rayon nul et sur la théorie du déplacement d'une figure invariable.

Mars. — Comptes rendus et Analyses.

Avril. — Paul Tannery. — G. Darboux : Sur les surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution.

Mai. — J. Boussinesq : Sur l'existence d'un ellipsoïde d'absorption dans tout cristal translucide, même sans plan de symétrie ni axe principal, et sur la construction des rayons lumineux dans les milieux opaques.

Juin. — J. Clairin : Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = f(x, y, z)$.

Bulletin of the American mathematical Society, New-York. Vol. XI.

N° 4 (Janv. 1905). — E. Dickson : The Group of a Tactical Configuration. — J. E. Wright : Application of the Theory of Continuous Groups to a Certain Differential Equation. — V. Snyder : On the Quintic Scroll having a Tacnodal or Oscnodal Conic. — B. Smith : On the Deformation of Surfaces of Translation.

N° 5 (Fév. 1905). — T. S. Fiske : Mathematical Progress in America. — E. B. Wilson : The Heidelberg Congress : Sectional Meetings. — R. E. Wilson : The Breslau Meeting of the deutsche Mathematiker-Vereinigung. — W. Haskell : The Construction of Conics under Given Conditions.

N° 6 (Mars 1905). — E. Kasner : The Present Problems of Geometry.

N° 7 (Avril 1905). — J. W. Young : On the Use of Hypercomplex Numbers in Certain Problems of the Modular Group. — G. A. Miller : Extension of a Theorem due to Sylow. — C. L. Bouton : Note on Isothermal Curves and One-Parameter Groups of Conformal Transformations in the Plane.

N° 8 (Mai 1905). — E. Picard (Translated by W. Haskell) : On the Development of Mathematical Analysis and its Relation to Certain Other Sciences. — L. E. Dickson : On the Class of the Substitutions of Various Linear Groups. — A. M. Hiltebeitel : Note on a Problem in Mechanics. — Irving Stringham : A Geometric Construction for Quaternions Products.

N° 9 (Juin 1905). — L. E. Dickson : A General Theorem on Algebraic Numbers. — L. P. Eisenhardt : On the Deformation of Surfaces of Translation. — G. A. Miller : The Groups of Order 2^m which Contain an Invariant Cyclic Subgroup of Order 2^{m-2}. — E. Kasner : Galileo and the Modern Concept of Infinity.

N° 10 (Juillet 1905). — G. Darboux (Translated by H. Thompson) : A Survey of the Development of Geometric Methods. — H. L. Rietz : Simply Transitive primitive Groups which are Simple Groups. — T. J. I' A. Bromwich : Bemarks Concernings the Variation of the Length of a Curve.

Notes. — Publications.

Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung ; in Monatsheften herausgegeben von A. Gutzmer in Jena. 14. Band.

Heft 1 (Januar). — Sturm : Über diejenigen Cremonaschen-Verwandtschaften, bei denen den Ebenen des einen Raumes allgemeine Flächen

3. Ordnung im andern entsprechen. — E. Lampe : Einige Übungsaufgaben zur Integralrechnung. — Klein : Bericht an die Breslauer Naturforscher-Versammlung über den Stand des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen. — Doehlemann : Baukunst und Illusionsmalerei. — L. Saalschütz : Zur Erinnerung an W. Fuhrmann.

Heft 2 (Februar). — G. Kowalewski : Eine Verallgemeinerung des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung. — G. Landsberg : Über die Analogie zwischen den Theorien der algebraischen Zahlen und der algebraischen Funktionen. — Von W. Ludwig (Karlsruhe) : Über die Berührungstransformation der Kreise auf einer Kugel. — G. Lüroth : Wilhelm Schell †. — Entwurf neuer Satzungen für die deutsche Mathematiker-Vereinigung. —

Heft 3 und 4 (März/April). — Minkowski : Peter Gustav Lejeune Dirichlet und seine Bedeutung für die heutige Mathematik. — V. Collins : Correlation of vector analysis notations. — C. G. Knott : Hamilton's Quaternion vector Analysis. — E. Waelsh : Wilhelm Weiss. — Fricke : Über die Bedeutung der allgemeinen Abteilungen der technischen Hochschulen. — Schur : Johann Heinrich Lambert als Geometer.

Heft 5 (Mai). — Knopf : Ernst Abbe. — Liebmann : Notwendigkeit und Freiheit in der Mathematik. — G. Holzmüller : Bemerkungen über den Unterricht und die Lehramtsprüfung in der angewandten Mathematik.

Heft 6 (Juni). — E. Lampe : Guido Hauck †. — Harzer : Die exakten Wissenschaften im alten Japan.

Mitteilungen und Nachrichten. — Literarisches.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von K. Hensel. G. Reimer, Berlin.

Bd. CXXIX. Heft 2. — H. Poincaré : Sur les invariants arithmétiques. — F. Klein : Über die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften und sechsten Grades. — G. Frobenius : Zur Theorie der linearen Gleichungen. —

Le t. 129, dont le premier fascicule a paru le 13 février 1905, à l'occasion du centième anniversaire de la naissance de Lejeune-Dirichlet, sera entièrement consacré à la mémoire du savant mathématicien allemand. Les fascicules 3 et 4 paraîtront ultérieurement.

Bd. CXXX, Heft 1. — H. Jung : Spezielle Thetafunktionen von vier veränderlichen. — L. Schlesinger : Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschlusse an das Riemann'sche Problem. — M. Lerch : Einige Reihenentwicklungen der unvollständigen Gammafunktion. — J. Schur : Zur Theorie der vertauschbaren Matrizen.

Heft 2. — G. Wallenberg : Zur Theorie der Riccatischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. — P. Stäckel : Über die geodätischen Linien einer Klasse von Flächen, deren Linienelement den Liouville'schen Typus hat. — J. Knoblauch : Der innere Zusammenhang der flächentheoretischen Grundformeln. — P. Wiernsberger : Sur les polygones réguliers et les radicaux carrés superposés.

Mathesis, Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales publié par P. Mansion et J. Neuberg. Gand, Hoste. Paris, Gauthier-Villars ; Série 3. Tome V, 1905.

Janvier. — A. Aubry : Sur les triangles rectangles en nombres entiers.

Février. — C. E. Wasteels : Sur l'aire linéaire engendrée par une figure invariable. — Darboux : Sur les progrès de la géométrie élémentaire.

Mars. — E. N. Barisien : Exercices de calcul intégral. — E. Barbette : Les centres isodynamiques dans la résolution des équations du 3me degré.

Avril. — C. Servais : Quelques théorèmes de Steiner.

Mai. — C. Servais : Quelques théorèmes de Steiner (suite et fin). — J. N. : Le point de Kariya.

Juin. — E. Barisien : Exercices de calcul intégral.

Juillet. — E. Weber : Sur quelques coniques associées au triangle (suite et fin). — E. Barisien : Exercices de calcul intégral (suite et fin). — Tsurnichi Hagashi : Questions d'arithmétique .

Proceedings of the London Mathematical Society, séries 2. Vol. 2 et 3.

Vol. 2, fasc. 2 à 7. — T. J. I'A. Bromwich and G. H. Hardy : Some extensions to Multiple Series of Abel's Theorem on the Continuity of Power Series. — G. H. Hardy : Note in addition to a former paper on Conditionally Convergent Multiple Series. — Rev. F. H. Jackson : The Application of Basic Numbers to Bessel's and Legendre's Functions. — A. Young and P. W. Wood : Perpetuant Syzygies. — Lord Rayleigh : Note on the application of Poisson's Formula to Discontinuous Disturbances. — P. W. Wood : Types of Cavariants of any degree in the Coefficients of each of any number of Binary Quantics of Finite Order. — Rev. E. W. Barnes : On Functions generated by linear Difference Equations of the First Order. — H. F. Baker : Note on the Integrations of Linear Differential Equations. — T. H. Havelock : Wave Fronts considered as the Characteristics of Partial Differential Equations. — E W. Hobson : Inner Limiting Sets of Points in a Linear Interval. — V. Volterra : Note on the Application of the Method of Images to Problems of Vibrations. — G. H. Hardy : On the Zeroes of certain Classes of Integral Taylor Series. Part. I. — On the Integral Function $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\Phi(n)}}{\{\Phi(n)\}!}$ — J. W. L. Glaisher : On the Expansions of the Elliptic and Zeta Functions of $^2/_3\,K$ in powers of q. — P. W. Wood : On the Reducibility of Covariants of Binary Quantics of Infinite Order. — Horace Lamb : On Deep-Water Waves. — G. H. Hardy : On the Zeroes of certain Classes of Integral Taylor Series. Part. II. — On the Integral Function $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+a)^s\, n}$ and other similar Functions. — W. Burnside : On Groups of Order $p^\alpha q^\beta$ (Second Paper). — Rev. E. W. Barnes : The Linear Difference Equation of the First Order. — E. Wright : Covariants of Power Series. — P. A. MacMahon : On a Deficient Multinomial Expansion.

Vol. 3, fasc. 1 à 3. — Rev. F. H. Jackson : The Application of Basic Numbers to Bessel's an Legendre's Functions (Second Paper). — Rev. F. H Jackson : Expansion of Functions in Series of Basic Bessel Coefficients (Addition to the preceding Paper). — H. F. Baker : Alternants and Continuous Groups. — E. W. Hobson : On the Failure of Convergence of Fourier's Series. — A. Young : On certain Classes of Syzygies. — A. C. Dixon : A Class of Expansions in Oscillating Functions. — H. Fletcher Moulton : Current Flow in Rectangular Conductors. — H. Bateman : A Generalisation of the Legendre Polynomial. — J. H. Jeans : The Kinematics and Dynamics of a Granular Medium in Normal Piling. — E. Cunningham : An Extension of Borel's Exponential Method of Summation of Divergent Series applied to Linear Differential Equations. — E. W. Hobson : On the General Theory of Trans-

finite Numbers and Order Types. — A. L. Dixon : On the Evaluation of certain Definite Integrals by means of Gamma Functions. — A. L. Dixon : Generalisation of Legendre's Formula $KE' - (K - E) K' = \frac{1}{2}\pi$. — H. Bateman : The Weddle Quartic Surface. — W. Burnside : On the Complete Reduction of any Transitive Permutation-Group; and on the Arithmetical Nature of the Coefficients in its Irreducible Components.

Rendiconti del R. Instituto Lombardo di Scienze e lettere. Serie II, Vol. XXXVIII, 1905, 1er semestre.

E. Ciani : Sopra le curve gobbe rationali di quinto ordine. — G. Fubini : Sulla teoria delle ipersfere e dei gruppi conformi in una metrica qualunque. — A. Maroni : Sulle superficie del 4° ordine con soli punti doppi. — E. Pascal : Sulle condizioni invariantive perchè una binaria biquadratica abbia per fattore una cubica. — A. Favaro : Bonaventura Cavalieri e la quadratura della spirale. — E. Pascal : Aggiunte ad alcuni teoremi di Clebsch relativi alla costruzione dei sistemi completi di forme invariantive. — G. Marolli : Su certe matrici che presentano analogie coi determinanti studiati da Puchta e da Noether. — L. Berzolari : Osservazioni alla nota precedente del prof. E. Ciani « Sopra le curve gobbe razionali di quint'ordine ». — G. Fubini : Un'osservazione sulla teoria delle funzioni poliarmoniche. — T. Boggio : Sulle funzioni associate e sulle linee di forza di un ellissoide di rotazione eterogeneo. — E. Veneroni : Intorno ad un fascio di, varietà cubiche dello spazio a cinque dimensioni. — E. Pascal : Le varie forme delle curve storte di 6° ordine intersezioni complete di quadriche e cubiche. — G. Vitali : Una proprietà delle funzioni misurabili. — L. Carlini : A proposito di certe matrici che presentano analogie coi determinanti di Puchta-Noether. — G. Bardelli : Sul movimento di un punto in un piano. — R. Bonola : I teoremi del padre Gerolamo Saccheri sulla somma degli angoli di un triangolo e le ricerche di M. Dehn. — E. Pascal : Sulla classificazione delle superficie di Kummer.

Revue de Métaphysique et de Morale, dirigée par X. Léon, 13me année, 1905, Armand Colin, Paris.

N° 2. — L. Couturat : Les principes mathématiques : la Géométrie (suite). — E. Delsol : Une nouvelle tentative de réfutation de la Géométrie générale.

N° 3. — *Numéro spécialement consacré à Cournot.* — H. Poincaré : Cournot et les principes du calcul infinitésimal. — F. Faure : Les idées de Cournot sur la statistique. — F. Vial : Cournot et l'enseignement. — B. Audierne : La classification des connaissances dans Comte et dans Cournot. — H.-L. Moore : A. A. Cournot.

Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften, Wien. Math.-Naturw. Klasse. CXII Band, Jahrgang 1903. — Gerold's Sohn, Vienne.

VII Heft. — E. Wælsch : Über Binäranalyse. — J. Kantor : Über eine neue Klasse gemischter Gruppen und eine Frage über die birationalen Transformationen. — S. Kantor : Neue Grundlagen für die Theorie und Weiterentwicklung der Lie'schen Funktionengruppen. — S. Kantor : Die linearen Systeme linearer Strahlenkomplexe im R_r. — J. Sobotka : Zum Normalenproblem der Kegelschnitte. — E. Wælsch : Über Binäranalyse.

VIII u. IX Heft. — E. Czuber : Zur Theorie der eingliederigen Gruppe in der Ebene und ihrer Beziehungen zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. — W. H. Joung : Über die Einteilung der unstetigen Funktionen und die Verteilung ihrer Stetigkeitspunkte.

X Heft. — J. Hepperger : Bahnbestimmung des Biela'schen Kometen aus den Beobachtungen während der Jahre 1846 und 1852. — E. Wælsch : Über Binäranalyse. — R. Daublesky v. Sterneck : Über die kleinste Anzahl Kuben, aus welchen jede Zahl bis 40,000 zusammengesetzt werden kann. — W. Wirtinger : Eine neue Verallgemeinerung der hypergeometrischen Integrale. — L. Weinek : Zur Theorie der Planetenvorübergänge vor der Sonnenscheibe.

2. Livres nouveaux :

Annuario del Circolo matematico di Palermo, 1905. 1 fasc. de VIII- 52 p.; Via Ruggiero Settimo, Palermo.

Paul Bachmann. — **Zahlentheorie.** Versuch einer Gesamtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Hauptteilen. *Fünfter Teil :* Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper : 1. vol. relié in-8°, XXII, 548 p.; prix : 16 Mk.; B. G. Teubner, Leipzig.

O. Biermann. — **Vorlesungen über mathematische Näherungsmethoden.** — 1 vol. in-8°, X, 227 p.; prix : 8 Mk.; Vieweg & Sohn, Braunschweig.

H. Bouasse. — **Essais des matériaux.** Notions fondamentales relatives aux déformations élastiques et permanentes. *Bibliothèque de l'élève ingénieur.* — 1 vol. in-8°, 150 p.; prix : 5 fr.; Gratier et Rey, Grenoble; Gauthier-Villars, Paris.

Doll u. Nestle : **Lehrbuch der praktischen Geometrie,** bearbeitet für den Unterricht an den Hoch- und Tiefbauabteilungen der Baugewerkschulen und technischen Mittelschulen sowie für den Gebrauch in der Praxis. 2. Auflage. — 1 vol. cart. in-8°, 164 p.; prix : Mk. 3.80; B. G. Teubner, Leipzig.

Rob. Fricke. — **Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung.** Zusammengestellt als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen. 4. Auflage. — 1 vol. in-8°, 217 p.; prix : 5 Mk.; Vieweg & Sohn, Braunschweig.

Osk. Gutsche. — **Mathematische Uebungsaufgaben** für Primaner von Realanstalten und jüngere Studierende. — 1 vol. in-8°, cart., 82 p.; prix : Mk. 1.20; B. G. Teubner, Leipzig.

E. Jahnke. — **Vorlesungen über die Vektorenrechnung.** Mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. — 1 vol. in-8°, cart., XII- 235 p.; prix : Mk. 5.60; B. G. Teubner, Leipzig.

J. St. Mackay. — **Plane Geometry.** Practical and theoretical. Book IV et V. — 1 vol. in-16, 144 p.; W. et R. Chambers, Londres et Edimbourg.

L. Marchis. — **Thermodynamique, II.** Introduction à l'étude des machines thermiques *(Bibliothèque de l'élève ingénieur).* — 1 vol. in-8°, 255 p.; prix : 5 fr.; Gratier et Rey, Grenoble; Gauthier-Villars, Paris.

Müller u. Pietzker. — **Rechenbuch** für die unteren Klassen höherer Lehranstalten. Ergänzungsheft für die Mittelklassen der Realschulen und Anstalten mit Ersatzunterricht. — 1 vol. cart., 89 p.; prix : Mk 1.20; B. G. Teubner, Leipzig.

C. O. Tuckay. — **Examples in Arithmetic,** with some Notes on Method. — 1 vol. cart. in 16; (avec réponses) 292 p.; prix 3 s.; George Bell & Sons, Londres.

Verhandlungen des III. internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg, herausgegeben von dem Schriftführer des Kongresses, Dr. A. Krazer. — 1 vol. relié, gr. in-8°, X- 756 p.; prix : Mk. 18; B. G. Teubner, Leipzig.

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES EN NORVÈGE

I. — Les écoles primaires et secondaires.

Le cours des études ordinaires est de douze ans. Quand l'enfant est âgé d'au moins de six ans, il entre dans l'école primaire — *forskole* —, comprenant cinq classes. Ensuite, après examen, il entre à l'école moyenne — *middelskolen* —, où il reste quatre ans. Après avoir subi avec succès l'examen de sortie de l'école moyenne — *middelskoleexamen* — il est reçu au gymnase, où il reste trois ans. A la fin de chaque année, pendant tout son temps d'écolier, l'élève doit passer un examen de promotion.

Les cinq classes de l'école primaire ne comportent que peu de mathématiques ; on se borne aux quatre règles de l'arithmétique avec des nombres entiers et à l'addition et la soustraction des fractions.

L'enseignement des mathématiques dans *l'école moyenne* renferme l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie plane. Dans l'arithmétique et l'algèbre on traite la règle de trois, le calcul des intérêts, les quatre règles avec des nombres rationnels, la divisibilité des nombres, les proportions, les équations du premier degré avec plusieurs variables, les puissances et les radicaux. Dans la géométrie on traite la ligne droite, le cercle, le triangle, le parallélogramme, etc., les congruences, la proportion et la similitude.

Le *gymnase* est divisé en trois sections : 1° la section des sciences, 2° la section des langues vivantes et de l'histoire, 3° la section des langues vivantes et de l'histoire *avec* latin. Le programme officiel des mathématiques du gymnase est : Etude des parties de l'arithmétique, de l'algèbre élémentaire

et de la géométrie, qui ne sont pas traitées dans l'école moyenne. Connaissance des notions fondamentales de la trigonométrie et de leur application au calcul des triangles plans. Les éléments de la stéréométrie. Exercices de constructions. Pour la section des sciences du gymnase on exige encore la connaissance de la géométrie analytique pour autant qu'elle peut être traitée simplement sans le calcul différentiel. Les propriétés de la fonction entière.

Nous donnons enfin un tableau du nombre d'heures des leçons de mathématiques par semaine dans l'école primaire et secondaire.

	Ecole primaire.					Ecole moyenne.				Gymnase.		
Année.	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	3
Nombre des heures par semaine.	6	5	4	4	4	5	5	5	5	4	6[1]	6[1]

2. — Les écoles spéciales.

Je ne traite ici que des écoles techniques et des écoles militaires, les seules écoles spéciales, où l'enseignement de mathématiques joue un rôle.

Nous n'avons pas encore une école polytechnique en Norvège. Cependant sa création a été votée ; l'école est maintenant en construction à Trondhjem et elle doit être achevée en 1910. Pour le moment nous nous contentons des écoles techniques de quatre ans pour l'instruction de nos ingénieurs et architectes. La condition d'admission est l'examen de sortie de l'école moyenne. Les jeunes gens ont donc environ quinze ans. L'enseignement des mathématiques dure trois années, et renferme à peu près le cours du gymnase de la section des sciences et de plus les éléments de la géométrie analytique de l'espace et les éléments du calcul différentiel et intégral avec ses applications à la géométrie analytique.

La Norvège possède deux écoles militaires, une école à

[1] Les sections des langues vivantes et l'histoire ont seulement 2 et 2.

Christiania pour les officiers de l'armée et une école à Harten pour les officiers de la flotte. La condition d'admission théorique à l'école militaire navale est l'examen de sortie de l'école moyenne et l'enseignement des mathématiques est à peu près analogue à celui des écoles techniques.

La condition d'admission à l'école militaire de l'armée est l'examen de sortie — *artium* — du gymnase de la section des sciences. L'enseignement des mathématiques renferme ici la trigonométrie sphérique, les éléments de la géométrie analytique de l'espace et le calcul différentiel et intégral.

Les officiers de l'armée et de la flotte qui désirent entrer dans l'état-major général, et les officiers de l'artillerie et du génie sont obligés de passer l'Académie militaire de deux ans. L'enseignement des mathématiques ici renferme la géométrie analytique de l'espace, le calcul différentiel et intégral, la théorie des équations différentielles, les éléments du calcul de probabilité et de la méthode des moindres carrés.

3. — L'université.

Après avoir passé l'examen de sortie du gymnase l'élève qui désire faire des études entre à l'Université à Christiania. D'après une organisation tout à fait récente, les premières années d'études universitaires conduisent à un examen comprenant deux parties, une partie générale et une partie spéciale. La *partie générale* est composée de quatre branches, que l'étudiant peut choisir entre les suivantes : les mathématiques, la physique, la chimie, la zoologie, la botanique, la géologie et la géographie, mais où une épreuve en mathématiques est obligatoire, si l'étudiant ne choisit pas cette science pour la partie générale ou spéciale. Pour la *partie spéciale* on choisit une des sciences susdites, que l'étudiant n'a pas eue dans la partie générale. Un étudiant qui désire étudier les mathématiques, choisit par exemple pour la partie générale, la physique, la chimie, la zoologie et la botanique, et pour la partie spéciale, les mathématiques. Le temps d'étude pour la partie générale est de quatre à cinq semestres, et pour la partie spéciale ultérieurement de trois à quatre semestres.

Le programme officiel venant à peine d'être approuvé par le Gouvernement, on n'a pas encore fixé en détail ce qui doit être exigé dans les deux parties, mais il est entendu que pour la partie spéciale le candidat devra faire preuve de connaissances assez approfondies.

Sous l'ancienne organisation l'examen qu'avait à subir l'étudiant en mathématiques, était composé de trois groupes : 1° les mathématiques avec la mécanique et l'astronomie, 2° la physique et la chimie, 3° la zoologie, la botanique, la géologie et la géographie. De ces trois groupes l'étudiant devait choisir deux. Le candidat était donc assez bien préparé sur l'ensemble sans avoir particulièrement approfondi l'une des branches.

Pour celui qui désire pousser plus loin ses études en mathématiques, l'Université a le diplôme de docteur en philosophie. Pour obtenir ce diplôme il faut faire une thèse, qui est à soutenir, et ultérieurement le candidat doit faire trois leçons publiques sur différents sujets de sa science. Le diplôme de docteur donne le *jus docendi* ; la thèse de doctorat à notre Université correspond donc à peu près à la « Habilitationsschrift » aux Universités d'Allemagne.

Quant à l'enseignement mathématique fourni par l'Université, il se réduit jusqu'à ce moment aux *cours :* sur les éléments de la théorie des fonctions, le calcul différentiel et intégral, la théorie des équations différentielles, la géométrie analytique et projective. Nous manquons ainsi de séminaires — au sens allemand — et d'institutions spéciales pour des exercices et des travaux pratiques. Ce sont des lacunes qui, nous l'espérons, ne tarderont pas à être comblées à la suite de la nouvelle organisation des examens. Pour ce qui concerne spécialement la préparation des maîtres des écoles moyennes et des gymnases publics, il y a lieu d'organiser un séminaire pédagogique où les candidats seraient appelés à suivre des leçons théoriques et pratiques ; l'examen de sortie du séminaire comprendrait une épreuve sur la pédagogie, la méthodologie et la psychologie.

Alf. GULDBERG (Christiania).

RESTES DE QUELQUES SÉRIES USUELLES

1. Pour certains esprits superficiels la Mathématique se réduit à un ensemble de règles fixes et de formules. Cette opinion, évidemment fausse, s'explique par la manière défectueuse dont la Mathématique est enseignée dans beaucoup d'écoles secondaires et même dans quelques écoles supérieures. Dans les établissements secondaires cet enseignement se réduit souvent à l'assimilation d'un certain nombre de règles déterminées et de formules. Mais ces règles ne sont vraiment indispensables qu'à ceux qui raisonnent mal. Les esprits qui savent raisonner sont obligés souvent, pour arriver au but de la manière la plus simple et la plus directe, à aller contre les prescriptions des règles enseignées. Il serait impossible en effet de donner des règles fixes applicables à tous les cas, on ne saurait donner que des règles fondamentales. Mais ces règles fondamentales sont éminemment flexibles et peuvent subir des transformations infinies. Un esprit qui possède bien les principes de la science essaie dans chaque cas particulier de trouver la voie la plus naturelle et la plus directe et de créer ainsi des règles spéciales.

Prenons d'abord un exemple très élémentaire. Soit l'équation du 2me degré

$$(1) \qquad (ax - b)^2 = m(c - dx)^2 .$$

En appliquant le procédé classique qu'on trouve exposé dans les traités d'Algèbre élémentaire, on obtient

$$x = \frac{ab - cdm}{a^2 - d^2m} \pm \sqrt{\left(\frac{ab - cdm}{a^2 - d^2m}\right)^2 - \frac{b^2 - c^2m}{a^2 - d^2m}} .$$

Cette expression est exacte, cela va sans dire, mais elle est trop compliquée et la voie qu'on a suivie est évidemment trop longue.

Pour arriver au but il suffit d'extraire la racine carrée des deux membres de l'équation (1), ce qui donne

$$ax - b = \pm (c - dx) \sqrt{m},$$

d'où

$$x = \frac{b \pm c\sqrt{m}}{a \pm d\sqrt{m}} .$$

Voici maintenant un exemple plus important.

Dans tous les cours de Calcul différentiel on donne des règles générales permettant de trouver l'expression du reste des séries de Taylor et de Maclaurin. Mais les expressions ainsi obtenues sont souvent très compliquées et peu propres à l'évaluation de l'erreur et à la recherche des conditions de la convergence.

Je me propose de montrer ici que les restes des séries les plus usuelles peuvent être obtenus sous une forme plus simple. Le procédé dont je me servirai est basé sur le théorème de Rolle : *deux racines d'une fonction comprennent toujours une racine de la dérivée*. On suppose que la fonction et sa dérivée sont continues dans l'intervalle considéré.

2. *Fonction exponentielle.*

Posons

$$(2) \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} + \frac{qx^n}{1.2 \dots (n-1)} .$$

Il s'agit de déterminer q de telle manière que l'égalité (2) soit satisfaite pour la valeur donnée de x.

Nous regarderons x comme une constante. Soit au contraire z une quantité variable. Considérons la fonction suivante :

$$\mathrm{F}(z) = e^{-z} \left\{ 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \dots + \frac{z^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} + \frac{qz^n}{1.2 \dots (n-1)} \right\} - 1 .$$

F (z) s'annulle pour $z = 0$, mais elle s'annulle aussi pour $z = x$, en vertu de (2). Donc F$'(z)$ admet une racine com-

prise entre 0 et x, qu'on peut représenter par ϑx, ϑ étant un nombre positif < 1. Or

$$F'(z) = \frac{e^{-z} z^{n-1}(qn - qz - 1)}{1.2.3 \ldots (n-1)} .$$

Comme $F'(z)$ s'annulle pour $z = \vartheta x$, on a

$$qn - q\vartheta x - 1 = 0$$

d'où

$$q = \frac{1}{n - \vartheta x}$$

et par conséquent

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2 \ldots (n-1)} + \frac{x^n}{1.2 \ldots (n-1)(n - \vartheta x)} .$$

3. *Formule du binôme.*

Un procédé semblable appliqué à la fonction $(1 + x)^m$ donne

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots(n-1)}x^{n-1}$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n}{1.2.3\ldots(n-1)[n + (n-m)\vartheta x]}$$

4. $\log(1 + x)$.

Posons

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \pm \frac{x^{n-1}}{n-1} \mp \frac{qx^n}{n}$$

et considérons la fonction

$$F(z) = \log(1 + z) - z + \frac{z^2}{2} - \ldots \mp \frac{z^{n-1}}{n-1} \pm \frac{qz^n}{n} .$$

On a

$$F'(z) = \frac{\pm z^{n-1}(q + qz - 1)}{1 + z} .$$

Or $F(z)$ s'annulle pour $z = 0$, $z = x$; donc $F'(z)$ s'annulle pour $z = \vartheta x$, d'où

$$q + q\vartheta x - 1 = 0 .$$

Par conséquent

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \pm \frac{x^{n-1}}{n-1} \mp \frac{x^n}{n(1+\vartheta x)}$$

5. arc tang x.

Un procédé analogue appliqué à la fonction arc tang x donne

$$\operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \pm \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \mp \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\vartheta x^2)} .$$

6. sin x.

Posons

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \dots \pm \frac{x^{2n-1}}{1.2\dots(2n-1)} \mp \frac{qx^{2n+1}}{1.2\dots(2n-1)} .$$

Considérons la fonction suivante

$$F(z) = \frac{1}{\sin z}\left\{ z - \frac{z^3}{1.2.3} + \dots \pm \frac{z^{2n-1}}{1.2\dots(2n-1)} \mp \frac{qz^{2n+1}}{1.2\dots(2n-1)} \right\} - 1 .$$

Cette fonction s'annulle pour $z = 0$, $z = x$. Par conséquent la dérivée $F'(z)$ admet une racine comprise entre 0 et x. Cette racine annulle aussi la fonction

$$\Phi(z) = \sin^2 z\, F'(z) .$$

Mais $\Phi(z)$ s'annulle aussi pour $z = 0$. Il en résulte que $\Phi'(z)$ admet une racine comprise entre 0 et x, qu'on peut représenter par $x\sqrt{\vartheta}$.

Or

$$\Phi'(z) = \pm \frac{z^{2n-1}\sin z}{1.2\dots(2n-1)} \left\{ 2n(2n+1)q + qz^2 - 1 \right\} .$$

Donc

$$2n(2n+1)q + q\vartheta x^2 - 1 = 0$$

et par conséquent

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \dots \pm \frac{x^{2n-1}}{1.2\dots(2n-1)}$$
$$\mp \frac{x^{2n+1}}{1.2\dots(2n-1)\,[2n(2n+1)+\vartheta x^2]} .$$

7. *Fonction hypergéométrique.*

La fonction hypergéométrique vérifie, comme on sait, l'équation différentielle.

$$x(1-x)\varphi''(x) + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)x\}\varphi'(x) - \alpha\beta\varphi(x) = 0 .$$

On est conduit au développement suivant :

$$\varphi(x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}x^2 + \dots$$
$$+ \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\dots(\alpha+n-2)(\beta+n-2)}{1.2\dots(n-1)\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-2)}x^{n-1}$$
$$+ \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\dots(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{1.2\dots(n-1)\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-2)}qx^n .$$

Pour trouver la valeur de q, considérons la fonction

$$F(z) = \frac{1}{\varphi(z)}\Big\{1 + \frac{\alpha\beta z}{1.\gamma} + \dots + \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\dots(\alpha+n-2)(\beta+n-2)}{1.2\dots(n-1)\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-2)}z^{n-1}$$
$$+ \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\dots(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{1.2\dots(n-1)\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-2)}qz^n\Big\} - 1 .$$

Cette fonction admet les racines $z=0$, $z=x$.

Formons maintenant la fonction suivante :

$$\Phi(z) = z^\gamma(1-z)^{\alpha+\beta+1-\gamma}\varphi(z)^2F'(z) .$$

Cette fonction admet une racine comprise entre 0 et x ; d'autre part elle s'annulle pour $z=0$. Par conséquent la dérivée $\Phi'(z)$ admet une racine comprise entre 0 et x. Or

$$\Phi'(z) = \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\dots(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{1.2\dots(n-1)\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-2)}z^{\gamma+n-2}(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}\varphi(z)$$
$$\times\{qn(\gamma+n-1) - q(\alpha+n)(\beta+n)z - 1\} .$$

Comme $\Phi'(z)$ s'annulle pour $z=\vartheta x$, on a

$$q = \frac{1}{n(\gamma+n-1) - (\alpha+n)(\beta+n)\vartheta x} .$$

Nous indiquerons encore les fonctions suivantes qu'on pourrait traiter d'une manière analogue :

$$\operatorname{arc\,sin} x\,,\ \cos x\,,\ \log \frac{1+x}{1-x}\,,\ \log(x+\sqrt{1+x^2})\,,\ e^x \pm e^{-x}\,,$$

$$(x+\sqrt{1+x^2})^m \pm (x+\sqrt{1+x^2})^{-m} \text{ etc...}$$

W. ERMAKOFF (Kief).

(Traduction de M. D. Mirimanoff, Genève).

NOTE DE LA RÉDACTION. — Nous apprenons que M. Tchaplyguine, professeur à l'Université de Moscou, ayant remarqué que les fonctions considérées dans l'article précédent sont des intégrales d'équations différentielles linéaires du 1[er] et du 2[me] ordre, essaya de généraliser les procédés dont s'est servi l'auteur de ce travail. A la suite d'une correspondance qui s'engagea alors entre M. Tchaplyguine et M. Ermakoff, il fut reconnu qu'il était possible de donner un procédé général permettant de calculer approximativement les intégrales d'équations différentielles quelconques. Ces intégrales peuvent être exprimées au moyen de formules simples qui dans l'intervalle donné représentent ces intégrales avec une approximation donnée. Les recherches de M. Tchaplyguine paraîtront prochainement dans un périodique mathématique.

SUR LES DÉMONSTRATIONS DE DEUX FORMULES POUR LE CALCUL DES NOMBRES DE BERNOULLI

I. — Nous allons nous occuper, en premier lieu, de la formule bien connue

$$B_{2n-1} = (-1)^n \frac{2n}{2^{2n}-1} \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^i \frac{1}{2^{i+1}} \Big[i^{2n-1} - i(i-1)^{2n-1} + \binom{i}{2}(i-2)^{2n-1}$$

$$- \binom{i}{3}(i-3)^{2n-1} + \dots \pm \binom{i}{i-1} 1^{2n-1} \Big],$$

où B_{2n-1} représente les *nombres de Bernoulli*.

On trouve une démonstration de cette formule dans le *Calcul intégral de Serret* (2[e] édit., p. 225) et nous en avons donné une autre dans notre *Curso de Analyse* (Calculo differencial, 3[e] édit., p. 237). Mais nous allons l'obtenir ici par une analyse plus simple que celle que l'on trouve dans ces deux traités, au moyen de la formule connue (Hermite, Cours d'Analyse de l'Ecole polytechnique, p. 60) :

$$y^{(n)} = u! \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{i!} f^{(i)}(u) ,$$

où

$$A_i = \frac{1}{u!} \left[(u^i)^{(n)} - i (u^{i-1})^{(n)} u + \binom{i}{2} (u^{i-2})^{(n)} u^2 \ldots \right] ,$$

laquelle donne la dérivée d'ordre n de y par rapport à x, quand $y = f(u)$ et u est une fonction donnée de x.

Pour cela, appliquons cette formule à la fonction

$$y = (1 + e^x)^{-1} .$$

On a, en posant $y = u^{-1}$, $u = 1 + e^x$,

$$y^{(n)} = u! \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{A_i}{(1 + e^x)^{i+1}} ,$$

où

$$A_i = \frac{1}{u!} \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k \binom{i}{k} \frac{d^n (1 + e^x)^{i-k}}{dx^n} (1 + e^x)^k .$$

Mais

$$(1 + e^x)^{i-k} = 1 + (i-k) e^x + \binom{i-k}{2} e^{2x} + \ldots + e^{(i-k)x} ,$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^n (1 + e^x)^{i-k}}{dx^n} = (i-k) e^x + \binom{i-k}{2} 2^n e^{2x} + \binom{i-k}{3} 3^n e^{3x} + \ldots$$
$$+ (i-k)^n e^{(i-k)x} ,$$

et, en posant $x = 0$,

$$\left[\frac{d^n(1+e^x)^{i-k}}{dx^n}\right]_{x=0} = (i-k) + \binom{i-k}{2}2^n + \binom{i-k}{3}3^n + \ldots + (i-k)^n$$

Donc on a

$$y_0^{(n)} = n!\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \frac{A_i}{2^{i+1}} ,$$

où

$$A_i = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{i-1}(-1)^k\binom{i}{k}2^k\sum_{t=0}^{i-k}\binom{i-k}{t}t^n$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{t=0}^{i-1}t^n\sum_{k=0}^{i-t}(-1)^k\binom{i}{k}\binom{i-k}{t}2^k .$$

Mais, puisque

$$\binom{i}{k}\binom{i-k}{t} = \binom{i}{t}\binom{i-t}{k} .$$

nous pouvons écrire l'identité

$$\sum_{k=0}^{i-t}(-1)^k\binom{i}{k}\binom{i-k}{t}2^k = \sum_{k=0}^{i-t}(-1)^k\binom{i}{t}\binom{i-t}{k}2$$

$$= \binom{i}{t}\sum_{k=0}^{i-t}(-1)^k\binom{i-t}{k}2^k = \binom{i}{t}(1-2)^{i-t} = (-1)^{i-t}\binom{i}{t} .$$

Nous avons donc

$$A_i = \frac{1}{n!}\sum_{t=1}^{i-1}(-1)^{i-t}\binom{i}{t}t^n .$$

et

$$y_0^{(n)} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{1}{2^{i+1}}\left[i^n - i(i-1)^n + \binom{i}{2}(1-2)^n - \ldots \pm \binom{i}{i-1}1^n\right] .$$

En employant maintenant la formule

$$B_{2n-1} = (-1)^n\frac{2n}{2^{2n}-1}y_0^{(2n-1)} .$$

qui lie les nombres de Bernoulli aux dérivées de la fonction considérée, on obtient la formule qu'on a écrite précédemment.

II. — La deuxième formule pour le calcul des nombres de Bernoulli que nous allons considérer, fut attribuée à LIBRI par CAUCHY (*Œuvres*, 2e série, t. VII, p. 348). On peut l'obtenir immédiatement au moyen de la formule

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum \frac{n!\, f^{(i)}(u)\, u'^{\alpha}\, u''^{\beta} \ldots (u^{(n)})^{\lambda}}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!\, (2!)^{\beta} (3!)^{\gamma} \ldots (n!)^{\lambda}},$$

où Σ représente une somme qui se rapporte aux solutions entières, positives et nulles, de l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + n\lambda = n$$

et où

$$i = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda,$$

laquelle donne la dérivée d'ordre n de y par rapport à x, quand $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$.

En appliquant, en effet, cette formule à la fonction

$$y = \log \frac{\pi x}{\sin \pi x} = -\log\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{3!} + \frac{\pi^4 x^4}{5!} - \ldots\right),$$

on trouve, en posant $n = 2m$, et

$$y = -\log u, \qquad u = 1 - \frac{\pi^2 x^2}{3!} + \frac{\pi^4 x^4}{5!} - \ldots,$$

l'égalité suivante :

$$\left(\frac{d^{2m} y}{dx^{2m}}\right)_{x=0} = \pi^{2m} \sum (-1)^i \frac{(i-1)!\,(2m)!}{\beta!\,\delta! \ldots} \left(-\frac{1}{3!}\right)^{\beta} \left(\frac{1}{5!}\right)^{\delta},$$

où Σ représente une somme qui doit s'étendre aux solutions entières, positives et nulles, de l'équation

$$\beta + 2\delta + \ldots = m,$$

et où

$$i = \beta + \delta + \ldots$$

Mais, d'un autre côté, on a

$$\log \frac{\pi x}{\sin \pi x} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{2m-1}\pi^{2m}}{m(2m)!} B_{2m-1} x^{2m} .$$

On trouve donc

$$B_{2m-1} = \frac{m(2m)!}{2^{2m-1}} \sum (-1)^i \frac{(i-1)!}{\beta!\,\delta!\,\omega!\,\ldots} \left(-\frac{1}{3!}\right)^{\beta} \left(\frac{1}{5!}\right)^{\delta} \left(-\frac{1}{7!}\right)^{\omega} \cdots$$

Cette formule est celle que nous nous proposions d'obtenir.

F. Gomes Teixeira (Porto).

LES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE

Les études que nous avons successivement publiées dans cette Revue[1] sur les Principes de la Géométrie appellent rationnellement, à titre de conclusion, une vue d'ensemble sur la Géométrie tout entière.

Etablir les axiomes de la Géométrie, c'est réduire cette science à être une *application* d'une théorie plus générale et indépendante de tout élément géométrique.

La théorie plus générale dont la Géométrie est une simple application n'est autre que celle des *ensembles*.

Cette théorie, dont la terminologie a été abondamment utilisée, dans ces dernières années, dans de nombreux travaux sur l'Analyse numérique, a reçu peu de développement en ce qui concerne ses parties les plus générales, bien que tous les éléments essentiels de la théorie intégrale des ensembles semblent réunis dans l'œuvre géniale de G. Cantor.

---

[1] *L'Ens. Math.*, 7e année, p. 270-291 ; p. 375-381.

M. Poincaré a esquissé, dans son ouvrage récent « La valeur de la Science », la voie à suivre pour définir le nombre des dimensions et le degré de connexion d'un ensemble. Sous réserve des éclaircissements que nécessiteraient encore ces questions, on peut, dès à présent, énoncer l'*axiome géométrique* sous la forme suivante :

A. — *L'espace ponctuel est un ensemble continu, à trois dimensions, à simple connexion et ouvert.*

Chacun de ces qualificatifs exigerait une explication ressortissant à la théorie des ensembles. Bornons-nous à observer que les propriétés exprimées par l'axiome A ne sont pas, à proprement parler, des attributs de l'espace « en soi », mais spécifient seulement ses relations avec certaines opérations, qui doivent figurer parmi les concepts fondamentaux, au même titre que le concept de point lui-même. M. Poincaré a même émis l'idée, dans l'ouvrage précité, que le nombre des dimensions de l'espace est purement subjectif et pourrait augmenter, notamment si certaines connexions intellectuelles de l'homme venaient à défaillir. La démonstration de l'illustre géomètre ne nous a pas convaincus[1]. En revanche, nous n'apercevons aucun motif pour rejeter *a priori* l'idée que l'on pourrait être amené, par des considérations astronomiques par exemple, à voir dans l'espace ponctuel un ensemble *fermé*, ce qui entraînerait la suppression de l'idée de l'infini géométrique.

De l'axiome A dérive la Géométrie tout entière, sans qu'il soit nécessaire de lui rien ajouter. Toutefois, l'on ne peut pas oublier que la majeure partie de l'intérêt que présente la Géométrie se rapporte à certaines figures et à certaines opérations géométriques, qui, pour cette raison, ont paru constituer des éléments essentiels de la notion d'espace. C'est ainsi que la Géométrie projective a pour objet l'étude des propriétés des figures par rapport aux lignes droites. Cette étude repose uniquement sur les propriétés exprimées par la proposition suivante :

[1] L'accord des diverses sensations musculaires d'accomodation (œil et bras, par exemple) résulte, non pas d'une harmonie préétablie, mais bien d'une éducation de l'esprit : l'enfant cherche dans le voisinage immédiat de son œil les objets dont il reçoit une impression lumineuse (Helmholtz, Taine, etc.).

P. — *Les droites sont des lignes illimitées et ouvertes formant un ensemble qui jouit des propriétés suivantes :*

1° *une de ces lignes est déterminée dans l'ensemble par la condition de passer par deux points distincts, d'ailleurs quelconques, de l'espace ;*

2° *toutes les lignes de l'ensemble qui s'appuient sur deux d'entr'elles concourantes sont situées sur une même surface ;*

3° *l'ensemble présente la propriété de l'unicité de l'asymptotique.*

La proposition P réduit la Géométrie projective à n'être qu'une *application* de la théorie plus générale des ensembles de lignes définis ci-dessus. C'est cette théorie générale qui constitue, à proprement parler, un chapitre de la Géométrie. Rationnellement, les lignes droites n'ont pas plus à intervenir en Géométrie que l'espace ponctuel dans la théorie des ensembles ; d'ailleurs elles ne se distinguent des autres lignes illimitées et ouvertes par aucune propriété *géométrique*, car les propriétés stipulées par la proposition P, non seulement se rapportent à l'*ensemble* des lignes droites (et non à ces lignes elles-mêmes), mais encore s'appliquent à une infinité d'autres ensembles de lignes.

Il est temps d'en finir avec la formule, qui a fait fortune : « les axiomes sont des définitions déguisées ». Pas plus que la proposition A ne définit l'espace ponctuel, la proposition P ne saurait, à aucun titre, constituer une définition ni de l'ensemble des droites, qui n'est pas le seul à jouir des propriétés stipulées, ni, *a fortiori*, des lignes droites elle-mêmes qui y sont à peine visées. De fait, le concept de la ligne droite préexiste à la proposition P. Comme tous les concepts, y compris celui d'espace et celui de temps[1], il a une origine sensorielle, empirique : c'est là tout le *credo* de la théorie empiristique de la connaissance par opposition à l'*apriorisme* kantien et à la conception métaphysique (existence d'un *substratum* en soi). Bien que le concept de ligne droite ne corresponde à aucun objet matériel et passible d'expérience, il n'en existe pas moins dans l'esprit, et ses propriétés peuvent

[1] Lire l'admirable analyse : GUYAU. *La Genèse de l'idée de Temps*, Alcan, Paris. 1902.

être constatées au moyen de l'*intuition* prise dans son sens étymologique (*intueri*, contempler), bien entendu à condition de n'en inférer aucune conséquence physique ; mais ces propriétés ne constituent pas une définition.

A vrai dire, on peut objecter que le sens d'un mot est arbitraire ; oui, mais le bel avantage de lui donner une signification plus générale, si l'on est obligé de lui trouver un remplaçant ! N'est-il pas plus raisonnable, lorsque l'on est amené à généraliser certaines théories, d'adopter une terminologie spéciale pour la catégorie plus générale ainsi définie, en maintenant aux anciens termes leur signification ? En ce faisant, on éviterait les formes paradoxales et l'on s'abstiendrait de fournir des arguments — combien pauvres à la vérité ! — aux métaphysiciens et aux théologiens, qui n'ont jamais en vue la recherche de la vérité, mais qui poursuivent inlassablement, dans les prétendues antinomies de la raison, la justification du fragile et puéril roman murmuré par la tarentule qui les obsède.

Un concept, pour exister, n'a pas besoin d'être défini *logiquement*. Le concept de point, le concept de nombre entier sont parfaitement *définis*, bien qu'ils ne soient pas susceptibles d'être ramenés, par des *définitions logiques*, à d'autres concepts plus généraux. Mais ces concepts admettent des *axiomes* permettant de faire rentrer leur étude dans des théories plus générales.

En somme, du point de vue strictement rationnel, la proposition P ne doit pas être considérée comme un axiome *géométrique ;* mais elle constitue bien un axiome pour la théorie des lignes droites, qu'elle réduit ainsi à n'être qu'une application de la Géométrie.

La Géométrie métrique donne lieu aux mêmes observations. Elle constitue la théorie des *déplacements sans déformation*, concept manifestement issu de la notion la plus vulgaire des corps solides naturels. Comme celui de la ligne droite, ce concept doit rationnellement être exclu de la Géométrie ; sa théorie devient une application de celle-ci en vertu de la proposition suivante :

M. — *Les déplacements sans déformation sont des trans-*

formations ponctuelles formant un groupe métrique qui jouit de la propriété archimédienne et dont les lignes axiales forment un ensemble présentant la propriété de l'unicité de l'asymptotique.

Les propositions A, P et M sont des axiomes exprimant simplement que certains concepts rentrent dans des catégories plus générales (c'est d'ailleurs là le contenu de toute proposition, en dépit de la récente théorie logique de l'implication). Ces propositions impliquent des théorèmes d'existence pour ces catégories plus générales. Ces théorèmes ressortissent, pour l'axiome A, à la théorie des ensembles et, pour les axiomes P et M (le premier de ces deux axiomes est, de fait, une conséquence du second moyennant une définition convenable des lignes droites), à la Géométrie.

G. Combebiac (Limoges).

ERRATA

Correction à l'article : *Les deux bases de la métrique* (n° du 15 septembre 1905, p. 375—381).

Page 378, avant-dernière ligne : au lieu de « droite », il faut lire partout « ligne D ».

Page 379, 3e alinéa : au lieu de « en ligne droite », il faut lire partout « situés sur une même ligne D ».

SUR LE MOUVEMENT RELATIF ET LE MOUVEMENT DE LA TERRE

La question du mouvement absolu a été agitée il y a quelque temps. Elle est en quelque sorte, d'actualité.

Pour définir un mouvement il faut se donner un corps solide de comparaison, par exemple un trièdre trirectangle T,

et une horloge. Prenant T comme trièdre de référence et mesurant le temps à l'aide de l'horloge, on dira qu'un point est en mouvement *par rapport à T*, si les coordonnées de ce point sont des fonctions du temps.

Si nous changeons le trièdre T ou l'horloge, le point aura un nouveau mouvement tout différent du premier. Ne nous préoccupons pas de l'horloge, laissant de côté la question *du temps absolu*. Les différents trièdres que l'on peut choisir sont en mouvement les uns par rapport aux autres, aucun d'eux plutôt qu'un autre ne peut être regardé comme fixe. Nous ne pouvons observer, nous ne pouvons même concevoir que des mouvements relatifs.

Il n'y a, en particulier aucune espèce de raison de dire que la terre tourne plutôt que les astres. Ce qui est réel et constatable c'est seulement le mouvement relatif du ciel par rapport à la terre, ou de la terre par rapport au ciel.

Ainsi s'expriment les partisans du mouvement relatif, que je nommerai pour abréger « relativistes ». Au premier abord leur thèse semble indiscutable. Les personnes dont les connaissances mécaniques et astronomiques sont peu développées l'admettent sans conteste. La chose pourtant est moins simple qu'elle n'en a l'air.

Au début de la dynamique on place le principe de l'Inertie : « Un point matériel isolé a un mouvement rectiligne et uniforme ». Un mouvement rectiligne et uniforme : cela n'est défini que si l'on donne une horloge et un solide de comparaison. Si le principe est vrai pour un certain solide et une certaine horloge, il deviendra faux lorsqu'on changera soit l'horloge soit le solide. Si l'horloge seule est changée, le mouvement cessera d'être uniforme sans cesser d'être rectiligne. Si on remplace le solide par un autre animé par rapport au premier d'une translation rectiligne et uniforme, le principe reste vrai.

Pour énoncer le principe de l'inertie convenablement on ne doit pas dire le principe de l'inertie est vrai, on doit dire : « On peut trouver un solide de comparaison et une horloge, tels que le principe soit vrai. »

Le mouvement par rapport à ce solide possède donc des

propriétés que les autres mouvements ne possèdent pas. Nous pouvons *convenir* de dire que ce solide est en repos absolu, ou bien le considérer comme animé de telle translation rectiligne et uniforme que nous voudrons.

Les choses à la surface de la terre ne se passent pas de la même façon que si elle était immobile. La rotation fait naître des forces apparentes, la force centrifuge, la force centrifuge composée. Si l'on ignorait que la terre tourne , on ferait de ces forces des forces réelles au même titre que la pesanteur. Les lois de la chute des corps deviendraient alors fort bizarres et inexplicables.

Soit, répondront les relativistes, ces lois sont bizarres ; elles rompent la symétrie entre la droite et la gauche, qu'on s'attend à voir régner dans l'univers. Nous pouvons les admettre, et regarder la terre comme fixe, ou bien admettre des lois plus simples, et supposer que la terre tourne. Cette dernière hypothèse plus commode n'a cependant rien de nécessaire.

A celà on peut faire deux réponses. En premier lieu l'opinion relativiste a changé de caractère. Tout d'abord le relativiste disait : « Aucun corps de comparaison n'est privilégié et ne peut être considéré comme en repos absolu. Tous les trièdres auxquels on peut rapporter le mouvement se valent ». Il dit maintenant « Il y a bien un corps de comparaison privilégié, en ce sens que par rapport à ce corps les lois du mouvement sont plus simples.

Par rapport à ce système les points matériels obéissent au principe de l'inertie, qui ne se vérifie pas pour les autres.

Il est plus simple, sans être *obligatoire* de le considérer comme en repos absolu (ou tout au moins sans rotation) ».

M. Poincaré, duquel se réclame les relativistes, dit quel que part : Il est plus commode d'admettre que la terre tourne. Mais M. Poincaré donne au mot commode un sens très particulier. La distance en géométrie est une notion indéfinissable. On ne peut donc pas dire qu'un mètre en acier, à température constante, a une longueur invariable. Si tout grandissait proportionnellement au temps et mon mètre étalon aussi, le coefficient étant le même pour tous les corps, les

mesures expérimentales seraient les mêmes que les mesures actuelles. Mais l'hypothèse de l'invariabilité des corps est *plus commode*.

Donc le relativiste conséquent avec lui-même ne dira pas seulement : « Il est plus commode de supposer que la terre tourne », il dira : « Il est plus commode de supposer que la terre est ronde, qu'elle a une forme invariable, qu'elle est plus grosse qu'une bille de billard non contenue dans son intérieur. »

Or le mouvement n'est défini que par rapport à un corps de comparaison invariable. Si l'on n'admet pas l'existence de pareils corps, on ne peut admettre la définition du *mouvement, même relatif*.

Laissons maintenant parler le partisan du mouvement absolu. Si le théorème de Coriolis nous fait admettre que la terre tourne la loi de l'attraction universelle nous fait admettre sa révolution. Les nombreuses conséquences expérimentales de cette loi la rendent indubitable. Or si le soleil tournait autour de la terre, entraînant avec lui son cortège de planètes la loi serait fausse et devrait être remplacée par une loi compliquée. Considérons en effet la terre, le soleil, et la planète Mars en opposition. L'accélération produite par la terre sur le soleil serait grande, celle produite par le soleil sur la terre serait petite, la terre restant sensiblement immobile. La terre aurait donc une masse bien plus grande que le soleil. Au contraire Mars obéirait à l'action du soleil, non à celle de la terre pourtant plus proche de lui lorsqu'il est en opposition.

Le relativiste fera à cela la même objection que précédemment ; la réponse à cette objection sera la même.

Nous devons dire : « Il existe une horloge et un système d'axes tels, que pour les mouvements définis par rapport à eux la loi de l'attraction universelle soit vraie ». On peut nommer temps absolu le temps indiqué par cette horloge. Quand au système d'axes on peut le regarder comme absolument fixe, ou comme animé de telle translation rectiligne et uniforme qu'on voudra.

Les partisans du mouvement absolu tiennent en réserve un

autre argument indépendant des lois de la dynamique, et présentant une grande simplicité. Dans le vide interplanétaire la lumière se propage en ligne droite, avec une vitesse constante, la même dans toutes les directions.

Dans la phrase qu'on vient de lire il est question du mouvement de la lumière. Cela suppose donc une horloge et un corps de comparaison. On peut regarder ce corps de comparaison comme fixe, le temps mesuré par l'horloge comme le temps absolu. La lumière fournit donc une sorte de définition du mouvement absolu.

De là dérive la preuve du mouvement de la terre par le phénomène de l'aberration. Une étoile E vue de la terre T n'est pas vue dans la direction TE. Elle est vue dans la direction obtenue en composant la vitesse de la lumière dirigée suivant TE avec une vitesse égale et contraire à celle de la terre. L'aberration annuelle prouve la révolution de la terre autour du soleil. Bien que beaucoup plus faible, l'aberration diurne peut servir à prouver la rotation du globe. Quant à l'effet d'aberration produit par le mouvement de tout le système solaire dans l'espace, il est inconstable par l'observation.

Le mouvement mis en évidence par l'aberration est encore si l'on veut un mouvement relatif, mais cette fois ce n'est pas un mouvement relatif par rapport à un autre corps matériel. C'est un mouvement relatif par rapport à l'Ether.

Le relativiste objecte le caractère purement expérimental de cette notion. Ce n'est pas à mon sens plus expérimental que tout autre résultat de l'observation des corps célestes. *Sans la propagation rectiligne de la lumière, ces observations ne pourraient rien nous apprendre.*

La lumière, sur bien d'autres points, fournit du reste l'absolu qui nous manque. La longueur d'onde dans le vide, de la raie D du spectre, la durée de la vibration fournissent des étalons de longueur et de temps, la trajectoire du rayon lumineux fournit la ligne droite, et les notions indéfinissables de la géométrie et de la mécanique acquièrent ainsi un sens concret. Il y a sur ce sujet une belle conférence de Lord Kelvin.

Le relativiste insistera sans doute sur le caractère purement expérimental de l'explication précédente. Il voudrait une notion à priori du mouvement absolu. Il oublie que les notions même de la géométrie, comme la ligne droite et la distance n'ont de valeur pratique que par leur côté expérimental. Comme je l'ai montré plus haut, c'est une sorte de convention de dire qu'une barre d'acier à température constante conserve une longueur invariable. Cette convention est une façon commode de traduire ces résultats : «Deux barres pimitivement superposables le demeurent toujours, et deux barres superposables à une 3° sont superposables entre elles. » S'il n'y avait pas de corps solides il n'y aurait sans doute pas de géométrie métrique. Cette géométrie s'établit à priori, sans recours à l'expérience ou à l'intuition. Mais elle n'acquiert de valeur pratique qu'en prenant contact avec l'expérience. Dans toutes les applications pratiques de la géométrie, (sauf un très petit nombre) on se sert des rayons lumineux. Or ce sont eux justement qui nous révèlent le mouvement absolu.

Les relativistes ne voient pas, semble-t-il, le sens profond du système de Copernic. Il nous révèle la structure de l'univers. Faire tourner toutes choses autour de la terre c'est faire de notre globe le centre du monde. Copernic a montré au contraire en la terre une planète comme les autres. Le soleil est une étoile sembable aux autres. Très éloignées les unes des autres, les étoiles ont des mouvements propres très petits par rapport aux distances qui les séparent. Dans quatre régions du ciel différentes prenons quatre étoiles sans parallaxes ni mouvements propres sensibles. Nous pouvons considérer cet immense tetraèdre comme invariable pendant un temps très long. En le prenant comme solide de comparaison nous pourrons considérer tout mouvement par rapport à ce corps comme un mouvement absolu. Pour tout corps animé par rapport à celui là d'un mouvement de rotation, les étoiles auraient des mouvements d'autant plus rapides qu'elles seraient plus éloignées.

Si on admet de plus que les étoiles visibles ont des mouvements propres dans tous les sens, et que la moyenne de leurs vitesses est sensiblement nulle, on décèle ainsi le mouve-

ment emportant vers la constellation d'Hercule, le soleil et toutes les planètes.

En résumé le mouvement absolu se définit par deux sortes de considérations: Par la dynamique et par l'optique. Les considérations d'optique paraissent plus simples, plus faciles à faire comprendre aux débutants. Pourtant l'argument dynamique a sa valeur. Qu'un philosophe irréfléchi vienne me dire. Le mouvement relatif seul est réel. Que je tourne sur moi même ou que tout tourne autour de moi, c'est la même chose. Il sera arrêté de suite par la remarque suivante: «La forme d'équilibre d'un fluide n'est pas la même s'il tourne autour d'un axe, ou s'il est fixe. Une écrémeuse centrifuge ne fonctionnerait pas, si au lieu de la faire tourner sur son axe, on faisait tourner autour d'elle la salle qui la contient, le globe terrestre, le soleil, Sirius, Véga et tout le reste de l'univers.»

Concluons: Une proposition a un sens, si elle est vérifiable par l'observation. Lorsque je regarde tourner mon écrémeuse de tout à l'heure, si quelqu'un vient me dire: Cet objet ne tourne pas, c'est vous qui tournez et la salle qui le contient, je répondrai: La surface du niveau du lait n'est pas un plan horizontal, donc c'est elle qui tourne. De même, et d'une façon presqu'identique l'aplatissement de la terre prouve sa rotation. Ce que le langage énonce, hors le cas de la métaphysique, ce sont toujours des faits constatables, ou des ensembles de faits constatables, ou des propositions générales reliant des faits constatables. Dire, tout se passe comme si la terre tournait, ou dire: la terre tourne c'est la *même chose*. Il arrive souvent dans les discussions philosophiques, que l'un des deux interlocuteurs voit derrière le fait physique qu'il énonce une sorte de vérité métaphysique. C'est là une faute de logique. Dire que A attire B, pour le mathématicien celà veut dire: «l'accélération de B est dirigée vers A.» Pour quelques philosophes celà veut dire: «B a une sorte de volonté, de désir qui le dirige vers A.» On sait les discussions qui eurent lieu autrefois sur ce sujet. De même, dire: La terre tourne, c'est dire: «Les phénomènes qui accompagnent la rotation d'un objet se produisent tous pour la terre.» Si

l'on conteste la légitimité de ce langage je répondrai : Toutes nos affirmations sont de même espèce, même les plus simples et les plus vulgaires. Je n'insisterai pas là dessus, cela m'entraînerait trop loin.

J. RICHARD (Dijon).

SUR LES THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA MÉCANIQUE ET LE CALCUL VECTORIEL

L'enseignement de la mécanique débute généralement aujourd'hui par une théorie des vecteurs dont la statique n'est plus ensuite qu'une application. Il y aurait avantage, semble-t-il, à opérer de même pour la dynamique en dégageant la nature purement géométrique de certains théorèmes.

La définition habituelle de la dérivée d'un vecteur lui suppose une origine fixe ; elle se généralise facilement lorsque l'origine est variable. Soit le vecteur I appliqué au point A, tous deux étant fonction du paramètre λ ; pour une variation $d\lambda$, A et I deviennent A′ et I′ : nous appellerons différentielle du vecteur donné le système formé par A′, I′ et par I changé de sens, appliqué en A.

En coordonnées cartésiennes soit I (X, Y, Z) appliqué en A (xyz); sa différentielle sera le système :

$$\begin{cases} X + dX \quad Y + dY \quad Z + dZ \quad \text{appliqué en } x + dx,\ y + dy,\ z + dz \\ -X \quad -Y \quad -Z \quad \text{»} \quad x,\ y,\ z \end{cases}$$

Ses éléments de réduction par rapport à A en négligeant les termes de second ordre

Résultante	dX, dY, dZ
Moment	$Xdy - Ydx$, $Ydz - Zdy$, $Zdx - Xdz$

La définition de la dérivée résulte immédiatement de ces formules ; on voit qu'elle se compose outre la dérivée hodographique ordinaire d'un couple dont la signification géométrique est évidente.

Si au lieu d'un seul vecteur nous en considérons un système, sa dérivée sera constituée par l'ensemble des dérivées de chaque vecteur. Soient X_0, Y_0, Z_0 et L_0, M_0, N_0 les coordonnées du système à un moment donné. Celles de sa différentielle seront

$$X_1 = \Sigma(X + dX) + \Sigma(-X) = dx_0 , \qquad Y_1 = dY_0 , \qquad Z_1 = dZ_0 .$$

D'une façon analogue pour le couple

$$L_1 = dL_0 , \qquad M_1 = dM_0 , \qquad N_1 = dN_0 .$$

Passant ensuite à la dérivée on pourra énoncer le théorème fondamental :

Les coordonnées du système dérivé sont les dérivées des coordonnées du système primitif. Un cas particulier intéressant est celui où le couple envisagé précédemment est nul

$$Xdy - Ydx = Ydz - Zdy = Zdx - Xdz = 0 .$$

Il faut que A soit un point fixe ou que

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} ,$$

c'est-à-dire que le vecteur doit être dirigé suivant la tangente à la courbe décrite par A. Ceci se présente pour la vitesse d'un point mobile dont l'accélération est la dérivée au sens le plus général.

Etant donné un système formé par de pareils vecteurs qu'on peut appeler tangentiels, si par des points arbitraires fixes on leur mène des vecteurs égaux, on obtient un deuxième système dont la dérivée est identique à celle du premier et se réduit, du reste, à une résultante unique ; c'est là le principe des hodographes.

Il est aisé de voir que les théorèmes généraux de la Méca-

nique sont contenus dans le précédent. Dans un ensemble de points mobiles les forces appliquées à chaque point constituent le système dérivé des quantités de mouvements. La relation

$$X_1 = \frac{dX_0}{d\lambda}, \quad Y_1 = \frac{dY_0}{d\lambda}, \quad Z_1 = \frac{dZ_0}{d\lambda},$$

n'est autre que le théorème des quantités de mouvement projeté ; et :

$$L_1 = \frac{dL_0}{d\lambda}, \quad M_1 = \frac{dM_0}{d\lambda}, \quad N_1 = \frac{dN_0}{d\lambda},$$

celui des moments des quantités de mouvement.

Si on remarque que X_0 est la vitesse V_x du centre de gravité multipliée par la masse totale Σm, l'une des relations précédentes :

$$X_1 = \frac{dX_0}{d\lambda} = \Sigma m \,.\, \frac{dV_x}{d\lambda}$$

exprime que la résultante générale des forces, X_1, est la dérivée de la quantité de mouvement du centre de gravité qui aurait la masse Σm ; c'est le principe de la conservation de son mouvement.

Quant au théorème des forces vives, un calcul très simple montrera qu'il revient à exprimer la condition nécessaire et suffisante pour que la quantité de mouvement soit un vecteur tangentiel, jointe à ce que son module est égal à $m\,\frac{ds}{dt}$.

Georges MONNET (Lyon).

MÉTHODE RAPIDE POUR RETROUVER LES FORMULES FONDAMENTALES DES TRIANGLES SPÉRIQUES

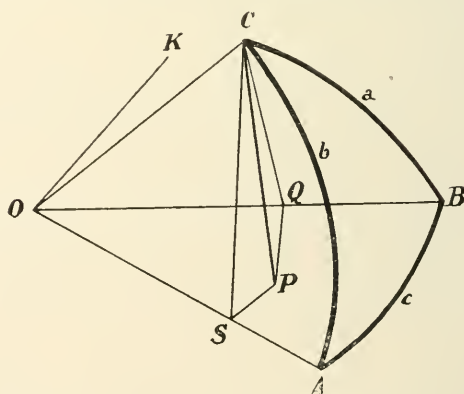
Soit A B C un triangle sphérique tracé sur la sphère de rayon égal à l'unité. On désigne par a, b, c les côtés BC, AC, AB du triangle.

Du point C, on abaisse la perpendiculaire C P sur le plan A O B ; du point P, on abaisse les perpendiculaires PQ et PS sur O B et O A respectivement et on joint le point C aux points Q et S :

$$\widehat{PSC} = A \quad \text{et} \quad \widehat{PQC} = B\,.$$

L'examen de la figure conduit aux valeurs :

$$OQ = \cos a \quad (1) \qquad CQ = \sin a \quad (2)$$
$$OS = \cos b \quad (3) \qquad CS = \sin b \quad (4)$$



$$PS = CS \cos \widehat{PSC} = \sin b \cos A \quad (5)$$

$$PQ = CQ \cos \widehat{PQC} = \sin a \cos B \quad (6)$$

$$CP = CQ \sin \widehat{PQC} = \sin a \sin B \quad (7)$$

$$CP = CS \sin \widehat{PSC} = \sin b \sin A \quad (8)$$

1. — Des valeurs (7) et (8), on déduit :

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b},$$

et, permutant, dans la fig., B et b avec C et c,

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin c},$$

d'où

(I) $$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c},$$

2. — Si on projette, sur OQ, le contour rectiligne OSPQ, on obtient :

$$OQ = (OS)_{OQ} + (SP)_{OQ} + (PQ)_{OQ} = OS \cos c + SP \sin c,$$ [1]

et, à cause de (1), (3) et (5),

(II) $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

3. — En projetant le même contour rectiligne OSPQ sur OK perpendiculaire à OS, il vient :

$$(OQ)_{OK} = (OS)_{OK} + (SP)_{OK} + (PQ)_{OK}$$

ou

$$OQ \sin c = SP + PQ \cos c$$

et, à cause de (1), (5) et (6),

(III) $$\cos a \sin c = \sin b \cos A + \sin a \cos c \cos B.$$

4. — Divisant les deux membres de la relation (III) par $\sin a$ et remplaçant $\frac{\sin b}{\sin a}$ par $\frac{\sin B}{\sin A}$ (form. I), $\frac{\cos a}{\sin a}$ par $\operatorname{cotg} a$ et $\frac{\cos A}{\sin A}$ par $\operatorname{cotg} A$, on a :

(IV) $$\operatorname{cotg} a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \operatorname{cotg} A$$

5. — L'application des formules (II) et (III) au triangle polaire de ABC donne immédiatement :

(V) $$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

(VI) $$\cos A \sin C = -\sin A \cos C \cos b + \sin B \cos a.$$

E. Brand (Bruxelles).

---

[1] La notation $(OS)_{OQ}$ exprime la projection de OS sur OQ.

RÉFORMES A ACCOMPLIR

DANS

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES[1]

(Suite).

Opinion de M. JULES ANDRADE

professeur à la Faculté des sciences de Besançon.

1. — Les motifs qui invitent aujourd'hui un grand nombre de mathématiciens à s'intéresser à l'enseignement de leur art sont fort divers ; les uns dérivent d'une curiosité purement esthétique ou d'un sentiment bien naturel commun aux artistes et aux alpinistes ; comme l'artiste, le touriste parvenu au sommet d'une cime aime à regarder ses élèves passer par les sentiers qu'il a parcourus le premier ; d'autres motifs, d'autres soucis interviennent en France dans la discussion de l'économie des programmes de nos écoles scientifiques ; là il s'agit d'amener, sans trop de surcharges, à portée de la connaissance des élèves, soit les grands faits nouveaux de la science, soit des méthodes nouvelles d'investigation.

Dans cet ordre d'idées il serait très intéressant de caractériser l'évolution historique des rapports de maître à élève à l'école normale, évolution qui a abouti, dans la section mathématique, à la formation d'une pléiade de jeunes savants du plus haut mérite ; dans le même ordre d'idées encore, quoiqu'à un point de vue moins strictement scientifique *l'histoire des variations* des programmes de l'école polytechnique, l'influence d'abord bienfaisante de cette école sur la culture générale en France ; l'incohérence actuelle de son programme général intérieur, ses causes et ses effets sociaux.

---

[1] Voir dans le précédent numéro, p. 382-387.

telles seraient dans l'ordre d'idées que je viens d'indiquer les parties essentielles d'une étude d'ensemble sur *ce qu'on appelait hier*, avec l'évidente exagération d'un langage centralisateur à l'excès : le haut enseignement mathématique français. Malgré l'intérêt que peut offrir pour nous Français, le point de vue précédent, je ne m'y maintiendrai pas ici davantage.

2. — Car, voici d'autres motifs, moins élevés en apparence, mais d'un intérêt bien plus général, de nous intéresser à l'enseignement mathématique. Il s'agissait tout à l'heure de l'enseignement donné à un noyau d'étudiants *déjà formés*, et les méthodes de travail que l'on peut discuter à leur égard ont un intérêt indéniable ; mais combien plus pressantes sont les questions qui intéressent l'*enseignement mathématique d'initiation*.

Quel professeur n'a rencontré des jeunes hommes intelligents, qu'une mauvaise initiation avait d'abord écartés des mathématiques dont ils s'étaient éloignés découragés ou même dégoûtés ? La question qui va se poser devant nous n'intéresse pas seulement les futurs ingénieurs ou professeurs, elle intéresse l'éducation générale.

La question de l'enseignement mathématique élémentaire n'est pas non plus, comme pourraient le croire des esprits superficiels, une question de pure pédagogie, — j'entends par là, une question qui ne concerne que des professeurs et leur art ; tout au contraire, l'enseignement mathématique d'initiation, son économie, sa maturité intéressent au plus haut point l'adolescent qui va choisir une carrière et scruter ses aptitudes.

La question semble du moins n'intéresser que les candidats aux professions dites libérales. Détrompez-vous : elle intéresse au plus haut degré, même la culture pratique donnée à l'école professionnelle, et là, elle intéresse à la fois le maître et l'élève.

Voici à cet égard une leçon de choses fort suggestive.

Dans un enseignement de mécanique appliquée j'avais été frappé de voir combien les meilleurs élèves d'une école professionnelle étaient gênés pour mouvoir un raisonnement dans l'espace à 3 dimensions et lui adapter une réalité qu'ils

connaissaient cependant fort bien. J'avais fait part de mon étonnement au directeur de cette école, et j'avais insisté sur l'utilité qu'il y aurait d'enseigner à ces jeunes gens le Vme livre de la géométrie, qui forme avec le Ier livre *la géométrie de l'ajustage*[1]. Le directeur, artiste mécanicien fort renommé me répondit : « Le Vme livre ! . . oh, ils n'ont pas besoin « d'aller si loin... ; c'est moi-même qui ai rédigé leurs programmes, et pour le faire je me suis demandé tout simplement, quelles leçons de géométrie m'avaient suffi ; or le Vme « livre ne figurait pas dans ces souvenirs. »

Le grand artiste qui parlait ainsi était un mauvais pédagogue, car il se figurait que là où son intuition, son génie même avaient suffi, l'ignorance des autres saurait aussi improviser. Evidemment, dans l'esprit de mon interlocuteur, le Vme livre, par son numéro d'ordre seul faisait l'effet d'une chose lointaine; certainement aussi cet artiste chargé de la direction d'une école professionnelle ignorait combien l'enseignement élémentaire avait changé en se simplifiant d'une génération à l'autre; il ignorait que dans l'enseignement secondaire et je crois même primaire de l'Italie avait déjà disparu cette distinction dangereuse d'une géométrie plane et d'une géométrie de l'espace, comme elle devra tôt ou tard disparaître partout.

En tout cas nulle part ailleurs qu'à l'école professionnelle n'est aussi périlleux l'oubli des trois dimensions de l'espace ; que devient sans elles l'intelligence des machines à fraiser ou la prévision de nouvelles machines-outils. Ces remarques nous montrent que l'importance d'un bon enseignement mathématique d'initiation est plus grande encore à l'école professionnelle qu'au collège.

Au collège en effet, nombreuses sont les années d'études, l'initiation peut parfois être reprise, et puis, lors même qu'une pédagogie détestable est officiellement consacrée, elle l'est jusque dans les programmes des concours plus élevés où les éléments tiennent une place secondaire et l'élève n'a pas trop à en souffrir; et d'ailleurs tôt ou tard il refait lui-même la philosophie de ses connaissances.

---

[1] J'adopterai la classification de Legendre qui est encore en usage, quoique détestable.

Au contraire, dans les brèves leçons de l'école professionnelle la composition et le développement du programme des mathématiques d'initiation ont une importance de premier ordre, car elles sont offertes à l'esprit de l'artisan ou du technicien non pas seulement pour satisfaire les besoins esthétiques d'une culture générale, mais bien plutôt pour armer l'esprit de ce minimum de notions à la fois abstraites et vivantes sans lequel l'instinct de l'inventeur est sans guide, sans soutien.

Vous êtes vous demandé quelquefois d'où peut provenir la supériorité des Américains dans la création ou dans la transformation des machines-outils en tous genres. C'est que, sans avoir de manuel officiel de géométrie les Américains ont une intuition toute réaliste de la géométrie du mouvement.

Nous venons de voir que l'enseignement mathématique d'initiation au collège acquérait une énorme importance même pour l'école professionnelle dont les programmes sont découpés un peu au hasard à travers les programmes du lycée. Mais à le considérer en lui-même l'enseignement mathématique élémentaire mérite d'attirer l'attention des éducateurs.

3. — L'enseignement des éléments des sciences a surtout pour but de contribuer à l'éducation du raisonnement et au développement des facultés d'invention. On veut apprendre à l'enfant non à savoir, mais à comprendre. Comprendre, c'est saisir entre deux ou plusieurs faits envisagés d'abord comme distincts un rapport de causalité ; ce rapport est presque toujours pressenti avant d'être explicitement précisé, et une bonne éducation scientifique doit montrer comment naissent ces pressentiments intuitifs d'une loi, avec autant de soin que l'exposé précis de la loi elle-même.

La difficulté propre à la pédagogie mathématique tient ici d'une part au petit nombre des faits primitifs et d'autre part à la diversité en apparence infinie des cas particuliers ; certains enfants ont l'esprit synthétique, d'autres en plus grand nombre ont l'esprit analytique, et les moins originaux sont les mieux pondérés. Ajoutez à cela l'extrême inégalité des capacités d'attention et vous sentirez de suite la nécessité

pour une bonne éducation mathématique de grouper les élèves par le degré de maturité d'esprit beaucoup plus que par l'âge ou par le numéro de leurs classes.

Et, à vrai dire, est-ce seulement pour l'enseignement mathématique qu'il faudra modifier les sectionnements et les groupements d'études ? Evidemment non, car si notre remarque d'une grande inégalité dans les capacités d'attention par rapport à l'âge est d'une psychologie exacte, la portée de cette remarque s'étend à toute l'éducation intellectuelle.

L'unité pédagogique ne sera donc plus *la classe*, groupement complexe de branches disparates et variant avec la fluctuation des programmes, mais l'*étude* définie pour chaque branche distincte, et correspondant à une certaine maturité d'esprit; il arrivera fréquemment que dans un même groupe d'âges se verront des élèves appartenant à des groupes de maturités différentes. Cette diversité est conforme à la vie intellectuelle et elle donnera d'ailleurs les moyens aux retardataires dans une branche de graduer leurs efforts et leurs progrès. Il y aura donc dans chaque branche des *stades de maturité*. Cette réforme dans l'education du lycée est fatale, elle est conforme à la fois à l'hygiène intellectuelle et aux besoins de l'activité moderne grandissante. La vie est si courte et pour nos enfants le besoin est si grand de connaître tôt leurs aptitudes.

4. — Pour ne point rester dans les généralités je vais en quelques mots, préciser les trois stades principaux qu'une pratique attentive de l'enseignement et l'étude de la psychologie réelle de l'enfant ont suggérés ;

Premier Stade : Qu'il s'agisse des nombres ou des figures, l'enfant ne subit d'abord que des impressions séparées, et alors même que sa faculté de généralisation est déjà en germe, elle dort ; l'idée du *comptage* ou de la correspondance à établir entre les éléments de deux pluralités dégagées peu à peu de tous autres attributs que cette correspondance même, cette idée qui lui paraîtra plus tard si familière, est la première conquête que son esprit doit faire dans l'abstrait ; et tant *que son heure n'est pas venue*, il est inutile de causer mathématiques avec l'enfant.

A ce premier stade l'art de *reconnaître* puis de *dénombrer* est le seul avec lequel on doive le familiariser, sans chercher d'ailleurs à lui faire comprendre l'économie de la numération.

En même temps *et s'il s'y prête,* on lui montrera à dessiner ressemblant, d'abord à même échelle, ensuite à échelle différente, deux faces d'un même objet simple ; ensuite on matérialisera par des transports successifs de figures d'un même type les phénomènes qui se cachent sous ces mots : « reproduire avec exactitude », « dessiner en proportions ».

Son sens musculaire général non moins que son œil prendra dans ces petites expériences des activités à la reconnaissance desquelles on l'habituera vite ; et un jour sa réflexion sera assez mûre pour qu'il puisse éprouver pour la première fois un étonnement conscient et spontané d'un fait qui, la veille, lui semblait banal ; le fait qu'en exécutant un tour sur lui-même il se retrouve, comme tout à l'heure dans la même situation vis-à-vis des objets environnants.

Qu'il continue à s'étonner de ce fait si simple et l'enfant sera bientôt mûr pour la géométrie.

Ce premier stade est le stade de la reconnaissance du nombre et de la situation.

Deuxième stade : Un beau jour, l'enfant, par exemple fatigué diversement après des marches plus ou moins longues, ou de tout autre manière, a acquis la notion des grandeurs comparables, c'est-à-dire des grandeurs dont on peut définir, concevoir ou expérimenter l'égalité ou l'addition. Ces choses, analogues aux longueurs, dans lesquelles il cherche une réalité le plus possible en dehors de lui, vont être le premier soutien de son arithmétique raisonnée ; et alors au moyen de la répétition, de l'addition et du sectionnement il constitue les premières opérations du calcul ; mais la théorie de ces premières opérations ne dépasse pas encore le champ de la grandeur concrète. Il apprend à former en partant d'une grandeur donnée, une ou plusieurs grandeurs de même espèce.

Troisième stade : Enfin, soit par la variété même des problèmes qu'il traite, soit par l'idée naissante de *cause* ou de

rapport, interprétée sur des phénomènes simples, surgit tout à coup en lui l'idée d'une grandeur variable continue, qui est liée à une seconde variable par une *loi* particulière.

Alors l'idée de fonction est née en lui, son esprit est mûr pour l'étude intelligente de l'algèbre, et pour l'étude des phénomènes naturels traductibles au moyen de cette idée. Dès lors le goût des mathématiques est né en lui et le jour où l'adolescent fait sa première découverte personnelle, si humble soit-elle, par exemple le jour où, après avoir étudié un peu passivement l'homographie, il saisit que cette question d'algèbre va lui donner la clef des propriétés des systèmes optiques centrés, l'étudiant est devenu un mathématicien en herbe.

5. — Il faut donc grouper les élèves par *stades de maturité*[1] dans chaque branche de connaissance et si la psychologie nous apprend qu'il y a plusieurs mémoires, plusieurs aptitudes, comme il y a plusieurs sens, c'est dans l'intelligence psychologique de l'élève que doit consister le rôle de l'éducateur.

Vous me direz que tout ceci est la condamnation du système bureaucratique de l'instruction publique un peu partout, et qu'il faut faire pour les différentes branches de l'ac-

---

[1] *Note de Rédaction :* C'est dans ce même sens que conclu M. le Dr Ed. CLAPAREDE, chef du Laboratoire de Psychologie expérimentale de l'Université de Genève, dans son étude intitulée Psychologie de l'enfant et Pédagogie expérimentale (Librairie Kündig, Genève, 1905). Voici la dernière partie de ses conclusions :

« Si nous passions en revue toutes les recherches contemporaines de psychologie infantile, nous serions amenés toujours davantage à reconnaître — ce que les notes qui précèdent, malgré leur insuffisance, permettent déjà d'apercevoir — que la mentalité de l'enfant ne consiste pas en un groupe de faculté autonomes, parfaites et immuables, mais quelle est la résultante d'une multitude de fonctions qui varient continuellement sous l'action de facteurs divers, l'âge, la croissance, la santé physipue, la fatigue, le mode de travail, l'individualité, etc. »

« Or un enseignement sera d'autant plus profitable qu'on connaîtra davantage la nature de ces fonctions et le déterminisme de leurs variations, puisqu'on pourra alors y adapter d'une façon exacte les programmes et les méthodes pédagogiques. »

« Il faut avouer que jusqu'ici cette adaption, cet ajustement des programmes à la mentalité de l'enfant est encore bien rudimentaire. Dans les écoles primaires et secondaires les enfants sont classés uniquement par *âge*, alors qu'il conviendrait de les répartir par *capacité pour chaque branche*. C'est ainsi qu'un élève devrait pouvoir suivre simultanément la 3me année du cours de mathématiques, par exemple, la 2me année du cours d'allemand, et la 1re année du programme des autres branches. On ne voit pas très bien pourquoi un élève fort en arithmétique, ou dont l'allemand est une des langues qu'il a apprise en bas âge, devrait subir les programmes inférieurs de ces branches d'étude, parce qu'il est bouché pour l'ortographe et la grammaire française. »

« Lorsqu'un tailleur fait un vêtement, il l'ajuste à la taille de son client, et si celui-ci est gros et petit, il ne lui impose pas un costume trop étroit sous pretexte que c'est la largeur correspondant, dans la régle, à sa hauteur. Le cordonnier qui fait un soulier commence par tracer sur un papier les contour du pied qui doit le chausser, et il en note les particularités, voire

tivité humaine pareille réforme, bref, renoncer à la classe définie par un numéro de matricule.

Eh oui! que voulez-vous, l'enseignement et l'éducation demandent des artistes et des psychologues. La première mission de l'éducateur, c'est de découvrir dans les élèves comme dans les maîtres, *les forces vivantes*, *mais perdues*.

Opinion de M. DAV.-EUG. SMITH

Professeur au Teachers College, Columbia University, New-York.

Je pense que votre enquête est appelée à rendre de très grands services. Pour ce qui est de la première question, j'estime que la meilleure manière de renforcer l'organisation de l'enseignement des mathématiques pures, serait de créer une commission qui serait nommée par un Congrès international et qui étudierait le problème dans son ensemble. Il va de soi qu'il n'y a pas lieu d'établir une organisation uniforme dans les différents pays et je crois qu'il est inutile d'en faire l'essai. Cependant il serait bon et utile d'examiner dès maintenant des questions telles que les rapports, au point de vue de l'enseignement, entre la Trigonométrie plane et la Géométrie plane ; entre le Calcul intégral et le Calcul différentiel; entre la Trigonométrie sphérique et la Géométrie dans l'espace, et de sujets semblables. Dans certains pays, on a l'habitude d'introduire de la Trigonométrie

---

les malformations. Le chapelier adapte ses couvre-chefs en même temps à la forme et à la dimension des crânes. »

« Au contraire, le pédagogue habille, chausse, coiffe tous les esprits de la même façon. Il n'a que du tout-fait, et ses rayons ne contiennent pas le moindre choix : quelques numeros de grandeur, c'est vrai, mais toujours la même coupe ! Aussi, parmi les élèves de nos écoles, en voit-on qui sont noyés dans les replis d'un programme trop immense pour leurs faibles aspirations et leurs capacités problématiques, et s'empêtrent à chaque pas dans les basques traînantes de cet uniforme qu'ils ne parviennent à remplir ni jusqu'en haut, ni jusqu'en bas, — tandis que d'autres sont enserrés dans une discipline trop étriquée qui empêche le juste développement de leur personnalité intellectuelle ou morale, en sorte qu'ils ne peuvent se permettre un mouvement sans faire sauter quelque bouton. »

« Pourquoi n'aurait-on pas pour l'esprit les égards dont on entoure le corps, la tête, les pieds... ? »

« La psychologie et la méthode expérimentale appliquée à la pédagogie nous font saisir quel est l'idéal auquel il faut tendre : c'est, je le répete, adapter l'éducation et l'instruction à la mentalité de l'enfant, aussi bien à son type individuel qu'à son degré ou à son étendue. »

« Cet idéal, on peut l'exprimer en trois mots, qui devraient servir de devise aux réformes pédagogiques futures : *l'école sur mesure !* »

plane avant les mesures de la Géométrie plane; dans d'autres pays on n'aborde la Trigonométrie qu'après avoir terminé la Géométrie dans l'espace. En outre il est des pays où l'on néglige complètement la Géométrie dans l'espace. Il me semble que si la question était envisagée à un point de vue étendu et international, il pourrait en résulter des suggestions très utiles, sans que cela entraîne une uniformisation dans l'organisation des études.

Secondement : Quant au rôle que doivent jouer les Universités dans la préparation des maîtres de mathématiques des établissements secondaires, je puis dire que la « Columbia University » a beaucoup travaillé dans ce sens dans ses cours du « Teachers College [1] ». Nous cherchons aussi à atteindre des maîtres qui sont déjà dans les écoles publiques, en organisant pour eux des cours spéciaux extra-universitaires [2].

J'estime que le maître doit non seulement être entièrement versé dans les mathématiques par le moyen du calcul différentiel et intégral, mais qu'il doit aussi savoir, d'une manière très précise, quel est le développement historique des sujets traités, pourquoi ils sont enseignés, comment ils sont présentés dans les différents pays. Un maître expérimenté doit leur montrer comment on doit éveiller et maintenir l'intérêt chez les élèves et quelles sont les meilleures idées pour la direction d'une classe. Chaque maître doit également connaître les liens des mathématiques avec les différentes branches scientifiques et l'application de la science à des problèmes pratiques.

Troisièmement : Quant à l'organisation de l'enseignement mathématique en rapport avec d'autres branches scientifiques, j'en ai déjà parlé dans les n°s 1 et 2 ci-dessus. Je crois que ce serait une grande erreur de favoriser les besoins d'autres sujets scientifiques pour négliger ceux de la pratique. Par ceci je veux dire que, certains maîtres envisagent uniquement les applications des mathématiques à la physique,

---

[1] Voir « les études mathématiques à l'Ecole normale de l'Université Columbia de New-York » l'*Enseignement mathématique*, 6e année, p. 313-316. 1904. (Réd.)

[2] Voir *Columbia University*, Extension Teaching annoncement, Bull. of Information. July 1905. P. 66.

tandis qu'ils négligent à la fois des applications plus importantes et plus directes fournies par l'industrie.

Je ne peux pas concevoir de meilleur moyen permettant d'améliorer l'enseignement des mathématiques secondaires que celui que constituent d'une part, « l'*Enseignement Mathématique* » et d'autre part, les commissions d'études qui seraient nommées par les congrès internationaux.

J'avoue que j'ai été déçu par la nature des travaux présentés à la Section d'Enseignement au Congrès de Heidelberg. Il ne m'a pas semblé que les sujets traités étaient envisagés dans leur véritable sens pédagogique. Il s'agissait le plus souvent de certains détails mathématiques, et non pas d'études approfondies des problèmes généraux de l'éducation mathématique.

Opinion de M. F. Marotte
Professeur au Lycée Charlemagne, à Paris.

Nous croyons utile de reproduire ici les conclusions que M. Marotte place à la fin de son intéressant rapport sur l'enseignement des sciences mathématiques et physiques dans l'enseignement secondaire des garçons en Allemagne *(voir notre compte rendu dans la Bibliographie.*

La Rédaction.

En ce qui concerne les programmes de l'enseignement des sciences, je crois qu'il convient, à l'exemple de ce qui se fait en Allemagne :

Que les programmes officiels ne restent point les programmes détaillés et encyclopédiques qu'ils sont actuellement ;

Qu'ils déterminent seulement les grandes lignes de l'enseignement et assurent, pour toutes les écoles, son uniformité dans la seule mesure où elle est désirable :

Que, dans chaque école secondaire, le plan d'études détaillé et le régime intérieur de chaque enseignement soient fixés, sous un contrôle convenable, par l'assemblée des professeurs spécialistes.

Je crois que cet assouplissement des cadres de notre ensei-

gnement scientifique est une des réformes les plus importantes et les plus urgentes que nous ayons à accomplir; c'est une condition nécessaire du progrès régulier et continu de cet enseignement. Il arrive, en effet, que les programmes détaillés, ou bien fixent l'enseignement et l'empêchent d'évoluer (c'est ainsi que l'enseignement de la géométrie n'a pas sensiblement changé depuis Legendre, malgré les découvertes qui ont renouvelé notre conception scientifique de la géométrie), ou bien imposent les réformes d'en haut, par mesure administrative ce qui amène des résistances du corps enseignant et fait courir le risque qu'elles soient mal adaptées aux nécessités scolaires).

J'ai montré (p. 48) que cette transformation peut être faite sans modifier en rien notre régime d'examens. Ce n'est pas que je sois partisan de ce régime : je crois que nos examens sont des bandelettes qui enserrent et momifient notre enseignement et qu'il faudra bien délier; mais c'est là une question complexe que je ne puis traiter ici.

En ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, je crois qu'il convient :

1° De l'adapter à la division en deux cycles de notre enseignement secondaire, en lui donnant, dans le premier cycle, un caractère plus expérimental et intuitif, dans le second cycle, un caractère plus logique et critique;

2° De le rapprocher de la réalité :

En exerçant les élèves à reconnaître les notions mathématiques dans les objets et les phénomènes qui les entourent;

En diminuant la part exagérée faite à la logique verbale, au calcul numérique vide de contenu;

En dirigeant l'enseignement de l'algèbre de façon à faire manier aisément les notions de fonction, de représentation graphique, de dérivée, d'approximation, par lesquelles les mathématiques prennent contact avec le monde physique et la réalité;

En faisant du dessin géométrique une partie intégrante de la géométrie, de façon à faire l'éducation géométrique de l'œil et de la main, à développer l'imagination de l'espace et à donner une meilleure compréhension du dessin.

ENQUÊTE SUR LA MÉTHODE DE TRAVAIL DES MATHÉMATICIENS

LES RÉSULTATS[1] — II

Question 1 b[2].

Ce goût est-il héréditaire chez vous? Avez-vous eu dans votre ascendance, ou y a-t-il parmi les autres membres de votre famille (frères et sœurs, oncles, cousins, etc.) des personnes spécialement douées au point de vue mathématique? Leur exemple ou leur influence personnelle ont-ils été pour quelque chose dans votre inclination du côté des mathématiques?

Cette question a provoqué 76 réponses, dont plus du tiers (29, soit 38,2 %) sont franchement négatives, et les autres (47, soit 61,8 %) ne peuvent passer pour positives qu'à la condition de se montrer peu exigeant en fait de preuves d'hérédité, et de se contenter souvent d'indices aussi légers qu'un cousin polytechnicien, un frère qui donne des répétitions de mathématiques, ou une certaine aptitude au calcul de tête chez les parents. On en jugera d'ailleurs par les spécimens suivants, que nous avons tous comptés comme positifs (sauf les quatre premiers) et arrangés autant que possible en série croissante relativement à la probabilité d'une transmission héréditaire.

Rép. XXI (Allemagne). — Je ne sache pas qu'il y ait eu dans ma famille aucun mathématicien de profession, ni personne de particulièrement doué sous ce rapport.

---

[1] Voir l'*Ens. math.*, 7e année, n° 5, p. 387-395, 1905.

[2] L'étude de cette partie de l'enquête a été faite par M. Th. Flournoy, professeur de psychologie à l'Université de Genève.

Rép. III (Angleterre). — Non. Mon père était dans les lettres, et mes grands-parents dans la médecine.

Rép. LXIX (Italie). — Mes ascendants ont tous été, à ma connaissance, de modestes agriculteurs.

Rép. LXXV (France). — Ce goût mathématique n'a existé, à ma connaissance, chez aucun de mes ascendants, ni directs ni collatéraux. Il n'existe pas non plus, comme je l'ai constaté d'une façon très précise, chez mes descendants; je dis que cette constatation est « précise » parce que j'ai été le professeur de mes fils. Ce double fait expliquerait peut-être pourquoi la faculté mathématique n'a été que si médiocrement représentée chez moi.

Rép. I (France). — Tous mes ascendants du 1er et du 2me degré et mon bisaïeul maternel ont été servis d'une intelligence sensiblement au-dessus de la moyenne. Ma mère, que j'ai eu le malheur de perdre à moins de neuf ans, sans quoi j'aurais pris un tout autre chemin, était une femme aimant le monde, très bonne musicienne, remarquée dans la ville par son intelligence et son éducation, par sa douceur et sa grâce tout autant. Son père, qui l'avait élevée ainsi — je ne l'ai pas connu — était un architecte, un industriel de valeur, ayant poussé fort loin, et seul, m'a-t-on dit, l'étude des mathématiques pures; il était passionné pour la musique (violon). J'ai dit que mon père me vantait sans cesse la beauté de la science et la gloire des savants. [Une tante maternelle a été fiancée à un ingénieur des ponts et chaussées :] chez nous (petite bourgeoisie), on ne voyait rien au-dessus de cette profession, et dès l'âge le plus tendre j'ai été poussé par mes parents vers l'école polytechnique; admis à l'école normale en même temps, j'ai préféré celle-ci, plus porté vers la science pure et poussé par Briot mon maître, mais j'ai eu à résister à mon père qui a commencé par m'y voir entrer avec chagrin.

Rép. II (France). — Ce goût n'est pas hérité de mon père, homme de lettres, élevé selon les anciennes formules et qui déclare avoir la chair de poule à la vue d'une formule algébrique. Toutefois mon grand-père maternel, ancien employé au ministère de la guerre, était arrivé tant bien que mal à me faire apprendre la table de multiplication vers 11 ans et à me faire *concevoir* ce que pouvait être une règle de trois simple; mais c'était fort nuageux dans mon esprit. Je n'ai ni frère ni sœur; un de mes cousins du rameau maternel, plus jeune que moi, est passé comme moi par l'école polytechnique et l'école supérieure de guerre et est actuellement capitaine d'artillerie.

Rép. XXX (Norwège). — Probablement mon grand-père maternel avait le goût des sciences exactes et naturelles. Il était pasteur.

Rép. LXXXII (Suisse). — Mes parents calculaient facilement. Mon père, qui était négociant, me proposait souvent de petits

problèmes de calcul oral. Il n'y a pas eu de mathématiciens dans ma famille. Mon grand-père paternel était agriculteur; mon grand-père maternel, fils de campagnard, s'occupa de l'industrie du bâtiment, puis d'une filature.

Rép. XLIV (Italie). — Mes ascendants n'étaient pas adonnés positivement aux mathématiques, mais aux travaux de mécanique ordinaire. Encore enfant, j'écoutais avec un vrai plaisir les leçons de mathématiques que mon frère donnait à des jeunes gens qui se préparaient à la licence du lycée.

Rép. XXXV (France). — Mon père n'a pas eu l'occasion de pousser l'étude des mathématiques au delà des éléments; mais il en avait le goût.

Rép. LXXXI (Pays-Bas). — Mon père aimait la mathématique; comme il mourut tôt, après une longue maladie, son exemple direct n'a pas pu faire beaucoup; ses études écrites non plus. Il y a sans doute hérédité, car ma fille de huit ans a aussi le goût du calcul, sans que jamais je l'aie poussée ou tâché de pousser dans cette direction.

Rép. II (Italie). — Je peux seulement dire que j'ai une enfant qui, déjà à l'âge de 5 ans, sans aucune incitation de ma part, et sans savoir écrire ni lire les nombres, s'amusait beaucoup à résoudre de petits problèmes.

Rép. XXII (États-Unis). — Plusieurs membres de la famille de ma mère aimaient beaucoup les mathématiques (quoique n'ayant jamais eu l'occasion de pousser plus loin que l'algèbre et la géométrie élémentaires). Ma mère cependant trouvait les mathématiques difficiles et ne les aimait pas. C'est uniquement mon désir personnel qui me les a fait étudier.

Rép. XXIII (France). — Mon grand-père maternel, m'a-t-il été affirmé, avait une aptitude marquée pour les études mathématiques. Mais je ne l'ai pas connu et son influence *directe* a été nulle sur moi.

Rép. XXXVII (France). — Mon grand-père paternel a été à l'école polytechnique, mais n'a pas continué les études mathématiques. J'ai trois frères plus jeunes que moi qui sont très bien doués pour les mathématiques.

Rép. XXXI (Allemagne). — Mes 5 frères ont tous été bons mathématiciens.

Rép. XXVII (France). — Frère et oncle professeurs de mathématiques; leur influence personnelle a été nulle.

Rép. IX (France). — Mon père aime les sciences exactes; il est sorti de l'École polytechnique ainsi que deux de mes frères. Leur exemple n'a pas été étranger à mon goût pour les mathématiques.

Rép. XIV (Irlande). — Mes goûts logiques sont héréditaires et se retrouvent chez mes deux frères cadets.

Rép. XVI (Belgique). — Mon père et mon grand-père avaient des dispositions pour les mathématiques, mais je ne les ai pas connus.

Rép. XVIII (Italie). — J'ai eu un oncle paternel doué de facultés mathématiques exceptionnelles; il fut reçu Docteur à 19 ans et mourut de phtisie à cet âge. Je naquis longtemps après, mais ce que mon père m'a raconté de cet oncle a certainement excité puissamment en moi le goût pour les mathématiques.

Rép. XLIX (France). — Mon père avait enseigné longtemps les mathématiques et la physique; il cherchait naturellement à en développer le goût chez moi, mais jusqu'à 16 ans je ne mordais guère à ses leçons.

Rép. XL (Allemagne). — Mes parents, ainsi que mes frères et sœurs, sont tous bien doués pour les mathématiques. Mon père, en particulier, doit bien avoir influé sur moi déjà par le premier enseignement du calcul qu'il me donna.

Rép. LV (Etats-Unis). — Une sœur de mon père fit preuve, dans sa jeunesse, d'un talent peu commun pour les mathématiques. Ma mère possédait des aptitudes mathématiques au-dessus de l'ordinaire. Ce fut le cas chez nous pour les trois garçons, mais non point, à ce qu'il semble, pour les deux filles. Il y eut un temps où pendant des mois, avec un frère plus âgé que moi, je faisais des « concours de problèmes ». L'aîné de mes frères, qui est capitaine dans l'armée, a un talent spécial pour la mécanique et d'autres branches des Mathématiques appliquées.

Rép. LXXVII (Etats-Unis). — Mon père et ma mère avaient tous deux des goûts mathématiques, quoiqu'ils ne fussent pas développés. J'ai un frère cadet qui a des aptitudes mathématiques exceptionnelles.

Il est évident que ces réponses sont trop vagues ou trop sommaires pour autoriser des conclusions fermes sur la question de l'hérédité du talent mathématique. En les prenant néanmoins comme elles se présentent, et en faisant la statistique des indications de parenté qu'elles renferment, on arrive aux résultats numériques suivants :

Le goût des mathématiques y est noté comme existant

du côté paternel (seul)	dans	23 cas,
du côté maternel »	»	6 cas,
des deux côtés (hérédité convergente)	»	6 cas.

L'hérédité apparaît *directe* et *immédiate* dans 24 cas (père, 18; mère, 3; père et mère, 3). — Elle est directe mais *médiate*, c'est-à-dire avec saut d'une ou plusieurs généra-

tions (atavisme), dans 6 cas (grand-père paternel 3; maternel, 2; arrière grand-père paternel, 1;). — Elle est *indirecte*, c'est-à-dire que le goût des mathématiques se manifeste chez des collatéraux tout en restant latent chez l'ascendant commun, dans 15 cas (frères ou sœurs 10 cas; oncle 4; cousin 1).

Notons enfin que dans 14 cas, par exemple dans les trois derniers cités plus haut, il est fait mention de *plusieurs* parents possédant la faculté en question. Dans les chiffres précédents, ces cas ne sont comptés qu'une fois, chacun sous la rubrique du degré de parenté le plus rapproché. Un cas, où le répondant n'a remarqué le goût du calcul que chez sa fille âgée de 5 ans, a été assimilé aux exemples d'hérédité paternelle.

Au total, donc, il ressortirait de l'enquête que les mathématiciens qui retrouvent une trace de leurs aptitudes chez quelque parent plus ou moins éloigné, sont presque deux fois plus nombreux que ceux qui se sentent seuls de leur espèce au milieu de leur famille. Mais cette proportion se renverserait vite dès qu'on deviendrait plus sévère dans le triage des réponses: les cas positifs un peu nets se réduisent en effet à une vingtaine contre plus de cinquante négatifs ou douteux, et il n'y en a guère que sept ou huit où le répondant ait signalé dans sa parenté un mathématicien de profession (en étendant ce terme aux astronomes, physiciens, et ingénieurs). Et encore resterait-il à examiner, dans chacun de ces meilleurs cas, jusqu'à quel point la rencontre de plusieurs mathématiciens dans une même famille doit être vraiment attribuée à une transmission héréditaire de facultés spéciales, plutôt qu'à un concours de circonstances qui n'aurait fait que cultiver dans une même direction le fonds général d'intelligence répandu à un moment donné dans un milieu civilisé ; problème qui impliquerait l'appréciation qualitative de chaque cas individuel, et la distinction de ce qui est simple aptitude mathématique d'une bonne moyenne, talent vraiment remarquable, ou génie créateur proprement dit (sans parler des différences de valeur entre les facultés de calcul et celles d'analyse etc.).

Si les résultats de notre enquête n'apportent rien de déci-

sif quant à la question de l'hérédité, il est cependant intéressant de constater que, tout insuffisants qu'ils soient, ils cadrent assez bien avec ce que nous ont appris sur ce sujet les recherches de Galton, de Candolle, Möbius [1], etc. Que les dispositions mathématiques soient parfois héréditaires, c'est ce dont on ne saurait douter en présence de tant d'exemples historiques illustres tels que la dynastie des Bernoulli, les quatre ou cinq générations de Cassini, W. Herschell avec son frère, sa sœur, son fils et ses petits-fils, les Euler, les Carnot, et tant d'autres familles qui ont si brillamment marqué dans les sciences exactes. La mathématique est précisément, avec la musique et la peinture, une des preuves les plus frappantes de l'hérédité des facultés intellectuelles. D'autre part, nos réponses négatives confirment les cas si nombreux où l'on a vu le génie mathématique surgir pour ainsi dire *ex nihilo* et s'éteindre, comme un éclatant météore, sans ascendance ni descendance, au sein de familles parfois très développées sous d'autres rapports (surtout artistiques), mais parfois aussi tout à fait incultes (ce qui semble être la règle pour les calculateurs prodiges). — Le fait que la bosse mathématique, quand elle est héritée, vient presque toujours (Möbius dit même *toujours*) du côté paternel, apparaît également dans l'enquête. De même aussi la rareté bien connue des femmes mathématiciennes : nos 76 répondants, joints à leurs parents enclins aux mathématiques dont ils ont indiqué le sexe, forment un total de 154 personnes dont 11 seulement appartiennent au sexe féminin.

Pour ce qui est de la part due à la spontanéité innée, et à l'exemple ou à l'influence des mathématiciens de la famille, dans l'éclosion du goût des sciences mathématiques, les réponses à ce dernier point de la question 1 *b* sont trop peu nombreuses et pas assez détaillées pour qu'il vaille la peine de s'y arrêter.

---

[1] Voir entre autres le compte rendu de l'ouvrage de Möbius dans l'*Enseignement mathématique* de juillet 1901 (tome III, p. 307-309).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sous ce titre nous publions les remarques et renseignements concernant plus ou moins directement l'enseignement mathématique, telles que des descriptions d'instruments ou d'appareils nouveaux, etc. Quant à la correspondance, elle permet à tout lecteur de présenter sous une forme rapide les idées qui lui semblent utiles, les remarques suggérées par la lecture d'un article, ou les questions sur lesquelles il aurait besoin d'un renseignement.

La Rédaction.

Démonstration élémentaire du Théorème de Feuerbach.

Le cercle des neufs points d'un triangle est tangent intérieurement au cercle inscrit et extérieurement au cercle ex-inscrit.

Il existe de nombreuses démonstrations de ce théorème célèbre. Celle que je présente ci-après est établie uniquement sur les trois premiers livres d'Euclide, et, à ce point de vue, offre peut-être quelque intérêt.

Il est évident que, dans le cas où le triangle est isoscèle, le cercle des neuf points est tangent au milieu de la base, intérieurement au cercle inscrit et extérieurement au cercle ex-inscrit de l'angle correspondant, et qu'il coïncide avec le cercle inscrit dans le cas où le triangle est équilatéral. Nous allons donc démontrer le théorème dans le cas général où le triangle a deux côtés différents.

Dans le triangle ABC nous supposons que le côté AC est plus grand que le côté AB et soient :

A′ le milieu du côté BC;
B′ » » CA;
D le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet A sur le côté BC;
I le centre du cercle inscrit au triangle ABC;
Q le milieu de l'arc A′B′D du cercle des neuf points;
W le point de rencontre de AI avec BC.

Alors, puisque A′B′ est parallèle à BA, on a

$$\sphericalangle B'A'D = \sphericalangle C + \sphericalangle CAB \qquad \sphericalangle B'DA' = \sphericalangle C$$

et

$$\sphericalangle QA'D = \frac{1}{2}\left(\sphericalangle B'A'D + \sphericalangle B'DA'\right) = \frac{1}{2}\left(\sphericalangle C + \sphericalangle CAB + \sphericalangle C\right)$$

$$= \sphericalangle C \,\frac{1}{2} + \sphericalangle CAB \quad \therefore \quad \sphericalangle QA'D = \sphericalangle AWB \ .$$

Donc A'Q est parallèle à IA.

Soient ensuite

P le milieu d'arc BC du cercle circonscrit;
N le centre du cercle des neuf points;
PP' le diamètre du cercle circonscrit;
E le point de rencontre de QN avec AP';
F » » A'Q » AP';
K » » A'Q » AC;

L le point de rencontre avec AP de la perpendiculaire passant par N ;
M » » de cette perpendiculaire avec A′Q ;
U » » » » PP′ ;
V le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur PP′ ;
X » » » BC.

En conséquence, on a

$$A'M = MQ \quad \therefore \quad NM \perp A'Q$$

$$\therefore \quad \triangle MA'U = \triangle MQN \,, \quad MN = MU \,, \quad A'U = NQ \,.$$

Maintenant, dans le triangle PNU, on a

$$\overline{PU}^2 - \overline{PN}^2 = 2NU \,.\, LM \,.$$

Mais

$$2NU \,.\, LM = 2EP' \,.\, AF = AP' \,.\, AF$$

$$\sphericalangle A'KC = \sphericalangle PAC = \sphericalangle A'P'C$$

Le quadrilatère A′KP′C peut donc être inscrit dans un cercle. Et on a

$$\sphericalangle P'KC = \sphericalangle P'A'C = 1 \text{ droit} \,.$$

D'ailleurs, dans le triangle rectangle AP′K,

$$AP' \,.\, AF = \overline{AK}^2 \,;$$

mais

$$AK = \frac{1}{2}(AC - AB) = A'X$$

$$\overline{A'X}^2 = \overline{VI}^2 = \overline{PI}^2 - \overline{PV}^2$$

$$\therefore \quad \overline{PU}^2 - \overline{PN}^2 = \overline{PI}^2 - \overline{PV}^2$$

ou

$$\overline{PN}^2 + \overline{PI}^2 = \overline{PU}^2 + \overline{PV}^2 \,. \quad (\alpha)$$

Le point A′ est le milieu entre le point X et le point de tangence avec BC du cercle ex-inscrit du triangle ABC ; la droite joignant le centre du cercle inscrit à celui du cercle ex-inscrit est divisée en deux parties égales au point P, et la projection orthogonale de la droite est aussi divisée en deux parties égales en même point.

Employant les mêmes lettres pour le cercle ex-inscrit comme pour le cercle inscrit, nous avons le résultat suivant :

$$\overline{\text{IN}}^2 = \overline{\text{PN}}^2 + \overline{\text{PI}}^2 \mp 2\text{PI} \, . \, \text{PL} \;;$$

moins ou plus, suivant qu'il s'agit du cercle inscrit ou du cercle ex-inscrit.

Joignant ce résultat à la relation (α) et observant que I, L, V, U sont sur le même cercle (PI.PL = PU.PV), nous obtenons

$$\overline{\text{IN}}^2 = \overline{\text{PU}}^2 + \overline{\text{PV}}^2 \mp 2\,\text{PU} \, . \, \text{PV} = (\text{PU} \mp \text{PV})^2$$
$$= \overline{\text{VU}}^2 = (\text{A'U} \mp \text{A'V})^2 = (\text{NQ} \mp \text{IX})^2$$
$$\therefore \quad \text{IN} = \text{NQ} \mp \text{IX} \, .$$

Ainsi la distance entre le centre du cercle des neuf points et le mi-centre est égale à la différence de leurs rayons ; donc les deux cercles sont tangents intérieurement.

La distance entre le centre du cercle des neuf points et le ex-centre est égale à la somme de leurs rayons ; donc les deux cercles sont tangents extérieurement.

V. SAWAYAMA (Tokio).

Sur les racines des équations algébriques.

Les remarques présentées par M. KARIYA (v. n° du 15 septbr. 1905 ; p. 398-399) au sujet de ma note parue en juillet 1904 (p. 297 et suivantes) reposent sur un malentendu. Il s'agit du théorème suivant :

Si dans un polynome entier avec tous ses termes positifs ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, le rapport d'un coefficient au précédent ne va pas en croissant, l'équation que l'on obtient en égalant le polynome à zéro a nécessairement des racines imaginaires.

L'erreur de M. KARIYA résulte de ce qu'il ne tient pas compte de la distinction que nous faisons entre l'ordre des coefficients et l'ordre des rapports de ces coefficients. En disant que *le rapport d'un coefficient au précédent ne va pas en croissant*, nous entendons 1° que dans le polynome

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m,$$

on prend comme ordre des coefficients l'ordre des indices et l'on forme les rapports

$$\frac{a_1}{a_0} = \lambda_1 \, , \quad \frac{a_2}{a_1} = \lambda_2 \ldots . \quad \frac{a_m}{a_{m-1}} = \lambda_m \, ;$$

2° que l'on ordonne les λ en commençant par celui qui correspond *au terme constant* du polynome, c'est-à-dire que l'on envisage la suite

$$\lambda_m, \lambda_{m-1}, \ldots\ldots \lambda_1,$$

tandis que M. Kariya envisage celle que l'on obtient en commençant par λ_1.

Il suffirait d'ailleurs pour faire la distinction dont nous parlons de voir tout simplement la conclusion de notre démonstration (loc. cit.). Or, précisément pour cette démonstration M. Kariya ajoute qu'il n'en ressort pas que l'équation a necessairement des racines imaginaires. C'est une autre erreur de sa part qui nous oblige de nous expliquer sur quelques points de cette démonstration. D'après le théorème classique de Descartes sur le nombre des variations d'un polynome, un polynome entier avec tous ses termes positifs n'a aucune racine positive, par conséquent, si un tel polynome n'a pas toutes ses racines négatives, *il aura nécessairement des racines imaginaires*, donc, si nous trouvons une propriété des coefficients d'un polynome qui existe nécessairement quand toutes les racines sont négatives, nous aurons aussi, dans le cas ou le polynome a tous ses termes positifs, une condition suffisante pour l'existence nécessaire des racines imaginaires. Cette condition consiste évidemment en ce que les coefficients de ce polynome ne jouissent pas de la dite propriété.

Une telle propriété est la suivante :

Les rapports λ des coefficients d'un polynome ayant toutes ses racines négatives vérifient nécessairement les inégalités :

$$\lambda_m < \lambda_{m-1} < \ldots < \lambda_2 < \lambda_1 .$$

C'est précisément ce que nous avons démontré dans l'article cité. *(L'Ens. mathém., 15 juillet 1904, page 298.)*

P. Zervos (Athènes).

Théorie de la droite et des parallèles.

Les « définitions » classiques de la droite et des parallèles ne sont pas des définitions ; ce sont des théorèmes, c'est-à-dire des propositions à démontrer.

Qu'on veuille bien y réfléchir : Pas plus que la propriété d'être la plus courte de toutes les lignes menées entre deux points ne définit ce qu'est, mathématiquement, la qualité de droite pour une ligne, le fait de ne pas se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge ne dit l'essence du parallélisme, ne précise de façon

scientifique ce que c'est, pour deux droites, que d'être, dans toute leur étendue, c'est-à-dire essentiellement, parallèles, « para-allèlon », « à côté l'une l'autre ».

Que si, au contraire, nous définissons la ligne droite la ligne de direction constante, comme en mécanique le mouvement uniforme est défini le mouvement de vitesse constante, nous n'avons plus rien que de conforme à la raison.

Parmi l'infinité des mouvements imaginables, il est un mouvement, sinon effectif, du moins possible, dans lequel la vitesse reste constamment égale à elle-même. Ce mouvement est dit uniforme.

De même, en géométrie, parmi toutes les lignes qui nous sont données dans l'intuition spatiale, il en est une dont la direction reste constamment égale à elle-même. Cette ligne est dite droite.

Même avantage logique, même simplicité et même précision, si nous définissons les droites parallèles des droites de même direction.

Et comme l'ordre appelle l'ordre, de cette substitution de définitions vraies, j'entends qui sont des définitions, à des pseudo-définitions, résulte l'ordonnance la plus parfaite dans la science, et les questions insolubles — dans les termes donnés — ne se posent même pas.

Ne se pose pas la question : « Entre deux points peut-on mener plus d'une droite ? ». En effet, deux points *déterminent* une ligne ayant la même direction dans toute son étendue, c'est-à-dire une droite.

Ne se pose pas non plus celle-ci : « Par un point peut-on mener plus d'une parallèle à une droite ? ». En effet, la droite donnée *détermine*, en un point quelconque de l'espace, une droite ayant la même direction, c'est-à-dire sa parallèle en ce point.

Il est facile de montrer : 1° que des définitions se déduit, par un jugement apodictique, l'*axiome* des parallèles coupées par une transversale ; 2° qu'une démonstration rigoureuse et de forme identique à celle de toutes les propositions subséquentes de la science géométrique s'applique à ces premiers théorèmes qui sont les prétendues définitions de la droite et des parallèles.

L. L. Fabre (Paris).

Note de la Rédaction. — L'idée de définir la droite à l'aide de la notion de direction n'est pas nouvelle ; utilisée dans plusieurs traités elle a été abandonnée parce qu'elle se base sur une notion de nature différente, qui, du reste, doit être préalablement définie. La droite, de même que le point, peuvent être considérés comme des notions indéfinissables ; ce sont des notions claires par elles-mêmes. Nous renvoyons ceux de nos lecteurs qui désirent trouver une étude comparée des différentes définitions proposées pour la

droite et les parallèles, entre autres aux Ouvrages de M. Schotten, *Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts*, Leipzig, 2 vol., 1890, 1893, et de M. J. Richard, *Sur la Philosophie des Mathematiques*, Paris, 1903. Voir aussi : *Les Principes des mathématiques*, par M. Couturat, Rev. de Métaph. et de Mor., 1904.

La Rédaction.

CHRONIQUE

Congrès des mathématiciens allemands ; Meran, 1905.

La réunion annuelle de l'Association allemande des mathématiciens a eu lieu cette année à *Meran*, du 24 au 30 septembre, en même temps que le 77[me] congrès des naturalistes et médecins allemands. Elle a été présidée par M. Staeckel (Hanovre) assisté de MM. Krazer et Gutzmer.

La séance administrative, ainsi que les réunions scientifiques fournissent une nouvelle preuve de l'activité considérable de l'Association, qui compte aujourd'hui 666 membres. La première était consacrée aux objets suivants :

Rapport sur l'exercice 1904-1905. — Rapport sur les publications entreprises par l'Association. — Rapport des commissions. — Rapport financier du III[me] congrès international des mathématiciens[1]. — Revision des statuts. — Création des « Archives des mathématiciens » dont le but serait de conserver les legs scientifiques, manuscrits, etc.... de mathématiciens décédés. — Organisation du II[me] Centenaire d'Euler pour 1907.

M. Pringsheim (Munich) a été nommé président pour le nouvel exercice. La prochaine réunion aura lieu à *Stuttgart*.

Les communications scientifiques, au nombre de 24, ont été réparties sur cinq séances ; en voici la liste :

1. Czuber (Vienne) : La question de l'introduction des éléments de calcul infinitésimal dans les écoles moyennes, examinée au point de vue autrichien.

2 et 3. Dokulil (Vienne) : La photogrammétrie au service de l'histoire de l'art. — Construction et examen de vues stéréoscopiques.

4 et 5. Epstein (Strasbourg) : Sur la fonction de ζ Riemann et ses extensions (Rapport). — Théorèmes corrélatifs dans la théorie de la puissance par rapport à un cercle.

---

[1] Les recettes (subventions, cotisations, reliquat du II[e] Congrès) se montent à Mk 22873.27, et les dépenses à Mk. 20988.89 ; il reste donc en caisse Mk. 1884.38.

6. Fejer (Klausenbourg) : Sur l'équilibre.

7. Gans (Tubingue) : Gravitation et électromagnétisme.

8. Grünwald (Vienne) : Sur certaines applications géométriques des nombres dualistiques.

9. Hasenöhrl (Vienne) : Sur les méthodes d'intégration des équations de Maxwell pour les oscillations électriques.

10. Hensel (Marbourg) : Sur les propriétés arithmétiques des nombres algébriques et transcendants.

11. Herz (Vienne) : L'année de naissance de Jésus-Christ.

12. Hocevar (Graz) : Les éléments du Calcul infinitésimal doivent-ils être introduits dans les écoles moyennes ?

13. Koebe (Berlin) : Sur la représentation conforme de domaines connexes limités par des circonférences.

14. Kohn (Vienne) : Sur les surfaces du second ordre.

15. Levi-Civita (Padoue) : Sur un problème technique en rapport avec la réprésentation conforme.

16 et 17. Müller (Vienne) : La géométrie descriptive envisagée comme interprétation concrète de la géométrie abstraite. — Contributions à la Cyclographie.

18. Schlesinger (Klausenbourg) : Sur une représentation du système de la géométrie absolue.

19. Schoenflies (Koenigsberg) : Sur les soi-disant paradoxes de la Théorie des ensembles.

20. Staeckel (Hanovre) : Couples de surfaces isométriques.

21. Waelsch (Brünn) : Images géométrico-mécaniques d'une nouvelle forme invariante binaire de formules chimiques.

22. Wien (Würzburg) : Sur les équations aux dérivées partielles de la physique.

23. Wirtinger (Vienne) : Sur un point de la théorie des fonctions à deux variables.

24. Zindler (Innsbruck) : Le développement de la Géométrie différentielle réglée (Rapport).

Deux de ces communications, celles de MM. Czuber et Hocevar, traitent plus particulièrement de l'enseignement des mathématiques. Nous en donnons ci-après un court résumé.

M. Czuber (Vienne) examine la question de l'introduction des éléments du calcul infinitésimal dans les écoles moyennes. Dans une première partie il donne d'abord un aperçu historique du développement de l'enseignement mathématique en Autriche au cours du siècle dernier ; puis il montre quelle est la place qui a été donnée jusqu'ici à la notion de fonction dans les divers programmes. Nous reproduisons ici les conclusions : « C'est par des raisons non pas d'ordre extérieur, mais de nécessité intérieure, qu'une transformation de l'enseignement mathématique aux écoles moyennes, au gymnase aussi bien qu'à l'école réale, devient désirable. Il y a lieu de revoir avec soin les programmes en vue

d'y introduire les notions fondamentales qui se rattachent à l'idée de fonction jusqu'aux deux problèmes fondamentaux du calcul infinitésimal. M. Czuber émet le vœu qu'une commission composée de représentants de la science et de l'école soit nommée par les autorités scolaires en vue d'élaborer un programme et un plan d'étude en rapport avec le temps disponible et les facultés de compréhension des élèves. Il est à désirer que les autorités facilitent la publication et l'introduction dans les écoles de manuels rédigés sur ces nouvelles bases. »

M. Hocevar (Graz) se déclare également favorable à l'introduction des éléments du calcul infinitésimal dans les classes supérieures des écoles moyennes. Il insiste sur le rôle fondamental que joue ce calcul dans les branches les plus diverses et sur les services que les premières notions peuvent rendre, déjà à l'école moyenne, dans l'étude de certains problèmes mathématiques et physiques.

Le conférencier passe ensuite en revue les différentes objections que l'on a faites à la réforme projetée et il compare le temps accordé aux mathématiques dans les plans d'études prussiens et autrichiens. Les conditions sont beaucoup plus favorables en Prusse. M. Hocevar estime qu'il y a lieu de retrancher certaines parties du programme actuel, mais que malgré cela il est désirable de porter à *huit* la durée de l'école réale (celle-ci compte 9 années en Prusse et 10 en Wurtemberg).

Commission d'enseignement. — On sait qu'au précédent congrès des naturalistes allemands, tenu à Breslau, une commission avait été nommée pour étudier et faire aboutir les projets de réforme de l'enseignement scientifique dans les écoles moyennes.

M. le professeur *Gutzmer* présente un rapport d'ensemble sur les travaux de cette commission[1]. Après avoir retracé le mouvement qui a donné naissance à celle-ci, il montre quelles sont les idées directrices fournies par la discussion et les divers rapports partiels : elles peuvent être résumées comme suit :

1. La Commission estime qu'il est désirable que les établissements secondaires supérieurs ne fournissent pas exclusivement une culture historique et littéraire ou une culture scientifique ;

2. Elle reconnait les sciences mathématiques et naturelles comme équivalentes aux langues pour ce qui est des moyens propres à développer la culture générale et elle maintient ferme le principe de la culture générale spécifique.

3 Elle estime qu'il est nécessaire que les mêmes droits soient conférés à la suite des examens de sortie des divers établissements secondaires supérieurs (gymnases, gymnases réaux et écoles réales supérieures).

[1] *Voir* Verhandlungen d. Ges. Deutscher Naturforscher u. Aerzte. Bericht der Unterrichtskommission uber ihre bisherige Tätigkeit. Verlag F. C. W. Vogel. Leipzig. 1905.

Le rapport général est accompagné de trois rapports consacrés à l'enseignement des *Mathématiques* (rapporteur M. le prof. F. Klein), de la *Physique* (M. le prof. Poske) et de la *Chimie* avec les sciences biologiques (M. le prof. K. Fricke).

La place nous manque pour donner un aperçu du rapport sur l'enseignement des mathématiques. Nous y reviendrons dans un prochain numéro. Bornons nous à dire qu'il demande une modernisation des programmes tendant, d'une part, à initier de bonne heure les élèves à la notion de fonction, et, d'autre part, à développer chez eux la faculté de représentation dans l'espace.

A propos des nouveaux programmes de mathématiques en France ; adoption de la méthode Méray.

Nos lecteurs trouveront sous la rubrique « Notes et Documents » les *modifications apportées au plan d'études des lycées et collèges de garçons* du 31 mai 1902 (arrêtés des 27, 28 juillet et 8 septembre 1905). On sait que le Décret du 31 mai avait insisté tout particulièrement sur le caractère à la fois plus simple et plus pratique que doit revêtir l'enseignement des sciences dans les établissements secondaires. Les récents arrêtés accentuent encore ce caractère concret. La réforme nous paraît excellente ; elle porte cette fois principalement sur l'enseignement de la Géométrie.

A la suite de ces modifications M. C. Bourlet, professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, vient d'adresser à ses collègues de l'enseignement secondaire une circulaire dont voici le principal passage :

« Dans la collection d'ouvrages, que j'ai entrepris de publier avec mon ami M. Henri Ferval à la librairie Hachette, nous nous sommes efforcés de nous conformer à ces tendances nouvelles, et le succès de nos modestes volumes nous prouve que nos efforts ont été appréciés par nos collègues et le public. »

« Dès l'apparition du nouveau décret, je me suis empressé de faire, à ceux de mes ouvrages déjà parus, les modifications et additions nécessaires pour les rendre *strictement conformes aux nouveaux programmes* ».

« Les nouvelles éditions revues et complétées de mes *Cours d'arithmétique et d'algèbre* vous seront envoyées à titre de spécimen, sur votre demande, par mes éditeurs, MM. Hachette et Cie, 79, boulevard Saint-Germain, à Paris. »

« Les *Instructions* annexées au *Nouveau Décret de juillet* 1905 invitent en outre les professeurs à suivre une méthode toute nouvelle en **Géométrie.** »

« C'est M. Méray, l'éminent professeur de la Faculté des Sciences de Dijon, qui en est l'initiateur et, personnellement, depuis

plusieurs années, j'ai, par la plume et par la parole, préconisé l'introduction de cet enseignement dans nos lycées. »

« Il y a un an, en août 1904, à Grenoble, sur mon rapport et ma proposition, le Congrès de l'*Association française pour l'avancement des Sciences* émettait un vœu, qui fut transmis au Ministre, en faveur de l'adoption de la méthode Méray. »

« C'est donc avec joie que j'ai entrepris le travail délicat de rédiger de **Nouveaux Éléments de Géométrie** à la fois conformes au programme, aux instructions, aux idées de M. Méray et aux nécessités de notre enseignement. »

« Malheureusement un tel travail ne se fait pas en un jour et toute hâte lui serait préjudiciable. »

« Je viens donc vous demander d'avoir quelque patience et de vouloir bien attendre, avant de choisir définitivement un *Cours de Géométrie*, d'avoir vu mon nouvel ouvrage qui sera prêt dans trois ou quatre mois. »

Les doctorats ès sciences délivrés par les universités des Etats-Unis ; 1904-1905.

Pendant l'année scolaire 1904-1905, les universités américaines ont délivré 324 doctorats dont 213 doctorats ès sciences. Au nombre de ces derniers figurent 21 diplômes pour les mathématiques et 3 pour l'astronomie. En voici la liste, avec le nom de l'université qui a délivré le doctorat :

H. E. Jordan : Group characters of various types of linear groups. Chicago . — Th. E. McKinney : Concerning a certain type of continued fractions depending upon a variable parameter. Chicago . — R. L. Moore : Sets of metrical hypotheses of geometry. Chicago . — A. W. Smith : The symbolic treatment of differential geometry. Chicago . — R. B. Mc Clenon : On simple integrals with variable limits. Yale . — J. C. Morehead : Numbers of the form $2^q - 1$ and Fermats numbers Yale . — W. B. Ford : On the problem of analytical extension as applied to functions defined by power series. Harvard . — H. B. Phillips: Some invariants and covariants of ternary collineations. Johns Hopkins . — R. P. Stephens : I. On a curve of the fifth class ; II. On a system of parastroïds id. . — Emily Matilda Coddington : The historical development of pseudo-spherical surfaces. Columbia . — S. T. Tamura : A mathematical theory of the nocturnal cooling of the atmosphere near the earth's surface. Columbia . — O. E. Glenn : The determination of the abstract groups of order p^2qr, p, q, and r being distinct primes. Pennsylvania . — U. S. Hanna : The bitangentials of the plane quintic and plane sextic. Pennsylvania . — Alice Madelaine McKeldon : Groups of order 2^m, that contain

cyclic subgroups of orders 2^{m-1}, 2^{m-2}, 2^{m-3}. (Pennsylvania). — O. P. Akers : On the congruence of axes in a bundle of linear complexes. (Cornell). — R. B. Allen : On hypercomplex number systems belonging to an arbitrary domain of rationality. (Clark). — Ch. E. Brown : A study of the simpler arithmetical processes. (Clark). — J. S. French : On the theory of the pertingents to a plane curve. (Clark). — J. N. Gates : Cubic and quartic surfaces in four-fold space. (Clark). — H. G. Keppel : The cubic three-spread ruled with planes in four-fold space. (Clark). — St. M. Hadley : Relative masses of binary stars. (Wisconsin). — A. M. Hiltebeitel : The problem of two fixed centers and certain of its generalisations. (Princeton). — W. A. Manning : Studies on the class of primitive substitution groups. (Stanford). — R. H. Curtiss : I. A method of measurement and reduction of spectrograms for the determination of radial velocities : II. Application to a study of the variable star W Sagittarii. (California).

Nominations et distinctions.

M. René Baire, est chargé du cours de mathématiques pures à l'Université de Dijon, en remplacement de M. Méray.

M. J. Bendixon, est nommé professeur d'analyse supérieure à l'Université de Stockholm.

M. P. Boutroux, est nommé maître de conférences de mathématiques à la Faculté des Sciences de Montpellier, en remplacement de M. Baire, nommé à Dijon.

M. Bricard, répétiteur adjoint, est nommé répétiteur titulaire de géométrie et de stéréotomie à l'Ecole polytechnique de Paris, en remplacement de M. Picquet, nommé examinateur des élèves.

M. K. Carda, privat-docent à l'Université, est nommé professeur extraordinaire de mathématiques à l'Ecole technique supérieure de Vienne.

M. J. Ruis Castizo, est nommé professeur de mécanique théorique à l'Université de Madrid.

M. M. Dehn, privat-docent, est nommé professeur à l'Université de Münster i. W.

M. E. Dolezal, à Loeben, est nommé professeur de géométrie pratique à l'Ecole technique supérieure de Vienne.

M. L.-P. Eisenhart, est nommé prof. extr. à l'Université de Princeton (Etats-Unis).

M. Fouché, professeur au Lycée Voltaire, est nommé répétiteur adjoint de géométrie et de stéréotomie à l'Ecole polytechnique.

M. F. Hahn, à Lausanne, est nommé professeur de mathématiques appliquées à l'Université de Nancy.

M. G. Hamel, à Karlsruhe, est nommé professeur de mécanique à l'Ecole technique allemande de Brünn (Autriche).

M. Th. Holgate, est nommé professeur de mathématiques à l'Université Northwestern (Etats-Unis).

M. O.-D. Kellog, est nommé prof. extr. à l'Université de Missouri (Etats-Unis).

M. B. Kirsch, est nommé professeur de Mécanique technique à l'Ecole techn. sup. de Vienne.

M. Koenigs, professeur à la Sorbonne, répétiteur auxiliaire, est nommé répétiteur adjoint d'analyse à l'Ecole polytechnique de Paris, en remplacement de M. Painlevé, nommé professeur de mécanique et de machines.

M. E. Landau est nommé professeur à l'Université de Berlin.

M. Slocum, de l'Université de Cincinnati, est nommé prof. extr. de mathématiques à l'Université de l'Illinois (E. U.).

M. O. Stolz, professeur à l'Université d'Innsbruck, prend sa retraite pour raison de santé.

M. E. Timerding, est nommé professeur de mathématiques appliquées à l'Université de Strasbourg.

M. Townsend, est nommé prof. ord. à l'Université de l'Illinois.

M. Veblen, est nommé prof. extr. à l'Université Princeton (E. U.).

M. J. Weingarten, est nommé professeur honoraire de l'Université de Fribourg (Brisg.).

M. A.-H. Wilson, est nommé prof. extr. à l'Ecole polytechnique d'Alabama (E. U.).

M. J.-W. Young, est nommé prof. extr. de mathématiques à l'Université de Princeton (E. U.).

NOTES ET DOCUMENTS

Sous ce titre nous publions des renseignements relatifs à l'organisation de l'enseignement : créations nouvelles, programmes et règlements d'un intérêt général, liste des cours des principales Universités et Ecoles supérieures, etc. La Rédaction.

FRANCE

MODIFICATIONS APPORTÉES AU PLAN D'ÉTUDES DES LYCÉES ET COLLÈGES DE GARÇONS

du 31 mai 1902

(Arrêtés des 27, 28 juillet et 8 septembre 1905).

I. Instructions relatives à l'enseignement des mathématiques.

Les programmes[1] de mathématiques doivent être considérés comme des

[1] Faute de place nous devons renvoyer la publication des nouveaux programmes au prochain numéro. *Réd.*

tables des matières à enseigner dans les différentes classes ; toute latitude est laissée au professeur pour adopter tel ordre qui lui conviendra, pour employer les méthodes qui lui paraîtront les plus profitables aux élèves qu'il dirige.

Dans le second cycle, les études ayant pour sanction l'examen du baccalauréat, le professeur doit naturellement exposer tout ce qui figure au programme ; dans le premier cycle, il est dégagé de toute préoccupation d'examen et n'a pour guide que le développement de ses élèves ; il peut donc, s'il le juge utile, négliger certains points et insister plus longuement sur les parties plus accessibles ou plus nécessaires aux élèves particuliers qui lui sont confiés ; le programme sera considéré comme un programme maximum : mieux vaut que les enfants acquièrent des connaissances précises de peu d'étendue plutôt que d'avoir des idées vagues sur des sujets très variés.

S'il est indispensable de laisser au maître une grande liberté dans le choix des méthodes pour que son enseignement ait quelque portée, il convient néanmoins de bien préciser l'esprit dans lequel doit être donné cet enseignement, afin de lui conserver, dans son ensemble, une direction unique et d'éviter que le passage d une classe à une autre ne soit pour l'enfant une cause de trouble dans ses études. On demande donc aux professeurs de s'inspirer des indications qui suivent relativement aux programmes des différents cycles [1].

1er Cycle B

On ne devra pas perdre de vue que les élèves sont de jeunes enfants dont quelques-uns quitteront le lycée après la Troisième ; aussi, les exercices pratiques devront-ils être multipliés et porter sur des données réelles et non factices ; la théorie sera réduite à des explications faites sur des exemples concrets, tout au moins au début ; ce n'est que peu à peu que l'on pourra, avec de grandes précautions, habituer les élèves aux notions abstraites les plus simples, en montrant sur de nombreux exemples la nécessité d'une définition précise, d'un raisonnement purement logique, en insistant à l'occasion sur les erreurs que l'on peut commettre, si l'on raisonne sur des objets mal définis, sur des figures dont on n'a pas déterminé exactement les éléments et leur position. Les recueils de problèmes amusants fourniront de nombreux exemples qui frapperont l'esprit des élèves : citons, au hasard, la démonstration de l'égalité de 64 et 65, d'un angle droit et d'un angle obtus, etc.

Arithmétique. — Les élèves devront être exercés au calcul numérique et à la résolution de problèmes dont la solution n'exige aucun artifice ; il n'y a nul intérêt, en particulier, à demander aux enfants de s'astreindre à n'employer que des procédés purement arithmétiques, si l'algèbre fournit une solution simple et immédiate d'une question. On insistera sur l'ordre de grandeur des résultats, en attirant l'attention sur les erreurs que le bon sens permet d'éviter ; en faisant varier les données d'un problème, en remplaçant, par exemple, des mètres par des centimètres, on demandera de prévoir quel sera l'ordre de grandeur du nouveau résultat, comparé à l'an-

[1] Ceux de nos lecteurs qui ne connaissent pas l'organisation de l'enseignement secondaire en France, trouveront un aperçu des différents cycles et divisions dans l'*Enseignement mathématique* du 15 mai 1905, pp. 183 et 184. *Réd.*

rien ; ce qu il faut éviter, c'est que l'élève effectue machinalement des calculs, sans se rendre compte, à chaque instant, de leur correspondance avec la réalité.

Le programme de comptabilité a été abrégé et remplacé par l'indication de notions sur les calculs pratiques utilisés dans la banque et le commerce ; on y exercera les élèves, en ayant soin de n'opérer que sur des données précises empruntées aux opérations réelles.

Le professeur est invité à traiter cette partie du programme avec d'autant plus de soin qu'elle a été considérablement simplifiée et que ces notions peuvent être indispensables aux élèves qui quittent le lycée ou le collège après le premier cycle.

La partie théorique est réduite à l'étude de l'addition, de la soustraction, de la multiplication des nombres entiers, de la recherche des caractères de divisibilité, des fractions, cette étude étant faite sur des exemples concrets. Toutefois, il n'y a là rien d'absolu : si un élève a la curiosité de se rendre compte du mécanisme d'une opération, de la raison d'être d'une règle donnée, il y aura avantage à satisfaire cette curiosité et il serait dangereux d'y répondre par une fin de non-recevoir.

Algèbre. — Les faits les plus importants de l'algèbre ayant été rencontrés dans les exercices des classes de Cinquième et de Quatrième, on pourra, en Troisième, les préciser et en donner une théorie élémentaire. Les énoncés des théorèmes doivent être précis, mais il est inutile d'insister trop longuement sur les exceptions qui peuvent se présenter : que l'élève sache que la proposition qu'il applique n'est vraie que sous certaines conditions, cela suffit : si, dans un cas particulier, ces conditions ne sont pas remplies, il saura qu'il doit traiter le problème en lui-même, et ce sera un meilleur exercice que celui qui consisterait à rechercher, par un effort de mémoire, à quelles modifications du théorème correspond ce cas particulier.

L'étude des variations d'une fonction sera accompagnée d'une représentation graphique aussi exacte que possible. La courbe une fois tracée servira à déterminer une coordonnée en fonction de l'autre ; la comparaison des résultats graphiques aux nombres calculés directement permettra de faire apprécier l'importance de la précision dans le dessin, et on habituera ainsi l'élève à se rendre compte de la grandeur de l'approximation que peut donner le procédé graphique.

Géométrie. — L'enseignement de la géométrie doit être essentiellement concret ; il a pour but de classer et de préciser les notions acquises par l'expérience journalière, d'en déduire d'autres plus cachées et de montrer leurs applications aux problèmes qui se posent dans la pratique.

Toute définition purement verbale étant exclue, on ne devra parler d'un élément nouveau qu'en donnant sa représentation concrète et en indiquant sa construction ; ceci exige que l'ordre généralement adopté soit modifié : en particulier, que la définition du cercle soit introduite dès le début et que l'usage des instruments de dessin soit indiqué au fur et à mesure des besoins. Si le programme est rédigé dans l'ordre habituel, c'est afin de n'imposer aucun ordre particulier ; il est entendu que celui qui est indiqué n'est pas celui que l'on suivra dans l'enseignement.

Au point de vue de l'explication des faits, le professeur devra faire appel à l'expérience et admettre résolument comme vérité expérimentale tout ce qui semble évident aux enfants : il n'y a nulle utilité à démontrer l'égalité

des angles droits, des angles correspondants, l'existence de l'intersection d'un cercle et d'une droite dont un point est intérieur au cercle, etc. L'élève ne comprend pas qu'il y ait lieu à démonstration et ne retient que des mots vides de sens ; on peut, et cela est désirable, faire sentir dans certains cas la nécessité d'une démonstration ; mais il ne faut donner cette dernière que si l'élève est convaincu qu'elle est indispensable.

On aura ainsi l'occasion de montrer qu'il y a deux certitudes d'ordres différents : l'une, expérimentale, qui appartient aux sciences physiques ; l'autre, logique, qui est celle des vérités mathématiques ; mais, il y aurait un grave inconvénient à donner à cette dernière une importance qu'elle n'a pas dans la réalité et à jeter le discrédit sur la premiere, qui, il faut bien l'avouer, est la seule que nous possédions, puisque les principes mathématiques n'ont pas d'autres fondements, tout au moins pour les élèves. Ce qu'il importera de faire ressortir, c'est l'importance du raisonnement logique pour réduire au minimum les faits expérimentaux ; il serait aisé de multiplier les exemples : si l'on construit un décagone régulier inscrit, on constate expérimentalement qu'il est à peu près impossible de le fermer ; au contraire, en prenant pour côté d'un polygone régulier la moitié du côté du triangle équilatéral, on obtient sensiblement un heptagone régulier ; si l'on mesure la somme des angles d'un triangle, on trouve des nombres voisins de 180°, etc. Ces exemples montrent que l'expérience fait pressentir une vérité, mais est insuffisante pour la faire connaître d'une façon précise ; si donc il est possible, à l'aide d'un raisonnement logique, de mettre cette vérité en évidence ou d'infirmer ce que semblait donner l'expérience, il y a tout avantage à le faire ; il est aisé également de faire ressortir l'intérêt pratique que présente la méthode purement logique, en insistant sur ce qu'elle a fait disparaître toute incertitude dans les résultats. On aura ainsi préparé l'étude de la géométrie, qui sera faite dans le second cycle, où les élèves avertis ne s'étonneront pas du soin minutieux avec lequel les moindres théorèmes sont démontrés.

Un appel constant à la notion du mouvement semble devoir faciliter l'enseignement de la géométrie ; c'est ainsi que le parallélisme sera lié à la notion expérimentale de translation, que l'étude des droites et plans perpendiculaires résultera de la rotation ; l'idée d'égalité sera liée à celle du transport des figures, que l'on précisera en introduisant la notion si simple d'orientation.

Le dessin est appelé à jouer un rôle important dans l'enseignement de la géométrie ainsi conçu ; il faudra faire exécuter très exactement les constructions indiquées dans le cours et mêler intimement le calcul aux mesures effectuées directement. C'est surtout en Troisième que l'on pourra intéresser les élèves en leur faisant exécuter des épures très simples relatives aux ombres et aux sections planes ; il ne saurait être question d'indiquer les méthodes générales de la géométrie descriptive ou de la géométrie cotée : chaque question devra être étudiée en elle-même, et l'ingéniosité de l'élève pourra être exercée par la recherche des moyens les plus propres à donner la solution du problème ; il aura à se servir des théorèmes les plus importants du cours et jugera ainsi de leur utilité. Rien n'empêchera de faire construire le corps représenté par l'épure, d'en calculer les éléments, puis de les mesurer à l'aide de l'épure ou sur le corps lui-même : la comparaison des différents résultats permettra d'apprécier la valeur de chaque procédé.

Le dessin n'est pas d'ailleurs le seul auxiliaire de cet enseignement ; il

en est d'autres qui ont même une importance plus grande en ce sens qu'ils font mieux ressortir la liaison de la théorie et des applications. En particulier, il serait intéressant de mettre un objet de forme simple entre les mains de l'élève, de lui demander d'effectuer sur cet objet toutes les mesures qu'il jugerait nécessaires pour pouvoir ensuite le reproduire au moyen d'une épure, en évaluer la surface, le volume, etc. —, les résultats obtenus comportant des vérifications expérimentales.

Dans le même ordre d'idées, il est recommandé d'exercer les élèves à l'exécution de levés de plan, ce que l'on pourra faire sans sortir de l'établissement. Il est facile de tracer une droite joignant deux points situés dans des salles différentes, de mesurer la distance de ces points, etc. ; on insistera d'ailleurs sur l'intervention, dans ces applications, des théorèmes qui ont pu sembler être d'ordre purement spéculatif.

A côté de ces exercices pratiques, qu'une collection de modèles et d'appareils simples faciliterait beaucoup, il y aura lieu d'habituer les élèves à la résolution de problèmes très simples, en essayant de leur faire deviner la solution et en développant ainsi leur intuition, puis en exigeant une démonstration rigoureuse, en insistant sur l'importance de chaque phrase, en montrant au besoin comment un mot mal choisi ou mal défini peut, suivant l'interprétation qu'on lui donne, conduire à des conclusions très différentes.

1er Cycle A et 2me Cycle A et B.

L'enseignement des mathématiques dans ces cycles devra être donné au même point de vue que dans le 1er cycle B. Le peu de temps dont dispose le professeur ne lui permettant pas de développer longuement son cours, il devra sutout s'attacher à donner en géométrie une idée de la forme des corps et pourra laisser de côté, s'il le juge à propos, toute théorie un peu abstraite. Les exercices devront surtout consister en problèmes sur les aires et les volumes, en insistant sur le choix des unités et en faisant revoir sans cesse le système métrique ; des constructions très simples, mais exécutées avec soin, pourront constituer d'excellents devoirs ; ce ne pourra être que dans les classes ayant des élèves désireux de faire plus tard des sciences que l'on donnera à résoudre de véritables problèmes de géométrie : théorèmes à démontrer, lieux géométriques.

Les démonstrations ne seront données qu'autant qu'un nombre suffisant d'élèves seront en état de les comprendre ; pour les volumes, on se bornera au besoin aux énoncés des règles pratiques, ou, dans des cas simples, on justifiera ces règles en employant la méthode infinitésimale, sans, bien entendu, soulever à cet égard aucune difficulté.

Conférences facultatives. — Dans les conférences destinées aux élèves qui désirent faire des études scientifiques après avoir suivi les cours des 2mes cycles A et B, la plus grande liberté est laissée au professeur ; ayant devant lui des élèves intelligents et travailleurs, il sera seul juge du développement qu'il peut donner à son cours ; l'important est qu'il forme des élèves pouvant comprendre les mathématiques ; qu'ils en sachent beaucoup n'est pas nécessaire ; ce qui est indispensable, c'est qu'ils aient compris les principes et soient habitués au raisonnement logique.

2me Cycle C et D.

Les programmes du second cycle scientifique ont été conçus de façon à

permettre aux élèves entrant en Mathématiques A ou B de posséder à fond les éléments de géométrie, d'algèbre et de trigonométrie.

La forme à donner à l'enseignement est celle qui est adoptée actuellement, les études faites dans le premier cycle ayant préparé les élèves à recevoir un enseignement logique; on ne perdra pas de vue que ce n'est qu'en faisant de nombreux exercices que l'on habitue les élèves à manier avec sûreté les éléments dont ils disposent.

Il sera bon de faire ressortir les liens intimes entre les différentes parties du cours, en menant de front la partie algébrique et la partie géométrique; il n'y a nul inconvénient à introduire les relations trigonométriques dans les démonstrations géométriques, à utiliser pour la détermination des volumes la méthode infinitésimale, que l'on peut présenter en toute rigueur dans les cas simples.

Mathématiques A et B.

En Mathématiques A et B, le professeur n'aura pas à faire de cours sur les matières déjà vues dans les classes de Seconde et Première, en algèbre, trigonométrie, géométrie et géométrie descriptive; mais il devra s'assurer, par des interrogations méthodiques et des exercices, que tous les élèves les étudient et les possèdent.

En particulier, il serait intéressant de réunir en géométrie tout ce qui est descriptif, puis tout ce qui est métrique, en rapprochant l'étude de l'espace de celle du plan; cela ne présenterait aucune difficulté pour des élèves qui ont déjà fait une première étude de la géométrie et aurait l'avantage de grouper les faits semblables, donnant ainsi une vue d'ensemble sans laquelle il est bien difficile de coordonner les idées.

Il est à peine besoin d'insister sur l'importance que l'on doit attacher aux exercices pratiques, tels que levés de plan, exécution d'épures; ce n'est qu'à la condition d'en faire un grand nombre que l'élève retiendra la géométrie descriptive et y prendra goût.

En mécanique, il ne sera soulevé aucune difficulté sur les principes: le principe de l'indépendance des effets des forces pourra être réduit à ce fait que, si plusieurs forces agissent à un instant t sur un point matériel, l'accélération qu'il possède à cet instant est la somme géométrique des accélérations qu'il posséderait si chacune des forces agissait seule. Le professeur devra éviter tous les développements et les exercices présentant uniquement un intérêt géométrique; c'est pour supprimer toute occasion de développements de ce genre que les théorèmes se rapportant aux vecteurs ont été réduits au minimum indispensable et transportés dans le programme de géométrie, où ils se présentent sous leur véritable jour. Le professeur devra choisir des exercices de mécanique d'un caractère pratique, se rapportant à des mécanismes, à des mouvements, à des équilibres familiers aux élèves; il devra poser des problèmes précis, avec des données numériques, de façon à habituer les débutants aux divers systèmes d'unités et à l'emploi du système métrique; il évitera les généralités et l'abus du calcul, en exerçant les élèves à raisonner directement sur chaque question. Dans l'explication de la réalisation pratique des mouvements de translation, de rotation, du mouvement hélicoïdal et des transformations de mouvements usitées dans les machines, le professeur ne se contententera pas de figures, ni même de modèles; il devra montrer aux élèves des machines usuelles, les analyser avec eux, leur montrer les liaisons mutuelles des pièces et les

transformations de mouvement qui en résultent. De même en statique et dynamique, il sera utile de choisir des exercices présentant un caractère pratique, et d'en effectuer les réalisations expérimentales. En corrigeant les travaux écrits comportant les calculs numériques, le professeur devra saisir toutes les occasions pour expliquer aux élèves les méthodes d'approximation.

En cosmographie, il conviendra de ne pas développer les méthodes de mesure et d'observation qui intéressent l'astronome de profession, mais de donner surtout des notions d'astronomie physique.

Une heure au moins par semaine doit être consacrée *exclusivement* aux problèmes, aux épreuves pratiques de calcul, de géométrie descriptive, de mécanique et aux exercices sur le cours. Tous les exercices devront se rapporter rigoureusement au programme ; aucun développement théorique nouveau ne devra être donné à propos d'un exercice.

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1905-1906.

(Suite.)

ALLEMAGNE

Berlin ; *Technische Hochschule.* — Abteilung f. allg. Wissenschaften. — Dziobek : Höhere Mathematik (Diff.- u. Int.-Rechn., analyt. Geometrie). — Haentschel : Elem. d. Diff.- u. Int.-Rechn. u. d. analyt. Geom. — N. N. : Darst. Geom. I. — Hertzer : Darst. Geometrie I. — Hettner : Höhere Mathematik (Diff.- u. Int.-Rechn., analyt. Geom.); Uebgn. z. höh. Mathematik; Th. d. Raumkurven und Flächen. — Jolles : Darst. Geom. I ; graph. Statik — Lampe : Höhere Mathematik (Diff.- u. Int.-Rechn., analyt. Geom.) ; Uebgn. z. höh. Math. ; bestimmte Integrale u. Diff.-Gleichungen. — Steinitz : Potentialth. ; Funktionenth. ; Niedere Analysis u. Algebra. — R. Müller : Diff.- u. Int.-Rechn. — Rothe : geom. Anwendungen d. Diff.- u. Int.-Rechn. — Steinitz : synth. Geom. ; niedere Analysis u. Algebra.

Bonn ; *Universität.* — Kaufmann : Theor. Mechanik, 4 ; Uebgn. 1. — Kowalewsky : Elem. d. analyt. Geometrie, 4 ; Uebgn. 1 ; Allgemeine Funktionentheorie, 3 ; Uebgn. 1 ; math. Seminar. — Küstner : Sphär. Astronomie 3 ; Fixsternkunde 1 ; prakt. Uebungen. — London : Diff. u. Int.-Rechnung, II, 4 ; Uebgn. 1 ; Synth Geom. 2 ; mathem. Seminar. — Study : Infinitesimalgeometrie, 4 ; Einl. in die Variationsrechnung, 2 ; mathem. Seminar.

München ; *Universität.* — Bauer : Math. Seminar — Lindemann : Differentialrechn. 5 ; analyt. Mechanik, 4 ; mathem. Seminar. — v. Seeliger : Theorie des Potentials und der Figur der Himmelskörper ; astron. Kolloquium. — Voss : Analyt. Geom. d. Ebene, 5 ; Th. d. alg. Flächen, 4 ; mathem. Seminar. — Pringsheim : Elliptische Funktionen, 4 ; Kettenbrüche 2. — Doehlemann : Darst. Geometrie I, 5 ; Uebgn. dazu, 3 ; synth. (neuere) Geometrie 5, Uebgn. 1. — Anding : Elemente der Astronomie, 2. — v. Weber : Algebra, 5 ; Integralrechnung mit Uebgn., 5. — Brunn : Grundzüge der Mengenlehre, 4.

München ; *Technische Hochschule.* — I. Reine und angewandte Mathematik. — Finsterwalder : Höhere Mathematik I. Teil mit Uebungen ; Nichteuklidische Geometrie. — v. Braunmühl : Höhere Mathematik III mit Uebgn. ; Algebraische Analysis ; Mathematisch-historisches Seminar. — v. Dyck :

Grundzüge der höh. Mathematik (für Architekten und Chemiker) I mit Uebgn. ; Funktionenth. nach Cauchy und Riemann. — v. Dyck u. Finsterwalder : Mathem. Seminar (Kolloquium). — Burmester : Darst. Geometrie I mit Uebgn. : Geometrisch-optische Täuschungen. — M. Schmidt : Vermessungskunde. — Föppl : Technische Mechanik II (graphische Statik) und III (Festigkeitslehre); Uebgn. auf dem Gebiete der technischen Mechanik. — Anding : Elemente der Astronomie. — Bischoff : Ausgleichungsrechn. (Praktikum); Mechanisches und graphisches Rechnen. — Kutta : Elastizitätsth. — Emden : Fourier'sche Reihen und Kugelfunktionen und Anwendung derselben auf physikalische Probleme mit Uebgn.

Stuttgart; *Technische Hochschule.* — Mathematik und Mechanik. — Bretschneider : Niedere Mathematik. — Hohenner : Trigonometrie ; Katastermessungen ; Markscheidekunde ; Prakt. Geometrie. — Stübler : Niedere Analysis. — Wölffing : Funktionenth. ; Diff. u. Int.-Rechn. — Reuschle : Kurvendiskussion. ; Analyt. Geometrie d. Raumes ; Neuere analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes ; Diff.- u. Int.-Rechn. ; Mathem. Seminar. — Mehmke : Darst. Geometrie ; Analyt. Mechanik ; Mathem. Seminar. — Roth : Schattenkonstruktionen und Beleuchtungskunde. — Hammer : Ausarbeitung geodätischer Aufnahmen ; Praktische Geometrie ; Ausgleichungsrechnung ; Höhere Geodäsie ; Barometrisches Höhenmessen ; Astronomische Zeit- und direkte geographische Ortsbestimmung. — v. Autenrieth : Technische Mechanik.

AUTRICHE

Vienne ; *Universität.* — P. von Escherich : Diff. u. Int.-Rechnung, 5 ; Übg. hierzu, 1 ; Proseminar für Mathematik, 1 ; Seminar für Mathematik, 2. — Fr. Mertens : Zahlentheorie, 5 ; Übungen im math. Seminar, 2 ; Übungen im math. Proseminar, 1. — Wilh. Wirtinger : Theorie der Differentialgleichungen, 5 ; Math. Seminar, 2 ; Math. Proseminar, 1. — G. Kohn ; Analytische Geometrie, 4 ; Übungen hierzu, 1 ; Invariantentheorie mit geometrischen Anwendungen, 2. — A. Tauber ; Versicherungsmathematik, 4. — E. Blaschke : Einführung in die math. Statistik, 3. — K. Carda : Differentialgeometrie, 2. — J. Plemely : Einführung in die Theorie der elliptischen Funktionen, 2. — J. Grünwald : Potentialtheorie, 2. — H. Hahn : Theoretische Arithmetik, 2. — Edm. Weiss : Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen, 4. — J. von Hepperger : Sphär. Astronomie, 4 ; Anleitung zum Gebrauche astron. Kataloge, Tafeln und Jahrbücher, 1. — R. Schram : Methode der kleinsten Quadrate, 1. — N. Herz : Astronomie und Geodäsie in historischer Entwicklung, 2. — Ad. Prey : Die Grundlagen der höheren Geodäsie, 2.

Pendant le semestre d'été 1905, l'université de Vienne a compté 6926 étudiants, dont 245 étudiantes.

Vienne ; *Technische Hochschule.* — Allé : Mathematik I. Kurs, 5. — Czuber : Mathematik II. Kurs, 5 ; Grundlehren der höheren Mathematik, 4 ; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3. — Reich : Ausgewählte Kapitel aus der Algebra, 2. — Grünwald : Über Fourier'sche Reihen, 2. — Tauber : Versicherungsmathematik I. Kurs, 4 ; II. Kurs, 4. — Blaschke : Einführung in die math. Statistik, 3. — Müller : Darstellende Geometrie und konstruktives Zeichnen, 4 + 6 ; Seminar dazu, 2, — Schmid : Darstellende Geometrie und konstruktives Zeichnen, 4 + 6 ; Projektive Geometrie, 3 + 2. — Finger :

Elemente der reinen Mechanik in Verbindung mit graphischer Statik, 5 ; Enzyklopädie der Mechanik, 4 ; Analytische Mechanik, 2. — Pollack : Elemente der niederen Geodäsie, 4 1/2 ; Praktische Übungen dazu, 5. — Tinter : Höhere Geodäsie, 4 ; Sphärische Astronomie, 4 ; Übungen im Beobachten und Rechnen, 3.

Brünn (Moravie) ; *Technische Hochschule.* — Neumann : Grundzüge der Elastizitäts- und Festigkeitslehre ; Baumechanik I., 7 1/2. — Wælsch : Mathematik I., I. Teil, 7 ; Korrepetitionen, 2. — Biermann : Mathematik II., Ausgewählte Kapitel der höheren Mathematik, 3, Korrepetitionen, 1 ; Math. Näherungsmethoden, 2 ; Variationsrechnung, 1. — Fischer : Math. Übungen, 1 ; Theorie und Praxis der Fourier'schen Reihen, 2. — Rupp : Darstellende Geometrie, 6 ; Übungen, 8. — Obenrauch : Geschichte der Geometrie, 1. — Niessl v. Meyendorf : Niedere Geodäsie, 6 ; Situationszeichnen, 4 ; Geometrischer Kurs, 3 1/2 ; Sphärische Astronomie, 3.

Czernowitz (Bukowina) ; *Universität.* — Tumlirz : Theoretische Mechanik II., 5 ; Math.-phys. Seminar, 2. — Daublebsky von Sterneck : Analytische Geometrie, 3 ; Zahlentheorie, 2 ; Math. Seminar, 2 ; Math. Proseminar, 2.

Graz (Styrie) ; *Universität.* — Frischauf : Höhere Analysis, 3 ; Zahlentheorie, 2. Dantscher v. Kollesberg : Differential- und Integralrechnung, 5 ; Math. Seminar, 2. — Streissler : Darstellende Geometrie I : Orthogonale Projektion, 3 ; Hillebrand : Elemente der theoretischen Astronomie, 3 ; Astrophotometrie, 2.

Graz ; *Technische Hochschule.* — Hocevar : Mathematik I., 6 ; Übungen, 2 ; Sphärische Trigonometrie, 1. — Stelzel : Elemente der höheren Mathematik I., 4. — Peithner v. Lichtenfels : Mathematik II., 4 ; Übungen, 2. — Schüssler : Darstellende Geometrie, 4 ; Übungen, 6 ; Seminar, 2 ; Theorie der Kegelschnitte, 3. — Wittenbauer : Allgemeine Mechanik (einschliesslich der Elemente der graphischen Statik) I., 4 ; Übungen, 1 ; Enzyklopädie der Mechanik, 4 ; Technische Mechanik, I, 4. — Klingatsch : Niedere Geodäsie I, 4 ; Höhere Geodäsie, 4 ; Praktische Messübungen, Situationszeichnen, 4 + 2.

Innsbruck ; *Universität.* — Stolz : Reelle Differential- und Integralrechnung, 3 ; Math. Seminar, 1 ; Arithmetik, 2. — Zindler : Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, mit Übungen, 7. — Menger : Darstellende Geometrie, mit Konstruktionsübungen, 4. — V. Oppolzer : Sphärische Astronomie, theoretischer Teil, 4.

Prag ; *Universität.* — Lippich : Theoretische Mechanik, 4 ; Kapillarerscheinungen, 1. — Pich : Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie, 3 : Elemente der Invariantentheorie, 2. — Gmeiner : Differential- und Integralrechnung, 4 ; Über algebraische Gleichungssysteme, 1. — Weinek : Über Aberration, Präzession und Nutation, 3. — Oppenheim : Niedere und Elemente der höheren Geodäsie, 2.

Prag ; *Technische Hochschule.* — Zsigmondy : Mathematik I., 6 ; Repetitorium, 2 ; Elementen der höheren Mathematik, 6 ; Repetitorium, 1 ; Ausgewählte Kapitel der Differential- und Integralrechnung, 2. — Grünwald : Mathematik II., 5 ; Repetitorium, 2 ; Differentialgleichungen und deren Anwendungen auf Geometrie und Mechanik, 2. — Janisch : Darstellende Geometrie, 4 ; Konstruktive Übungen, 8 ; Geometrie der Lage, 3. — Stark : Enzyklopädie der Mechanik, II : Festigkeitslehre und Hydraulik, 2 ; Mecha-

nik. 1 : Statik und Dynamik, 6 ; Repetitorium, 1 ; Graphische Statik, 2 : Konstruktive Übungen, 2.

FRANCE

Paris ; *Faculté des sciences* (Cours du 1er semestre, à partir du 6 novembre 1905). — G. Darboux : Principes généraux de la Géométrie infinitésimale et en particulier systèmes de coordonnées curvilignes et les formes quadratiques de différentielles (2 leçons par semaine), — Goursat : Opérations du calcul différentiel et intégral ; Eléments de la théorie des fonctions analytiques (2 leçons). — Painlevé : Lois générales de l'équilibre et du mouvement (2 leçons). — P. Appell : Eléments de mathématiques préparatoires à l'étude de la mécanique et des sciences physiques (2 leçons). — L. Raffy : Applications géométriques de l'analyse en vue du certificat de mathématiques préparatoires à l'enseignement des sciences physiques. — H. Poincaré : Perturbations des planètes et développement de la fonction perturbatrice (2 leçons). — J. Boussinesq : Propriétés mécaniques des fluides et les plus importants des mouvements où leur frottement intérieur n'a qu'un rôle secondaire (écoulement par les orifices et les déversoirs ; onde solitaire, etc.) (2 leçons). — E. Borel : Esquisse de la théorie générale des fonctions entières et son application à l'étude des diverses fonctions particulières (1 leçon). — G. Kœnigs : Cinématique générale ; applications aux machines (2 leçons). — P. Puiseux : Des étoiles, des amas stellaires, des nébules, éclipses (1 leçon).

Goursat : Conférence sur les matières du calcul différentiel et intégral (1 leçon). — J. Hadamard : Conférence sur le calcul différentiel et intégral (1 leçon). — L. Raffy : Conférence de géométrie supérieure (1 leçon). — Hadamard et Borel : Conférence sur la mécanique rationnelle (2 leçons). — Blutel : Conférence de mathématiques préparatoires à l'étude des sciences physiques (1 leçon). — Servant : Conférence sur la mécanique physique et expérimentale.

BIBLIOGRAPHIE

Jules Tannery. — **Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable.** — Deuxième édition entièrement refondue. *Tome I.* — 1 vol. gr. in-8°, IX, 422 p. ; prix : 14 fr. ; Hermann, Paris.

L'excellente *Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable*, publiée par M. Tannery en 1886, était épuisée depuis bien des années et les précieux services qu'elle avait rendu faisaient vivement désirer une nouvelle édition. Celle-ci vient enfin de paraître, ou, tout au moins, un premier volume.

M. Tannery ne s'est pas borné à une simple réimpression de l'ouvrage primitif en se bornant à des améliorations de détail ; il a préféré écrire à nouveau cette seconde édition en tenant compte de l'état actuel de l'Analyse.

La nouvelle édition comprendra deux volumes. Le premier contient à peu près tout ce qui figurait dans la première édition : Nombres irrationnels ; ensembles infinis, suites infinies, limites ; séries produits infinis, fractions continues ; premiers principes de la Théorie des fonctions ; polynomes,

fractions rationnelles ; fonctions exponentielles, etc. ; suites infinies à termes variables, convergence uniforme, définition des fonctions élémentaires ; dérivées. Le second volume donnera les notions essentielles du calcul intégral et de la Théorie des fonctions d'une variable complexe.

On trouve dans ce volume ce souci de la rigueur, de la clarté et de l'élégance d'exposition auquel M. Tannery a habitué ses lecteurs. L'auteur s'est efforcé de donner un caractère réellement élémentaire à cette *Introduction* ; il évite de s'attarder aux généralités afin d'arriver le plus vite possible à l'étude des fonctions spéciales dont les propriétés fondamentales interviennent constamment en Mathématiques.

Nous croyons que cette nouvelle édition sera lue avec beaucoup d'intérêt pour tous ceux qui enseignent les éléments d'Algèbre supérieur et d'Analyse ; mais il rendra surtout de grands services aux étudiants qui désirent consolider et approfondir leurs connaissances mathématiques. « Toute étude approfondie, dit l'auteur dans sa préface, suppose de nombreux retours en arrière. Il semble que beaucoup d'étudiants, à un moment ou à un autre, doivent sentir l'utilité de ce retour et de ce recommencement, soit parce qu'ils veulent mettre plus d'ordre et de cohésion dans ce qu'ils savent, soit parce qu'ils veulent se débarrasser de l'inquiétude que leur ont laissé quelques raisonnements et qui, peut-être, vient de s'éveiller en eux, soit parce que leurs connaissances sont maintenant assez étendues pour qu'ils sentent qu'une parfaite rigueur est indispensable dans certains sujets qui les attirent. C'est ceux-là que je voudrais contenter et dont je voudrais faciliter le travail. »

Et c'est surtout à ceux-là que nous recommandons la lecture attentive de cet ouvrage.

H. Fehr.

Ern. Cesaro. — **Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung** mit zahlreichen Uebungsbeispielen. Nach einem Manuskript des Verfassers Deutsch herausgegeben von Dr Gerh. Kowalewski. — 1 vol. relié ; gr. in-8°, 849 p. ; prix : 15 Mk. B. G. Teubner, Leipzig.

Cet ouvrage pourrait être simplement intitulé : Eléments de mathématiques supérieures. Il renferme en effet, tout au moins pour l'Algèbre et l'Analyse, l'ensemble des notions et théories indispensables à tous ceux qui désirent faire une étude approfondie des mathématiques pures ou appliquées.

Voici le titre des sept parties dont se compose cet excellent traité :

I. Déterminants. Formes linéaires et quadratiques. — II. Nombres irrationnels. Limites. Séries et produits infinis. — III. Théorie des fonctions. — IV. Nombres complexes et quaternions. — V Equations algébriques. — VI. Calcul différentiel. — VII. Calcul intégral.

Ces diverses matières sont exposées avec la clarté et l'originalité qui caractérisent les écrits du savant professeur italien ; aussi sommes-nous certain que son ouvrage sera étudié avec profit non seulement par les étudiants des universités et des écoles polytechniques, mais encore par les professeurs qui sont appelés à enseigner les éléments d'Algèbre et d'Analyse.

F. Marotte. — **L'enseignement des sciences mathématiques et physiques** dans l'enseignement secondaire des garçons **en Allemagne**. — 1 vol. in-8°, 121 p. ; Prix : 2 fr. 50 ; Librairie Arm. Colin, Paris.

M. F. Marotte, professeur au Lycée Charlemagne, à Paris, a fait deux voyages d'études en Allemagne au cours desquels il a étudié l'organisation

de l'enseignement des sciences mathématiques et physiques dans les établissements secondaires de ce pays. Chargé de cette enquête par l'office d'informations et d'études près du Ministère de l'Instruction publique, il a visité, dans les divers Etats allemands, des écoles de toutes catégories et il a assisté à de nombreuses classes en vue d'étudier le régime intérieur de l'enseignement. Fortement documenté et renseigné aux meilleures sources, M. Marotte vient de rédiger et de publier un intéressant rapport dont nous recommandons vivement la lecture aux professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire. Il leur fournit un exposé très clair de l'organisation de l'enseignement, des programmes et des méthodes ; à l'occasion il leur fait aussi connaître les tendances actuelles de l'enseignement mathématique en Allemagne.

Cette étude forme un intéressant complément aux articles qui ont été publiés dans cette *Revue* [1] par MM. S. Günther et Fr. Pietzker sur l'organisation de l'enseignement mathématique en Allemagne. H. F.

E. Barbette. — **Cours de Trigonométrie** à l'usage des candidats aux Ecoles spéciales. — 1 vol. gr. in-8°, 259 p. ; prix : 5 fr. ; Ad. Hoste, Gand.

L'ouvrage de M. Barbette est un cours complet de Trigonométrie plane et sphérique. Il est destiné aux candidats aux Ecoles spéciales ; mais, par son mode d'exposition en rapport avec les progrès et les tendances modernes, il sera aussi lu avec intérêt par les professeurs.

L'auteur présente d'abord, à titre d'introduction, les notions essentielles relatives aux vecteurs, aux arcs et aux angles. Le cours proprement dit comprend quatre parties :

1. L'étude des fonctions trigonométriques et de leurs relations ;
2. La construction des tables ; la résolution des équations trigonométriques, l'étude des maxima et minima ;
3. La Trigonométrie plane, résolution des triangles rectangles et des triangles obliquangles ; applications ;
4. La Trigonométrie sphérique ; résolution des triangles sphériques ; applications.

Le livre se termine par une collection bien ordonnée de 666 exercices et problèmes.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaire des principaux périodiques :

Nouvelles Annales de Mathématiques, dirigées par C.-A. Laisant, C. Bourlet et R. Bricard. 4e série, T. V. Gauthier-Villars, Paris.

Janvier 1905. — M. G. Vivanti-Boulanger : Aperçu sur la théorie de l'équation du cinquième degré. — F. Gomes Teixeira : Sur une formule pour le calcul numérique des logarithmes. — M. d'Ocagne : Sur l'évaluation graphique des longueurs d'arc.

---

[1] Le développement historique de l'enseignement mathématique en Allemagne, par S. Günther (Munich), 2e année, p. 237-265.

L'enseignement mathématique en Allemagne pendant le XIXe siècle, par Fr. Pietzker (Nordhausen), 3e année, p. 2-25, 77-97.

Février. — P. Painlevé : Charles Hermite. — Lancelot : Points multiples des surfaces algébriques. — J.-E. Estienne : Note sur le théorème de Pascal dans l'espace.

Mars. — A. Maluski : Sur la développée et les quasi-développées d'une conique. — P. Niewenglowski : Note d'arithmétique. — O. Marcus : Démonstration géométrique du théorème sur la constance du rapport anharmonique des quatre tangentes, menées à une cubique par un de ses points. — G. Lery : Sur les trajectoires orthogonales d'une file de cercles. — M. Fréchet : Généralisation du problème de Pfaff. — G. Fontené : Polygones gauches de Poncelet. Extension du théorème de Cayley à l'espace.

Avril. — Hadamard : Sur la théorie des coniques. — A. Tresse : Sur l'équilibre du corps solide. — M. d'Ocagne : Sur la déformation des coordonnées tangentielles dites parallèles. — E.-B. Wilson : Sur le groupe qui laisse invariante l'aire gauche. — Mathy : Résistance de l'ellipsoïde immergé dans un fluide parfait incompressible. Intégration des formules. Expression des valeurs approchées. Cas du disque plat et de l'aiguille.

Mai. — L. Deny : Note sur la représentation géométrique des polynomes algébriques. — H. Laurent : Equation différentielle des courbes du troisième ordre. — G. Fontené : Sur les éléments doubles de deux figures semblables dans l'espace. — A. Tresse : Sur le mouvement d'un corps solide. — R. Bricard : Sur la transformation d'Ernest Duporcq et sur celle de Lie.

Juin. — G. Fontené : Discussion d'un triangle donné par les points remarquables O, I, H. — C.-A. Laisant : Intégration des fonctions inverses. — Canon : Nouvelles démonstrations du théorème de Feuerbach.

Juillet. — L. Lévy : Remarques sur la détermination des moments fléchissants produits par le passage d'un convoi sur une poutre à deux appuis simples. — E. Mathy : Méthode particulière d'intégration de

$$\int_{\gamma}^{\beta} \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}\,dx$$

quand α, β, δ, sont réelles et que $\alpha > \beta > \gamma > \delta$. Application à la Géométrie. — H. Piccioli : Sur l'équation intrinsèque des lignes qui appartiennent à certaines surfaces de révolution et du second degré.

Août. — A. Sainte-Laguë et J. Haag : Représentation de cercles par des points. — F. Hayaschi : Un théorème relatif aux valeurs moyennes. — Lancelot : Détermination d'une surface algébrique. — G. Remoundos : Sur les rapports hyperanharmoniques.

Jornal des Sciencias mathematicas e astronomicas, publicado pelo F.-Gomes Teixeira. Vol. XV. Imprensa da Universidade, Coïmbra.

Nos 4 et 5. — Lerch : Sur la cinquième démonstration de Gauss de la loi de réciprocité de Legendre. — L.-F. Marrecas-Ferreira : Sobre a theoria das raizes conjugadas. — Bibliographia.

Journal de Mathématiques élémentaires, paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet incl., publié par H. Vuibert, 29e année. Vuibert et Nony. Paris.

Revista trimestral de matématicas, publicado por J. Ruis y Casas, nos 17 et 18. 1905. Administracion : Calle de San Miguel, Zaragoza.

Wiskundige Opgaven, met Oplossingen. T. 9. — Delsman et Nolthenius. Amsterdam.

Revue de Mathématiques spéciales, rédigée par E. Humbert et G. Papelier. 15e année ; Vuibert et Nony, Paris.

Revue de Physique expérimentale et de Mathématiques élémentaires, revue bi-mensuelle publiée (en langue russe) par M. Zimmermann. T. XXXIII. Guernelt, Odessa.

2. Livres nouveaux:

P. Appell. — **Cours de Mécanique** à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales. 2e édit., entièrement refondue. — 1 vol. in-8°, 493 p. ; prix : 12 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

P. Appell et J. Chappuis. — **Leçons de Mécanique élémentaire** à l'usage des classes de mathématiques A et B. — 1 vol. in-16°, 306 p. ; prix : 4 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

W. M. Baker. — **Elementary Dynamics.** Second Edition, revised. — 1 vol. cart. in-16°, 318 p. ; prix : 4 s. 6 d. ; George Bell and Sons, Londres.

B. Baillaud et H. Bourget. — **Correspondance d'Hermite et de Stieltjes**, Tome II. — 1 vol. gr. in-8° ; VI-457 p. avec un portrait ; prix : 16 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

Ett. Bortolotti. — **Arithmetica generale ed Algebra** per la 1a Classe liceale. — 1 vol. in-8°, 120 p. ; prix : 1 L. 50 ; Albrighi Segati & C., Rome.

A. H. Bucherer. — **Elemente der Vektor-Analysis.** Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. 2. *Aufl.* — 1 vol. cart. in-8°, 106 p. ; prix : Mk. 2.40 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Ed. Goursat. — **Cours d'Analyse mathématique.** T. II ; Théorie des fonctions analytiques. Equations différentielles. Equations aux dérivées partielles. Eléments du calcul des vatiations. — 1 vol. gr. in-8° ; VI-640 p. ; prix : 20 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

C. Guichard. — **Sur les systèmes triplement indéterminés** et sur les systèmes triple-orthogonaux. — 1 vol. cart. *(Collection Scientia)* ; prix : 2 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

L. Hefter u. P. Koehler. — **Lehrbuch der analytischen Geometrie.** I : Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. — 1 vol. gr. in-8°, cart., XVI, 527 p. ; prix : Mk. 14 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Ch. Hermite. — **Oeuvres de Ch. Hermite**, publiées sous les auspices de l'Académie des sciences par Em. Picard. T. I. — 1 vol. gr. in-8° ; XL-500 p., avec un portrait d'Hermite : prix ; 18 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

G. Holzmüller. — **Die Planimetrie für das Gymnasium.** Nach Jahrgängen geordnet und mit zahlreichen Uebungsaufgaben zur freien Auswahl versehen. Erster Teil, 2. Auflage. — 1 vol. cart. in-8°, 240 p. ; prix Mk. 2.40 ; B. G. Teubner, Leipzig.

J. Bonvalot. — **Guide pratique du Géomètre-arpenteur** ou l'arpentage réduit à la pratique la plus simple, avec un supplément sur la méthode des coordonnées rectangulaires. — 1 vol. in-12 relié ; prix : 2 fr. 50 ; Ch. Amat, rue Cassette, Paris.

Cl. C. Dassen. — **Tratado elemental de Algebra** de acuerdo con el concepto moderno de esta cienca y los métodos màs rigurosos. — 1 vol, in-12, XVIII, 528 p. ; C. Hermanos, Buenos-Aires.

Cl. C. Dassen. — **Tratado elemental de Geometria euclédea** de acuerdo con las ideas modernas y métodos màs rigurosos. — 1 vol. in-12, XV, 470 p. ; C. Hermanos, Buenos-Aires.

J. Classen. — Zwölf Vorlesungen über **die Natur des Lichtes.** — 1 vol. in-12°, relié, 249 p.: prix : Mk. 4 ; G. J. Gœschen, Leipzig.

Alex. Gleichen. — **Vorlesungen über photographische Optik.** — 1 vol. gr. in-8°, 220 p., 63 fig.; prix : Mk. 9 ; G. J. Gœschen, Leipzig.

Wilh. Foerster. — **Astrometrie** oder die Lehre von der Ortsbestimmung im Himmelsraume, zugleich als Grundlage aller Zeit- und Raummessung. *Erstes Heft :* Die Sphärik und die Koordinatensysteme, sowie die Bezeichnungen und die sphärischen Koordinatenmessungen. — 1 fasc. gr. in-8°, 180 p.; prix : Mk 4 ; G. Reimer, Berlin.

Congrès international de Philosophie, IIme session, tenue à Genève du 4 au au 8 septembre 1904. *Rapports et comptes rendus*, publié par les soins du Dr Ed. Claparède, secrétaire général du Congrès. Avec 17 figures et 5 portraits hors texte. — 1 vol. gr. in-8°, 974 p.: prix : 25 fr. ; H. Kündig, Genève.

Alf. Lodge. — **Integral Calculus** for Beginners. — 1 vol. in-16°, cart., 203 p.; prix : 4 s. 6 d.; George Bell and Sons, Londres.

G. Scheffers. — **Lehrbuch der Mathematik** für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analyt. Geometrie. — 1 vol. gr. in-8°, 682 p.; prix : Mk. 16 ; Veit & Co. Leipzig.

P. H. Schoute. — **Mehrdimensionale Geometrie.** Teil II. — 1 vol. cart. (Sammlung Schubert); prix : Mk. 10 ; G. J. Gœschen, Leipzig.

R. Schröder. — **Die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung.** — Für Schüler von höheren Lehranstalten und Fachschulen, sowie zum Selbstunterricht. — 1 vol. cart., 131 p ; prix : Mk. 1.60 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Herm. Schubert. — **Auslese aus meiner Unterrichts- u. Vorlesungspraxis.** Erster Band. — 1 vol, cart. in-16 : 239 p.; prix : Mk. 4 : G. J. Gœschen, Leipzig.

Ed. Schulze u. F. Pahl. — **Mathematische Aufgaben.** Ausgabe für Gymnasien. I. Teil : Aufgaben aus der Planimetrie und Arithmetik für die Unterstufe. — 1 vol. cart. prix : Mk. 2.40 ; Dürr, Leipzig.

Fr. Schütte. — **Anfangsgründe der darstellenden Geometrie** für Gymnasien. — 1 vol., 42 p.; prix : Mk. 0.80 : B. G. Teubner, Leipzig.

Dav.-Eug. Smith. — **A modern American Course of Study in Arithmetic** arranged by years. — 1 broch., in-16. 22 p.; Ginn & Comp., Boston.

Dav.-Eug. Smith. — **Practical Arithmetik.** — 1 vol. in-12, 546 p.: prix : 65 cents : Ginn & Comp., Boston.

Dav.-Eug. Smith. — **Handbook to Smith's Arithmetics.** — 1 vol. in-12°, 125 p.; Ginn & Comp., Boston.

H.-A. Stern et W.-H. Topham. — **Pratical Mathematics.** — 1 vol. cart. 376 p. ; prix : 4 *s* 6 *d* ; Georges Bell & Sons, Londres.

O. Stolz u. J. A. Gmeiner. — **Einleitung in die Funktionenlehre.** II. Abteilung. — 1 vol. cart., 598 p.; prix : Mk. 9 ; B. G. Teubner, Leipzig.

H. Weber u. J. Wellstein. — **Encyklopädie der Elementar-Mathematik.** Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. T. II. Elementare Geometrie. — 1 vol. in.-8°, 604 p.; prix : Mk. 12 ; B. G. Teubner, Leipzig.

H. Wieleitner. — **Bibliographie der höheren algebraischen Kurven,** für den Zeitabschnitt von 1890-1904. — 1 broch. in-8°, de 58 p.: prix : Mk. 1.50 ; G. J. Gœschen, Leipzig.

TABLE DES MATIÈRES

ARTICLES GÉNÉRAUX

Méthodologie et organisation de l'enseignement.

Philosophie et histoire des mathématiques.

MÉLANGES

CORRESPONDANCE

CHRONIQUE

Congrès et sociétés savantes.

Articles divers.

Nécrologie.

NOTES ET DOCUMENTS

BIBLIOGRAPHIE

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Sommaire des principaux périodiques.

PUBLICATIONS NON PÉRIODIQUES

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

Cette table comprend les auteurs d'articles généraux ou d'articles de chronique, de lettres ou notes insérées dans la correspondance ou de comptes rendus bibliographiques.
Les numéros qui suivent chaque nom renvoient aux pages du volume.

ERRATA

